Б.В.Шабат

ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

В этой книге дается единое изложение основных понятий теории функций одного и нескольких комплексных переменных. Первая часть, посвященная функциям одного переменного, содержит материал обязательного университетского курса. Вторая часть посвящена функциям нескольких переменных и содержит материал основного спецкурса.

В последние десятилетия интерес к теории функций нескольких комплексных переменных значительно возрос — это объясняется тем, что она имеет важные приложения и богатые связи с другими разделами математики. Первоначальное изучение этой теории обычно довольно затруднительно. Принятое в книге единое изложение значительно облегчает знакомство с ней.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Глава I. Голоморфные функции **13**
§ 1. Комплексная плоскость 13
1. Комплексные числа 13
2. Топология комплексной плоскости 17
3. Пути и кривые 20
4. Области 23
§ 2. Функции комплексного переменного 26
5. Понятие функции 26
6. Дифференцируемость 31
7. Геометрическая и гидродинамическая интерпретация 36
§ 3. Элементарные функции 42
8. Дробно-линейные функции 42
9. Геометрические свойства 47
10. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы 50
11. Некоторые рациональные функции 54
12. Показательная функция 58
13. Тригонометрические функции 61
Задачи 65
Глава II. Свойства голоморфных функций **68**
§ 4. Интеграл 68
14. Понятие интеграла 68
15. Первообразная 72
16. Гомотопия. Теорема Коши 80
17. Обобщения теоремы Коши 86
18. Интегральная формула Коши 90
§ 5. Ряды Тейлора 93

19. Ряды Тейлора 94
20. Свойства голоморфных функций 100
21. Теорема единственности 103
22. Теорема Вейерштрасса 106
§ 6. Ряды Лорана и особые точки 112
23. Ряды Лорана 112
24. Изолированные особые точки 119
25. Вычеты 127
Задачи 134
Глава III. Аналитическое продолжение **137**
§ 7. Понятие аналитического продолжения 137
26. Элементы аналитических функций 137
27. Продолжение вдоль пути 144
§ 8. Понятие аналитической функции 151
28. Аналитические функции 151
29. Элементарные функции 156
30. Особые точки 164
§ 9. Понятие римановой поверхности 170
31. Элементарный подход 170
32. Общий подход 174
Задачи 181
Глава IV. Основы геометрической теории **183**
§ 10. Геометрические принципы 183
33. Принцип аргумента 183
34. Принцип сохранения области 187
35. Принцип максимума модуля и лемма Шварца 192
§ 11. Теорема Римана 195
36. Конформные изоморфизмы и автоморфизмы 195
37. Принцип компактности 199
38. Теорема Римана 204
§ 12. Соответствие границ и принцип симметрии 206
39. Соответствие границ 206
40. Принцип симметрии 211
41. Эллиптический синус и модулярная функция 216
Задачи 221
Глава V. Дополнительные вопросы **223**
§ 13. Разложения целых и мероморфных функций 223
42. Теорема Миттаг-Леффлера 223
43. Теорема Вейерштрасса 230
§ 14. Гармонические и субгармонические функции 238
44. Гармонические функции 238
45. Задача Дирихле 243
46. Субгармонические функции 248
Задачи 254

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава I. Голоморфные функции нескольких переменных **259**
§ 1. Комплексное пространство 259
1. Пространство C^n 259
2. Простейшие области 264
§ 2. Понятие голоморфности 270
3. Определение голоморфности 270
4. Плюригармонические функции 277
5. Основная теорема Хартогса 280
§ 3. Голоморфные функции 285
6. Простейшие свойства 285
7. Степенные ряды 293
8. Ряды Хартогса и Лорана 297
Задачи 301
Глава II. Интегрирование 304
§ 4. Многообразия и формы 304
9. Понятие многообразия 304
10. Дифференциальные формы 309
11. Понятие интеграла от формы 314
§ 5. Теорема Коши — Пуанкаре 321
12. Цепи и их границы 322
13. Дифференцирование форм 326
14. Формула Стокса 331
15. Теорема Коши — Пуанкаре 334
§ 6. Интегральные представления 337
16. Формулы Мартинелли — Бохнера и Лере 337
17. Теорема Севери 344
18. Формула Вейля 350
Задачи 355
Глава III. Аналитическое продолжение **357**
§ 7. Области голоморфности 357
19. Теорема Хартогса о продолжении 357
20. Понятие области голоморфности 360
21. Голоморфная выпуклость 365
22. Свойства областей голоморфности 372
§ 8. Псевдовыпуклость 377
23. Принцип непрерывности 377
24. Выпуклость в смысле Леви 381
25. Плюрисубгармонические функции 386
26. Псевдовыпуклые области 395
§ 9. Оболочки голоморфности 401
27. Однолистные оболочки голоморфности 402
28. Области разложения 408

29. Многолистные оболочки голоморфности 417
Задачи 422
Глава IV. Мероморфные функции и проблемы Кузена **424**
§ 10. Мероморфные функции 424
30. Понятие мероморфной функции 424
31. Первая проблема Кузена 429
32. Решение для поликругов 434
30. Применения. Вторая проблема Кузена 439
§ 11. Методы теории пучков 445
34. Основные определения 445
35. Группы когомологий 451
36. Точные последовательности пучков 455
§ 12. Применения 460
37. Решение первой проблемы Кузена 460
38. Решение второй проблемы Кузена 466
39. Решение $\overline{\partial}$-проблемы и проблемы Леви 469
Задачи 480
Глава V. Особенности и вычеты **484**
§ 13. Многомерные вычеты 484
40. Теория Мартинелли 485
41. Теория Лере 492
42. Логарифмический вычет 501
§ 14. Аналитические множества 507
43. Понятие аналитического множества 507
44. Локальное обращение голоморфных функций 515
§ 15. Аналитичность множества особенностей 519
45. Аналитичность множества особых точек 520
46. Существенно особые точки 523
47. Теорема о вложенном ребре 527
Задачи 530
Глава VI. Голоморфные отображения **533**
§ 16. Автоморфизмы простейших областей 533
48. Общие теоремы 534
49. Автоморфизмы пространства 540
50. Автоморфизмы некоторых областей 546
§ 17. Инвариантная метрика 551
51. Кернфункция 551
52. Метрика Бергмана 559
53. Поведение кернфункции на границе 564
Задачи 570
Предметный указатель **572**

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абеля теоремы 97, 275, 293 Абсолютный октант 267

Автоморфизмы канонических областей 197
— круга 53
— области 533
— поликруга 550
— пространства 540
— — нелинейные 541
— шара 546
Автоморфная функция 217
Адамара теорема 235
Аналитическая кривая 377
— плоскость 260
— — касательная 343, 510, 513
— поверхность 377
— — компактная 377
— прямая 260
— функция 152, 410
Аналитическое множество 507
— — компактное 531
— — локально неприводимое 508
— — неприводимое 507
— продолжение 137, 143, 410
— — вдоль пути 145, 410
— — непосредственное 143, 410
Антиголоморфная функция 277
Антиконформное отображение 38
А-точка 106
База открытых множеств 448
— пучка 446
— n-мерных гомологии 487
Барьер в граничной точке 362, 364
Бенке — Зоммера теорема 378, 520
Бенке — Штейна теоремы 370, 373
Бергмана граница 303
— кернфункция 555
Бесконечная точка 15, 36, 106, 130
Бесконечное произведение 230
Биголоморфное отображение 376, 413, 533
Буняковского — Шварца неравенство 551
Бурмана — Лагранжа ряд 191
Вейерштрасса теорема подготовительная 289, 514, 516
— теоремы 106, 231, 288
Вейля множество 350
— область 350
— разложение 353
— теорема 351
— формула 350
Векторное поле 40
Верхняя огибающая 250
Ветвь аналитической функции 152
Вложение многообразий 412
Внешнее умножение 311
Выпуклая оболочка 365
— функция 394
Выпуклость 365
— — в смысле Леви 381
— голоморфная 365, 415
— логарифмическая 294—296
Выпуклость относительно класса 366
— полиномиальная 366, 481
— рациональная 367, 531
Вычет 130
— логарифмический 183, 501
— относительно базисного цикла 488
— — особого цикла 490
— функции 128, 484
Вычет-класс 498
— — сложный 500
Вычет-форма 495
Гамма-функция 138
Гармоническая мажоранта 249, 250
— — наилучшая 252
— функция 238, 242, 390
Геометрия Лобачевского 67, 563
Гиперболическая метрика 563
Гипотеза Бибербаха 136
Глобальное сечение пучка 453
Голоморфизм 195, 307, 376, 413, 533
Голоморфная выпуклость 365, 415
— кривая 355
— нерасширяемость в точке 381
— форма 314
— функция 35, 271
— — в смысле Вейерштрасса 102, 285

— — — — Коши 102
— — — — Римана 102. 285
— — на комплексном многообразий 308
Голоморфное отображение многообразий 412
— расширение области 361
Голоморфность функции в точке 35, 271
Голоморфный изоморфизм 412
— коцикл 430, 442
Гомологии компактные 497
Гомоморфизм пучков 456
Гомотопические классы 82
Гомотопия 80
Гомотопность кривых 83
Граница 324
— Бергмана 303
— области 24
— — ориентированная 87
— поликруга 265
— симплекса 322
— цепи 323, 325
— Шилова 237, 303, 570
Граничное расстояние 409
Грина формула 337, 338
Группа автоморфизмов 195, 544
— гомологии 324
— дифференциальных форм 313, 330
— когомологий 331, 434, 451—455
— — с коэффициентами в пучке 452
— — покрытия 453
— — пространства 455
— коциклов 452
— относительных гомологии 500
— — цепей 500
Даламбера — Эйлера условия 33
Двоякопериодичность 217
де Рама теорема 463, 482
Диаграмма Рейнхарта 267
— Хартогса 268
Диаметр множества 88
Дивизор 468
Дигармонические функции 278
Дирихле задача 243, 255, 280
Дискриминант 511
Дискриминантное множество 511, 517
Дифференциал 31
— формы 323
Дифференциальная форма 79, 278, 310—
— — бистепени *(p, q)* 314
— — замкнутая 79, 278, 330, 433
— — класса $C_0^\infty(D)$ 471
— — C^q 312
— — точная 79, 278, 330
— — эрмитова 384, 561
Дифференциальный коцикл 432
— —, когомологичный нулю 432
Дифференцирование сложных функций 272
Дифференцируемость в смысле C^n 32, 270
— — R^n 31, 270
— — точке 31
Длина пути 22
Дольбо теорема 461
Дробно-линейные автоморфизмы 52
— — изоморфизмы 51
— — функции 42
Дуга аналитическая 208
$\overline{\partial}$-проблема 469
δ-функция 341
Евклидова метрика 16, 261
Жордана лемма 134
Жорданов путь 21
Жорданова граница 25
— кривая 23
— область 25
Жуковского функция 55
Задача Дирихле 243, 255, 280
Зацепления коэффициент 486
Идеал кольца 254, 291, 303
Изолированная особая точка 119, 164, 349
Изоморфизм голоморфный 376

— Дольбо 462
— областей 533
— пучков 456
Инверсия 49
Индекс отображения 519
— — локальный 506, 518
— пресечения симплексов 485
— — цепей 485
— поверхности относительно точки 501
— пути относительно точки 185
Интеграл 68, 78, 71, 316, 319
— Коши 90, 274, 321
— —типа Коши 134
— эллиптический первого рода 209—211
Интегральное представление Вейля 350
— — Лере 343
— — Мартинелли — Бохнера 340
Исчерпание множества 320
— — компактное 108, 363, 368
Каратеодори компактификация 206
Картана теоремы 463, 464, 534
Картана —
Каратеодори теорема 537
Картана — Туллена теоремы 367, 371, 415
Келлога теорема 207
Кернфункция 555
Класс-вычет 498
— — сложный 500
Класс функций 369
— — й-устойчивый 369
— — р-устойчивый 370
Кнезера теорема 527
Когранича 452
Кограничный оператор 452
— — Лере 496
Кольцо голоморфных функций 36, 272
— ростков голоморфных функций 445
— — мероморфных функций 450
Компакт 202
'Компактификация 15, 206, 261
Компактность в себе 202
Копактные гомологии 497
Комплекс 325
Комплексная плоскость 13, 15
— прямая 260
— структура на многообразии 306
Компоненты множества 24
Конформность 37, 207
Конформные автоморфизмы 195
— изоморфизмы 195
Координаты локальные 305
— однородные 262
Коцепь порядка *p* 452
Коцикл 331. 430, 433, 452
—, когомологичный нулю 331, 430
Коши интеграл 90
— — кратный 274
— — повторный 321
— неравенства 95, 117. 276
— теоремы 84, 128, 484
— формула 90
Коши — Адамара формула 97, 296
Коши — Буняковского неравенство 540
Коши — Гоина формула 92, 340
Коши — Пуанкаре теорема 335
Коши — Римана уравнения 33
— — — касательные 356
— — — неоднородные 434, 470
Коши — Фантапье формула 341
Коэффициент зацепления 486
Кривая 21
— гладкая 23
— жорданова 23
— — аналитическая 208
— кусочно гладкая 23
— спрямляемая 23
Кпитические точки 510, 513
Круг сходимости 98. 114
Кузена проблема вторая 441. 460, 466
— — первая 429, 460. 463, 464
Леви выпуклость 381

— определитель 385
— проблема 382, 478
— теоремы 525, 526
— форма 383
Леви — Кшоски теорема 384
Лере кограничный оператор 496
— теория 492—501
— формула 343
Линделёфа теорема 207
Линейная функция 43
Линейное преобразование 544—546
Линии тока 41
Липшица условие 102, 398
Лиувилля теорема 95, 241, 288, 302, 349
Логарифмическая выпуклость 294
— производная 183
Логарифмический вычет 183, 501
— образ 294
— потенциал 255, 521
Локально конечное покрытие 318, 432
Локальное обращение голоформных функций 188, 515—519
Локальные координаты 305
Локальный индекс отображения 506, 518
— параметр 177, 304
— принцип максимума Росси 423
Лорана ряд 144, 299
L-выпуклость 381
Мартинелли — Бохнера интегральное представление 340
— — формула 340
Матрица кососимметрическая 312
— Якоби 512
Мероморфная кривая 530
— функция 126, 237, 424, 427
Мероморфное продолжение 523
Метод Коши улучшения сходимости 139, 226
Метрика Бергмана 559, 563
— гиперболическая 563
— инвариантная 563
Миттаг — Леффлера теорема 224
Многолистные области 360
Многообразие 304
— гладкое 306
— дифференцируемое 306
— класса C^p 306
— — C^∞ 306
— комплексно аналитическое 177, 307
— комплексное 307, 355
— наложения над C 409
— ориентируемое 315, 356
— Штейна 417, 478
Множество аналитическое в точке 507
— ветвления 517
— дискриминантное 511, 517
— неприводимое 507
— неопределенности функции 124
— — мероморфной функции 427
— сходимости степенного ряда 303
— тонкое 358
Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского 67
Модулярная функция 217
Монтеля теорема 201
Мореры теорема 101, 335
Наилучшая гармоническая мажоранта 252
— плюрисубгармоническая мажоранта 408
— плюрисупергармоническая мажоранта 407
Непрерывная функция 30
Непрерывность в смысле C 30
— — — $\overline{C}$ 30, 66
— точке 30
Неприводимая компонента аналитического множества 509
Неравенство Коши 95, 117, 276
Неравенство Буняковского — Шварца 551

— Коши — Буняковского 540
— треугольника 551
Носитель комплекса 325
— формы, функции 318, 432
Нуль мероморфной кривой 530
— функции 103
Ньютона — Лейбница формула 77, 333
Область 23
Оболочка выпуклая 365
— голоморфности 362, 402
— — области Рейнхарта 406
— — — Хартогса 407
— — трубчатой области 404
— F-выпуклая
Общее положение многообразий 499
— — точек 322
Объединение областей голоморфности 373
— путей 70
Ока теоремы 467, 480
Окрестность 17, 174, 410, 446
— проколотая 18
Октант абсолютный 267
Оператор взятия границы 323
— d 327, 330
— $\overline{\partial}$ 469
— ∂ 482
— Лапласа 238
— res 495
Определитель Леви 385
Определяющая функция 439
Ориентация многообразия 315, 356
Осгуда лемма 282
— теорема 518
Осгуда — Брауна теорема 349
Особая точка 119, 164
— — изолированная 119, 164, 349
— — многозначного характера 166
— — неизолированная, пример 120
— — однозначного характера 166
— — устранимая 119
Остов множества Вейля 350
— поликруга 265
— поликруговой области 265, 335
Остроградского формула 333
Относительная граница 500
— топология 26
Отображение антиконформное 38
— биголоморфное 376, 413, 533
— конформное в точке 37
— — — области 37
— — второго рода 38
— пучков 455
Парсеваля равенство 553
Первообразная 72
— вдоль пути 76
— локальная 73
Пересечение областей голоморфности 372
Пикара теорема 219, 220, 554
— — большая 220
Плоскость аналитическая 260
Плюригармоническая функция 278
Плюрисубгармоническая функция 387
Плюрисупергармоническая функция 407
Поверхность аналитическая 377
— модуля 29, 321
Подготовительная теорема Вейерштрасса 289, 514, 516
Подпучок 456
Поле мероморфных функций 428
— отношений кольца 450
Поликруг (полицилиндр) 264, 287, 419, 550, 556
— — — — — максимальный 409
— сходимости степенного ряда 296
Полиномиальная выпуклость 366, 481
Полиэдр 325
— аналитический 350, 367, 373
— полиномиальный 356
Полиэдрическая область 350
Полиэдрическое множество 350
Полунепрерывность 249, 278, 387

Полюс 119, 425
— мероморфной кривой 530
Полярная особенность 499
— — первого порядка 493
Полярное множество мероморфной функции 425
Порядок Л-точки 106, 519
— ветвления 167
— нулевого множества 468, 509
— нуля 105, 530
—— — в бесконечности 106
— общего нуля 506
— полюса 123, 530
— полярного множества 468, 509
— целой функции 234
Последовательность гомоморфизмов 324
— — точная 324, 331
— комплексных чисел 19
Потенциал комплексный 41
Потенциальная функция поля 40
Предел функции 29, 30
Предельная точка последовательности 19
Предпучок 448
— мероморфных функций 450
Преобразование линейное 544
— — положительно определенное 545
— — унитарное 545
— Рейнхарта 267, 302
Принадлежность компактна» 25
Проблема Кузена вторая (мультипликативная) 441, 460, 466
— — первая (аддитивная) 429, 460, 463, 464
— Леви 382
Продолжение аналитическое 137, 143, 145, 410
— мероморфное 523
Производная 34
— аналитической функции 155
— по направлению 33
Пространство комплексное n-мерное 259
— — проективное 262, 307
— теории функций 262
— топологическое 174
— — хаусдорфово 175
— C^n 259
Псевдовыпуклость 377—395
Пуанкаре — Вольтерра теорема 154
Пуассона формула 244
Пути гомотопные 81, 149
— с общими концами 81
— эквивалентные 21
Путь 20
— гладкий 22, 320
—, гомотопный нулю 82
— жорданов 21
— замкнутый 21
— кусочно гладкий 22
— непрерывно дифференцируемый 22
— спрямляемый 22
Пучок 446
— групп 451
— колец 450
— полей 450
— постоянный 451
— ростков голоморфных функций 181, 450
— — дифференциальных форм 450
— — мероморфных функций 450
— — функций класса C 451
— тонкий 481
Равенство Парсеваля 553
Радиус мероморфности функции 526
— сходимости 98
— Хартогса 298, 395, 397
Радиусы сходимости сопряженные 296
Разбиение единицы 318, 432
Размерность аналитического множества 512
— комплекса 325
Расстояние 16, 20

— граничное на многообразии наложения 409
Рациональная выпуклость 366, 531
Ребро множества Вейля 350
Результант 511, 516
Рейнхарта область 266, 267, 300, 405
Рельеф функции 29
Римана поверхность 171, 178, 308, 411
— сфера 16
— теорема 204
Римана — Грина формула 85, 333
Римана — Шварца принцип симметрии 213
Риманово многообразие 176, 411
Росси локальный принцип максимума модуля 423
— теорема 481
Росток аналитического множества 513
— аналитической функции 151, 410
— дивизора 469
— мероморфной функции 450
Рунге область 355
— теорема 109, 193
Руше теорема 186, 506
Ряд Бурмана — Лагранжа 191
— Лорана 114
— — кратный 299
— степенной 94, 293
— Тейлора 95
— Фурье 117, 549
— Хартогса 298
— Хартогса — Лорана 301, 524
ρ-метрика 261
Связность 24, 26, 308
— линейная 24
Севери теорема 344, 348
Семейство функций компактное 200
— — равномерно ограниченное внутри области 199
— — равностепенно непрерывное внутри области 200
— — слабо ограниченное 534
— — (сильно) ограниченное 535
Серра теорема 466, 482
Сечение пучка 181, 447
Сильное ф-вложение многообразий 412
Симплекс 314
— криволинейный 325
Синус 61
— эллиптический 216. 222
Слабая сходимость 475
Слабое φ-вложение многообразий 412
Сложный класс-вычет 500
Соответствие границ 206—208
Соотношения соседства 177, 305
Сопряженные радиусы сходимости 296
Сохоцкого теорема 123, 544
— формула 135
Сохранение углов 39
Стебель пучка 447
Степенная функция 54
Степенные ряды 94, 293
Степень дифференциальной формы 312
Стереографическая проекция 16, 302
Стирлинга формула 221
Стокса формула 331, 333
Строго плюрисубгармоническая функция 389
Субгармоническая функция 249, 390
Супергармоническая функция 254
Существенно особая точка 120, 523
Сфера комплексных чисел 16
— Римана 15
Сферическая метрика 16
Сходимость последовательности множеств 377
— ряда 93
— — мероморфных функций 224
— — равномерная 93
Тейлора ряд 95
Тип целой функции 235, 254
Тонкое множество 358

Тор комплексный n -мерпый 355
Точка ветвления 166
— — бесконечного порядка 167
— — конечного порядка 167
— — логарифмическая 167
— — римановой поверхности 171
— критическая 171, 510, 513
— неопределенности 424
— обыкновенная 171, 509, 512
Точки в общем положении 322
— симметричные 48
Точная последовательность пучков 457
Трансцендентная целая функция 126
Угловое граничное значение 207
Угол в бесконечности 44
Унитарное преобразование 545
Уравнения Коши — Римана 33
— — — касательные 356
— — — неоднородные 434, 470
Условие Липшица 108, 398
Условия Даламбера — Эйлера 33
— локальной однолистности 190, 515
Усредняющее ядро 472
Факторпучок 456
Фату пример 541—544
Форма-вычет 495
Форма дифференциальная 79, 278, 310—314, 330, 384, 433, 471, 561
Функционал 202, 417
φ-вложение сильное 412
— слабое 412
φ -расширение функции 413
φ -сужение функции 413
F-выпуклость 366
Характеристическая функция 332, 472
Харнака теорема 242
Хартогса лемма 283
— область 268, 302, 407
— — полная 268
— ряд 298
— теорема основная 284
— теоремы 252, 357, 520, 523
Хартогса — Лорана ряд 301, 524
Хефера теорема 351, 441
Хёрмандера теоремы 478, 567
Цепь 322
Цикл 324
—, гомологичный нулю 324
— особый 489
Циклы гомологичные 324
Шар 264, 287, 546, 557
Шварца лемма 194, 281, 539, 550
— теорема 215
Шилова граница 287, 303, 570
Шпета — Картана теорема 531
Эйлера формула 59
Экстремальная функция 553, 558
Элемент аналитической функции 143, 410
— — — канонический 144
Эллиптический интеграл 209
— синус 216, 222
ε-окрестность 17, 175
Ядро гомоморфизма 324, 331

Моему учителю —
МИХАИЛУ АЛЕКСЕЕВИЧУ
ЛАВРЕНТЬЕВУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обстоятельный анализ свойств функций немыслим без выхода в комплексную область. Вот простой пример: функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ одинаково хороша (бесконечно дифференцируема) во всех точках числовой оси, а ее ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$$

перестает сходиться при $|x|\geqslant 1$. Причину этого нельзя понять, оставаясь в действительной области: ведь точки $x=\pm 1$, разделяющие множества сходимости и расходимости ряда, ничем не примечательны для нашей функции. Но выход в комплексную область сразу разъясняет явление: на окружности $|x|=1$ лежат точки $x=\pm i$, в которых функция f обращается в бесконечность, из-за них ряд и перестает сходиться.

Переход к рассмотрению функций комплексного переменного необходим в целом ряде вопросов. Он столь же естествен, как переход от поля действительных чисел к алгебраически замкнутому полю комплексных чисел. И удивительно — для функций от комплексных чисел, тех самых, которые по знаменитой теореме Фробениуса дают единственно возможное расширение поля действительных чисел с сохранением алгебраических свойств, удается построить и анализ, столь же полный и стройный, как анализ функций действительного аргумента.

Переход к комплексному анализу дает возможность глубже изучить элементарные функции и установить интересные связи между ними. Так тригонометрические функции оказываются простыми комбинациями показательных, например,

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right).$$

Вскрываются такие неожиданные и замечательные соотношения между действительными и «мнимыми» величинами, как скажем

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

В действительном анализе стройная теория развивается лишь для однозначных функций, а многозначные часто доставляют много неприятностей. В комплексном анализе удается выяснить природу многозначности и построить безупречную теорию многозначных функций.

Комплексный анализ дает эффективные методы вычисления интегралов и получения асимптотических оценок, способы исследования решений дифференциальных уравнений и т. д. — перечень задач, которые решаются средствами комплексного анализа, можно продолжать довольно долго. К этому надо добавить, что функции комплексного переменного описывают плоские векторные поля, причем в комплексном анализе особо выделяются функции, которым соответствуют поля, наиболее интересные для приложений — одновременно потенциальные и соленоидальные. Поэтому комплексный анализ находит многочисленные применения в самых разных областях.

Одной из отличительных и привлекательных черт комплексного анализа является его подлинная комплексность. В нем сочетаются аналитические и геометрические, вполне классические и самые новые методы. Наряду с очень конкретными и прикладными в нем решаются весьма общие и абстрактные задачи. В комплексном анализе встречаются и разные разделы математики, и разные прикладные науки. Его понятия служат основной моделью, источником и отправным пунктом многих исследований в функциональном анализе, алгебре, топологии, алгебраической и дифференциальной геометрии, уравнениях с частными производными и других разделах математики.

Начальные идеи комплексного анализа возникли во второй половине 18-го века, и связаны они прежде всего с именем Леонарда Эйлера. Основной массив теории был создан в 19-м веке, главным образом трудами Огюстена Коши, Бернарда Римана и Карла Вейерштрасса. В наши дни более классическая часть комплексного анализа — теория функций одного комплекс-

ного переменного — приобрела уже вполне совершенный вид. Однако и здесь постоянно возникают нерешенные проблемы как в связи с новыми постановками математических задач, так и в связи с приложениями. В более молодой части — теории функций *нескольких* комплексных переменных — имеется еще довольно много белых пятен. Но эта область, особенно богатая связями со многими разделами современной математики, все больше и больше привлекает к себе внимание.

По-видимому, наступило время, когда изучающие комплексный анализ должны знакомиться с основами теории функций не только одного, но и нескольких комплексных переменных. Эти две части, однако, наряду с общими (сравнительно элементарными) свойствами имеют ряд свойств, принципиально отличающих их друг от друга. Поэтому, по крайней мере на сегодняшнем уровне развития науки, их лучше изучать последовательно, а не параллельно. В Московском университете эта цель достигается введением наряду с обязательным курсом так называемого основного спецкурса, который должны прослушать студенты, специализирующиеся в области теории функций.

В литературе имеется много превосходных курсов теории функций одного комплексного переменного, в последние десятилетия появился и ряд руководств по теории функций нескольких комплексных переменных. Однако единого изложения двух частей комплексного анализа еще нет, и эта книга является первым опытом такого изложения. Она возникла из лекций читанных автором в Московском университете, причем первая часть относится к обязательному курсу, а вторая — к основному спецкурсу. Книга задумана так, что многие ведущие идеи второй части сначала появляются в первой части, где они иллюстрируются на более простом материале функций одного переменного [1]).

Каждая глава сопровождается некоторым количеством задач. Среди них нет упражнений, призванных закрепить навыки

[1]) Несколько слов по поводу названия книги. Автор отдает себе отчет в том, что термин «комплексный анализ» у нас не принят. Однако в принятой терминологии книга должна была бы носить длинное и неблагозвучное название «Введение в теорию функций одного и нескольких комплексных переменных».

использования методов комплексного анализа, поэтому их набор нисколько не заменяет задачника. Имеются задачи двух видов — сравнительно нетрудные, иллюстрирующие изложенный в книге материал, и задачи, в которых формулируются не вошедшие в книгу теоремы; последние иногда снабжаются литературными указаниями. Резкого разграничения между этими двумя видами задач умышленно не делается.

Идею написать эту книгу мне подал А. О. Гельфонд, которому, однако, не довелось увидеть ее готовой. А. А. Гончар просмотрел рукопись и сделал много конкретных замечаний. Ряд полезных советов дали мне В. С. Владимиров, Б. Я. Левин и А. И. Маркушевич, В. А. Зорич помог в подборе задач. Этим моим коллегам я весьма признателен. Особенно многим я обязан редактору книги Е. М. Чирке, который внимательно прочитал рукопись и помог устранить ряд недочетов. Ему принадлежит также изложение п. 39 второй части и подбор большинства задач.

ЧАСТЬ I

ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ГЛАВА I

ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Начнем с описания комплексных чисел и действий над ними. Мы предполагаем, что читатель знает их, и поэтому наше описание будет кратким, с упором на особенности, нужные для дальнейшего изложения.

§ 1. Комплексная плоскость

1. Комплексные числа. Рассмотрим множество $\mathbb{C}$ упорядоченных пар действительных чисел $z=(x, y)$ или, что то же самое, точек декартовой плоскости xOy или (свободных) плоских векторов. Два вектора $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ считаются *равными* ($z_1=z_2$) в том и только том случае, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$; векторы $z=(x, y)$ и $\bar{z}=(x, -y)$, которые изображаются точками, симметричными относительно оси x, назовем *сопряженными*. Вектор $(x, 0)$ отождествим с действительным числом x; совокупность всех действительных чисел (ось x) обозначим через $\mathbb{R}$. Для действительных чисел и только для них $\bar{z}=z$.

На множестве $\mathbb{C}$ введем совокупность алгебраических операций, превращающих $\mathbb{C}$ в поле. Сложение и умножение на действительное число (скаляр) λ введем так же, как в векторном исчислении. После этого мы сможем представить каждый элемент $z\in\mathbb{C}$ в так называемой *декартовой* форме:

$$z=x\cdot 1+y\cdot i=x+iy, \tag{1}$$

где через $1=(1, 0)$ и $i=(0, 1)$ обозначены единичные векторы (орты) соответственно осей x и y (обозначение первого орта опускается).

Умножение в векторном исчислении вводят двумя способами: паре векторов $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ ставят в соответствие скалярное произведение по формуле

$$(z_1, z_2)=x_1x_2+y_1y_2, \tag{2}$$

а также векторное произведение по формуле

$$[z_1, z_2]=x_1y_2-x_2y_1\ ^{1}). \tag{3}$$

[1]) В общем случае векторное произведение двух векторов является вектором, перпендикулярным к плоскости перемножаемых векторов. Однако в случае плоского вектора поля, который только и рассматривается здесь, все векторные произведения коллинеарны и поэтому вполне описываются скаляром (3).

Но, как хорошо известно, ни одно из этих умножений не удовлетворяет аксиомам поля. Поэтому мы введем в $\mathbb{C}$ иное умножение. Именно, положим по определению $i \cdot i = i^2 = -1$ и назовем *произведением* $z_1 z_2$ вектор, который получается, если перемножить $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ как двучлены по обычным законам алгебры и положить $i^2 = -1$. Иными словами, по определению положим

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{4}$$

(соотношение $i^2 = -1$ получается отсюда как частный случай). Очевидно, что это произведение выражается через скалярное и векторное по формуле

$$z_1 z_2 = (\bar{z}_1, z_2) + i[\bar{z}_1, z_2], \tag{5}$$

где $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$ — вектор, сопряженный z_1.

Мы предполагаем известным, что введение описанных операций сложения и умножения превращает множество $\mathbb{C}$ в поле, которое называется *полем комплексных чисел*; его элементы — векторы $z = x + iy$ — называются *комплексными числами*. Таким образом, комплексное число $z = (x, y)$ представляет собой упорядоченную пару, комплекс, составленный из действительных чисел x и y, которые (в дань исторической традиции) соответственно называются *действительной* и *мнимой* частью числа z и обозначаются символами

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \tag{6}$$

Числа $z = (0, y)$, действительная часть которых равна 0 (в дань той же традиции), называются *мнимыми*.

Введенная выше декартова форма (1) записи комплексного числа удобна для выполнения операции сложения (и обратной к ней операции вычитания). Однако, как видно из (4), умножение (и деление) выполняется в этой форме довольно громоздко. Для последних операций (а также для возведения в степень и извлечения корня) удобнее *полярная форма* комплексного числа:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \tag{7}$$

которая получается из (2) переходом к полярным координатам (в такой форме можно представить любое комплексное число $z \neq 0$). Полярные координаты комплексного числа $z = x + iy$ — полярный радиус $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и полярный угол φ, т. е. угол между положительным направлением оси x и вектором z, соответственно называются его *модулем* и *аргументом* и обозначаются символами

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z; \tag{8}$$

модуль определяется однозначно, а аргумент — с точностью до слагаемого, представляющего собой целое кратное 2π. Для простоты письма введем сокращенное обозначение:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \tag{9}$$

(мы пользуемся здесь тем, что действие возведения числа в мнимую степень не определено [1]) и поэтому принятый символ вакантен), тогда полярная форма (7) примет компактный вид:

$$z = re^{i\varphi}. \tag{10}$$

Пользуясь элементарными формулами тригонометрии и определением умножения (4), мы получим соотношение

$$r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{11}$$

которое показывает естественность принятого сокращенного обозначения (9). Соотношение (11) гласит, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Так же просто выражается в полярной форме и операция деления комплексных чисел:

$$\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{12}$$

(если, конечно, $r_2 \neq 0$).

В некоторых вопросах удобно компактифицировать множество комплексных чисел $\mathbb{C}$. Это делается добавлением к нему идеального элемента, который называется *бесконечной точкой* $z=\infty$. В отличие от конечных точек ($z\neq\infty$) бесконечная точка не участвует в алгебраических действиях. Компактифицированную плоскость комплексных чисел (т. е. плоскость $\mathbb{C}$, пополненную бесконечной точкой) мы будем называть *замкнутой плоскостью* и обозначать символом $\overline{\mathbb{C}}$. Когда нужно подчеркнуть различие, будем называть $\mathbb{C}$ *открытой плоскостью*.

Описанную компактификацию можно сделать наглядной, если вместо изображения комплексных чисел точками плоскости воспользоваться их сферическим изображением. Для этого выберем в трехмерном евклидовом пространстве прямоугольную декартову систему координат ξ, η, ζ, оси ξ и η которой соответственно совпадают с осями x и y, и рассмотрим в этом пространстве сферу

$$S:\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta \tag{13}$$

---

[1]) В п. 12 мы введем это действие и докажем, что формула (9), в которой справа стоит мнимая степень числа e (основания натуральных логарифмов), действительно имеет место.

диаметра 1, касающуюся плоскости (x, y) в начале координат (рис. 1). Каждой точке $z(x, y)\in\mathbb{C}$ поставим в соответствие точку $Z(\xi, \eta, \zeta)$ пересечения с S луча, соединяющего «северный полюс» $N(0, 0, 1)$ сферы с точкой z.

Такое соответствие $z\to Z$ называется *стереографической проекцией*. Подставляя уравнение луча Nz ($\xi=tx$, $\eta=ty$, $\zeta=1-t$) в (13), мы найдем, что в точке пересечения луча со сферой $t(1+|z|^2)=1$, и получим уравнения стереографической проекции

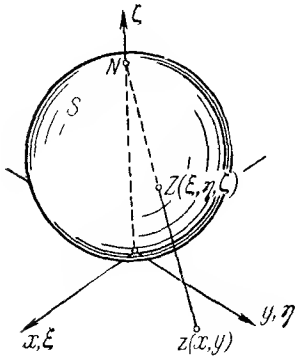


Рис. 1.

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\qquad \eta=\frac{y}{1+|z|^2},$$
$$\zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{14}$$

Из последнего уравнения находим, что $\frac{1}{1+|z|^2}=1-\zeta$, и тогда из первых двух получаем формулы для обратного отображения:

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\qquad y=\frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) видно, что стереографическая проекция $z\to Z$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $\mathbb{C}$ и $S\setminus N$ (очевидно, что точке N не соответствует ни одной точки z). Условимся считать, что N соответствует бесконечной точке $z=\infty$, и тем самым установим взаимно однозначное соответствие $\overline{\mathbb{C}}$ и S; *обычно мы будем отождествлять* $\overline{\mathbb{C}}$ *со сферой* S, которая называется *сферой комплексных чисел* или *сферой Римана*. Открытую плоскость $\mathbb{C}$ можно отождествлять с $S\setminus N$ — сферой с выколотой точкой N (северным полюсом).

В соответствии с двумя описанными способами геометрического изображения комплексных чисел мы введем на множестве $\mathbb{C}$ две *метрики*. Первая из них — обычная *евклидова* метрика, в которой под расстоянием между двумя точками $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ из $\mathbb{C}$ понимается

$$|z_2-z_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{16}$$

Во второй — *сферической* метрике — под расстоянием между z_1 и z_2 понимается евклидово расстояние (в пространстве ξ, η, ζ) между их сферическими изображениями. После несложных выкладок с использованием формул (14) мы найдем сферическое расстояние между двумя точками $z_1, z_2\in\mathbb{C}$:

$$\rho(z_1, z_2)=\frac{|z_2-z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}. \tag{17}$$

Эту формулу можно распространить и на множество $\overline{\mathbb{C}}$, положив [1])

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}. \tag{18}$$

Очевидно, для любых $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ имеем $\rho(z_1, z_2) \leqslant 1$. Легко проверить, что введение каждой из этих двух метрик превращает множество $\mathbb{C}$ в *метрическое пространство*, т. е. что при этом удовлетворяются обычные аксиомы расстояния [2]). В частности, аксиома треугольника для метрики (16) равносильна известному неравенству

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{19}$$

В заключение отметим, что на ограниченных множествах $M \subset \mathbb{C}$, принадлежащих фиксированному кругу $\{|z| \leqslant R\}$, $R < \infty$, евклидова и сферическая метрики *эквивалентны*. В самом деле, если $M \subset \{|z| \leqslant R\}$, то, как видно из (17), для любых точек z_1, $z_2 \in M$ справедливо двойное неравенство

$$\frac{|z_2 - z_1|}{1+R^2} \leqslant \rho(z_1, z_2) \leqslant |z_2 - z_1| \tag{20}$$

(подробнее об этом см. в следующем пункте). Поэтому сферическая метрика обычно применяется при рассмотрении неограниченных множеств. Как правило, мы будем рассматривать на множестве $\mathbb{C}$ евклидову метрику, а на $\overline{\mathbb{C}}$ — сферическую.

2. Топология комплексной плоскости. Мы ввели на множествах $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ метрики, превращающие эти множества в метрические пространства. Теперь мы введем на рассматриваемых множествах топологии, соответствующие метрикам. Это делается указанием системы окрестностей.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число; под *ε-окрестностью* $U_{z_0} = U(z_0, \varepsilon)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$ (в евклидовой метрике будем понимать круг радиуса ε с центром в этой точке, т. е. совокупность точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

Под ε-окрестностью точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ будем понимать совокупность точек $z \in \overline{\mathbb{C}}$, для которых

$$\rho(z, z_0) < \varepsilon. \tag{2}$$

---

[1]) Формула (18) получается из (17), если положить в ней $z_1 = z$, разделить числитель и знаменатель на z_2 и устремить z_2 к ∞.

[2]) См Г. Е. Шилов, Математический анализ, Физматгиз, М., 1961, стр. 25.

Формула (18) из п. 1 показывает, что неравенство $\rho(z, \infty)<\varepsilon$ равносильно неравенству $|z|>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-1}$; следовательно, ε-окрестности бесконечной точки на плоскости соответствует внешность круга с центром в начале координат (пополненная точкой $z=\infty$).

Мы назовем множество Ω из $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$) *открытым*, если для любой его точки z_0 найдется окрестность U_{z_0}, принадлежащая этому множеству.

Легко проверить, что такое введение понятия открытости превращает $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ в *топологические пространства*, т. е. что при этом выполняются обычные аксиомы [1]).

В некоторых вопросах удобно пользоваться так называемыми *проколотыми окрестностями*, под которыми на $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$ соответственно понимаются множества точек z, удовлетворяющих неравенствам

$$0<|z-z_0|<\varepsilon, \quad 0<\rho(z, z_0)<\varepsilon. \tag{3}$$

В этом пункте мы рассмотрим основные топологические понятия, которыми будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

Определение 1. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ (соответственно $\overline{\mathbb{C}}$) называется *предельной точкой множества* $M \subset \mathbb{C}$ (соотв. $\overline{\mathbb{C}}$), если в любой проколотой окрестности z_0 в смысле топологии $\mathbb{C}$ (соотв. $\overline{\mathbb{C}}$) найдется по крайней мере одна точка из M. Множество M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, получающееся присоединением к M всех его предельных точек, называется *замыканием* M и обозначается символом $\overline{M}$.

Пример. Множество M всех целых чисел $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ в $\mathbb{C}$ не имеет предельных точек (и, следовательно, замкнуто). В $\overline{\mathbb{C}}$ оно имеет одну предельную точку $z=\infty$, не принадлежащую M (M не является замкнутым в $\overline{\mathbb{C}}$).

В $\overline{\mathbb{C}}$ любое бесконечное множество имеет по крайней мере одну предельную точку (принцип компактности).

Этот принцип, выражающий полноту сферы комплексных чисел, можно вывести из аксиомы полноты действительных чисел; мы опускаем это доказательство. В $\mathbb{C}$ принцип компактности не имеет места (это видно из приведенного выше примера). Он верен, однако, для бесконечных ограниченных множеств, т. е. множеств, лежащих в каком-либо круге $\{|z|<R\}$, $R<\infty$. Такие множества мы будем называть *компактными*.

[1]) См. ниже п. 32, а подробнее П. С. Александров, Комбинаторная топология, Гостехиздат, М., 1947.

Из неравенств (20) п. 1 следует, очевидно, что точка $z_0 \neq \infty$ является предельной точкой множества M в топологии $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда она является предельной точкой M в топологии $\overline{\mathbb{C}}$. Иными словами, при определении конечных предельных точек мы можем с равным успехом пользоваться как евклидовой, так и сферической метрикой. Именно в этом смысле надо понимать утверждение об эквивалентности этих метрик в конце п. 1.

Определение 2. *Последовательностью* $\{a_n\}$ будем называть отображение в $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$) множества целых неотрицательных чисел (иными словами — функцию целого неотрицательного аргумента, принимающую комплексные значения). Точку $a \in \mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$) будем называть *предельной точкой последовательности* $\{a_n\}$, если в любой окрестности a в топологии $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$) найдется бесконечно много элементов этой последовательности. Последовательность $\{a_n\}$, имеющую в $\overline{\mathbb{C}}$ единственную предельную точку a, будем называть *сходящейся* к a; это будем записывать так:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a. \tag{4}$$

Замечание. Между понятиями предельной точки последовательности $\{a_n\}$ и множества значений $\{a_n\}$ имеется различие. Например, последовательность $a_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ имеет предельную точку $a = 1$, а множество $\{a_n\}$, состоящее из одной точки $a_n = 1$, предельных точек не имеет.

Мы предлагаем читателю доказать следующие утверждения:

1) последовательность $\{a_n\}$ сходится к a тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ (если $a \neq \infty$) или $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ (если $a = \infty$);

2) точка a тогда и только тогда является предельной для последовательности $\{a_n\}$, когда существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, сходящаяся к a.

Комплексное равенство (4), вообще говоря, равносильно двум действительным равенствам. Пусть $a \neq \infty$, тогда, не ограничивая общности, можно считать, что и $a_n \neq \infty$, и положить $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $a = \alpha + i\beta$ (для бесконечной точки понятия действительной и мнимой частей не имеют смысла); легко доказать, что (4) равносильно равенствам

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim_{n \to \infty} \beta_n = \beta \text{ [1]}. \tag{5}$$

[1]) Для доказательства достаточно воспользоваться соотношением

$$\max(|\alpha_n - \alpha|, |\beta_n - \beta|) \leqslant |a_n - a| = \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2} \leqslant |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta|.$$

В случае $a \neq 0$, $\neq \infty$ можно считать, что и $a_n \neq 0$, $\neq \infty$, и положить $a_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $a = re^{i\varphi}$; тогда (4) имеет место, если

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi, \tag{6}$$

и обратно, если (4) имеет место, то имеют место и соотношения (6), причем второе — при надлежащем выборе значений φ_n [1]). Если $a=0$ или ∞, то (4) равносильно одному соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$ (поведение φ_n при этом несущественно).

Мы будем пользоваться иногда понятием *расстояния между множествами* M и N, понимая под этим нижнюю грань расстояний между любыми парами точек, одна из которых принадлежит M, а другая N:

$$\rho(M, N) = \inf_{\substack{z'\in M \\ z''\in N}} \rho(z', z''); \tag{7}$$

вместо сферической метрики здесь можно, конечно, рассматривать и евклидову.

Теорема 1. *Если замкнутые множества* $M, N \subset \overline{\mathbb{C}}$ *не пересекаются* ($M \cap N = \varnothing$), *то расстояние между ними положительно.*

◀ Пусть, от противного, $\rho(M, N) = 0$. По определению нижней грани существуют последовательности точек $z'_n \in M$ и $z''_n \in N$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(z'_n, z''_n) = 0$. По принципу компактности последовательности z'_n и z''_n имеют предельные точки z' и соответственно z'', причем в силу замкнутости множеств $z' \in M$, $z'' \in N$. Переходя в случае надобности к подпоследовательностям, можно считать, что $z'_n \to z'$, $z''_n \to z''$. По аксиоме треугольника для сферической метрики имеем

$$\rho(z', z'') \leqslant \rho(z', z'_n) + \rho(z'_n, z''_n) + \rho(z''_n, z'').$$

Но правая часть стремится к 0 при $n \to \infty$; следовательно, переходя к пределу, получаем, что $\rho(z', z'') = 0$. По аксиоме тождества для той же метрики отсюда следует, что $z' = z''$, а так как $z' \in M$, $z'' \in N$, то это противоречит условию теоремы, по которому $M \cap N = \varnothing$ ▶

3. Пути и кривые. Определение 1. *Путем* γ мы будем называть непрерывное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ действительной оси в $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$). Иными словами, путь — это комплекснозначная функция $z = z(t)$ действительного аргумента t, непре-

[1]) Если значения φ_n выбирать произвольно, то $\{\varphi_n\}$ может и не сходиться при сходимости $\{a_n\}$.

рывная в каждой точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$ в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\{t \in [\alpha, \beta]: |t - t_0| < \delta\}$, для всех точек t которой $|z(t) - z(t_0)| < \varepsilon$ (или $\rho[z(t), z(t_0)] < \varepsilon$, если $z(t_0) = \infty$). Точки $a = z(\alpha)$ и $b = z(\beta)$ называются *концами* пути (если $\alpha < \beta$, то a — началом, а b — концом); путь называется *замкнутым*, если $z(\alpha) = z(\beta)$. Будем говорить, что путь γ: $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, *лежит на множестве* M, если $z(t) \in M$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$.

В некоторых вопросах удобно различать понятия пути и кривой. Чтобы ввести последнее, условимся называть два пути

$$\gamma_1\colon\ z = z_1(t),\ t \in [\alpha_1, \beta_1], \quad \text{и} \quad \gamma_2\colon\ z = z_2(\tau),\ \tau \in [\alpha_2, \beta_2],$$

эквивалентными ($\gamma_1 \sim \gamma_2$), если существует непрерывная возрастающая функция

$$\tau = \tau(t)\colon\ [\alpha_1,\ \beta_1] \xrightarrow{\text{на}} [\alpha_2,\ \beta_2] \tag{1}$$

такая, что $z_1(t) = z_2[\tau(t)]$ для всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Нетрудно проверить, что это отношение удовлетворяет обычным аксиомам эквивалентности: рефлексивности ($\gamma \sim \gamma$), симметричности (если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то $\gamma_2 \sim \gamma_1$) и транзитивности (если $\gamma_1 \sim \gamma_2$ и $\gamma_2 \sim \gamma_3$, то $\gamma_1 \sim \gamma_3$). Мы будем говорить, что путь γ_2 получается из γ_1 заменой параметра (1).

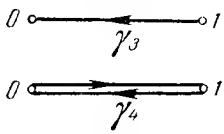


Рис. 2.

Пример. Рассмотрим пути γ_1: $z = t$, $t \in [0, 1]$;

γ_2: $z = \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; γ_3: $z = \cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

γ_4: $z = \sin t$, $t \in [0, \pi]$.

Множество значений $z(t)$ во всех случаях одинаково — это отрезок $[0, 1]$. Однако лишь $\gamma_1 \sim \gamma_2$; пути γ_3 и γ_4 не эквивалентны этим двум и не эквивалентны друг другу — в них отрезок $[0, 1]$ обходится иначе, чем в первых двух (рис. 2). Можно сказать, что γ_1 и γ_2 эквивалентны пути γ_3^-, который получается из γ_3 изменением ориентации (об этом см. ниже в п. 14).

Определение 2. *Кривой* называется класс путей, эквивалентных в приведенном выше смысле. Иногда, если это не вызовет недоразумений, мы будем понимать под кривой множество точек $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$, которое можно представить как образ отрезка $[\alpha, \beta]$ при каком-либо непрерывном отображении $z = z(t)$.

В дальнейшем нам придется вводить на рассматриваемые пути и кривые дополнительные ограничения. Будем называть путь $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, *жордановым*, если отображение $z(t)$: $[\alpha, \beta] \to \overline{\mathbb{C}}$ непрерывно и взаимно однозначно. Определение замкнутого жорданова пути предоставляется читателю.

Путь $z(t)$: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется *непрерывно дифференцируемым*, если в каждой точке $t \in [\alpha, \beta]$ существует непрерывная производная $z'(t)$ (под производной функции $z(t) = x(t) + iy(t)$ в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$ понимается $x'(t_0) + iy'(t_0)$, а в концах отрезка — такая же комбинация соответствующих односторонних производных). Непрерывно дифференцируемый путь называется *гладким*, если $z'(t) \neq 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$, — это условие вводится для избежания особых точек. Путь называется *кусочно гладким*, если функция $z(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $[\alpha, \beta]$ можно разбить на конечное число (замкнутых) отрезков таких, что сужение $z(t)$ на каждый из этих отрезков определяет гладкий путь. Путь называется *спрямляемым* [1]), если почти всюду на $[\alpha, \beta]$ существует $z'(t)$, абсолютно интегрируемая по Лебегу (т. е. существует

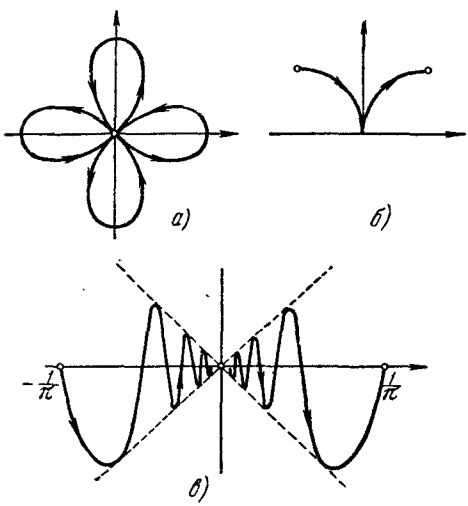


Рис. 3.

$$\int_\alpha^\beta |z'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \tag{2}$$

— *длина* пути). Всякий кусочно гладкий путь спрямляем.

В дальнейшем мы будем также пользоваться общепринятыми терминами для описания гладкости функций (в частности, путей): непрерывную функцию будем называть функцией класса C^0, непрерывно дифференцируемую — функцией класса C^1 и вообще функцию, имеющую в области ее рассмотрения непрерывные производные до n-го порядка включительно, будем называть *функцией класса* C^n.

Пример. Пути γ_1, γ_2 и γ_3 из предыдущего примера жордановы, γ_4 — нет. Окружность $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, — замкнутый жорданов путь (гладкий); четырехлепестковая роза $z = \cos 2t e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (рис. 3, *а*), — замкнутый нежорданов (гладкий); полукубическая парабола $z = t^2(t+i)$, $t \in [-1, 1]$ (рис. 3, *б*), — жорданов (непрерывно дифференцируемый кусочно гладкий).

[1]) Всюду в дальнейшем, говоря о спрямляемых путях, мы будем предполагать, что читатель знаком с соответствующими понятиями теории функций действительного переменного. Читатели, не знающие этих понятий, вполне могут обойтись классом кусочно гладких путей.

Путь $z=t\left(1+i\sin\frac{1}{t}\right)$, $t\in\left[-\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{\pi}\right]$ (рис. 3, *в*) — жорданов неспрямляемый (и, следовательно, не кусочно гладкий).

Такие же ограничения можно ввести и на кривые. *Жорданова кривая* — это класс путей, эквивалентных некоторому жорданову пути (так как замены параметров (1) взаимно однозначны, то из жордановости пути следует жордановость всех эквивалентных ему путей).

Определение гладкой кривой требует некоторых уточнений: мы должны ввести это понятие так, чтобы оно не нарушалось при замене пути, представляющего эту кривую, любым другим эквивалентным ему путем. Так как непрерывная и возрастающая замена параметра (1) может перевести гладкий путь в негладкий, то понятие гладкости не инвариантно по отношению к таким заменам. Поэтому мы должны наложить на преобразование (1) дополнительные условия.

Именно, *гладкой кривой* мы будем называть класс путей, получающихся из некоторого гладкого пути всевозможными заменами параметра (1), где $\tau(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной. Аналогично мы будем поступать при определении *кусочно гладкой* и *спрямляемой кривой*. В первом случае мы потребуем, чтобы допустимые замены параметров были непрерывными и всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, имели непрерывную и положительную производную (а в исключительных точках имели односторонние производные). Во втором случае потребуем, чтобы замены параметров осуществлялись возрастающими абсолютно непрерывными функциями [1]).

Иногда мы будем пользоваться и другой, геометрической трактовкой понятия кривой и тогда понимать под жордановой, гладкой, кусочно гладкой или спрямляемой кривой множества точек $\gamma\subset\mathbb{C}$, которые можно представить как образ отрезка $[\alpha, \beta]$ при отображениях $z=z(t)$, определяющих соответственно жорданов, гладкий и т. д. путь.

4. Области. Определение 1. *Областью* D называется множество точек $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$), обладающее следующими двумя свойствами:

а) для любой точки $a\in D$ существует окрестность этой точки, принадлежащая D (открытость);

[1]) Мы считаем известным, что для спрямляемости пути необходимо и достаточно, чтобы функция $z(t)=x(t)+iy(t)$ имела ограниченное изменение (т. е. $x(t)$ и $y(t)$ были с ограниченным изменением), а также что суперпозиция $z[t(\tau)]$, где $z(t)$ — функция с ограниченным изменением, а $t(\tau)$ — абсолютно непрерывная функция, также является функцией с ограниченным изменением. По этому поводу см. Г. Е. Шилов, цит. на стр. 17.

б) для любых двух точек $a, b \in D$ существует лежащий в D путь с концами a и b (связность).

Точки $\overline{\mathbb{C}}$, не принадлежащие D, но являющиеся предельными для ее точек (т. е. такие, что в любой их окрестности существуют точки, принадлежащие D, и хотя бы одна точка, не принадлежащая D), называются *граничными точками* D. Совокупность всех граничных точек D называется *границей* этой области и обозначается символом ∂D. Объединение области D и ее границы ∂D совпадает с *замыканием* $\overline{D}$. Точки $\overline{\mathbb{C}}$, не принадлежащие D и не являющиеся ее граничными точками (т. е. точки множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ — дополнения к $\overline{D}$), называются *внешними точками*; для каждой из них существует окрестность, не содержащая точек D.

Теорема 1. *Граница ∂D любой области D является замкнутым множеством.*

◀ Пусть ζ_0 — любая предельная точка множества ∂D; надо доказать, что $\zeta_0 \in \partial D$. Возьмем произвольную окрестность U точки ζ_0. В U существует точка $\zeta \in \partial D$, и, следовательно, найдется окрестность V точки ζ, $V \subset U$. В V, а значит и в U, найдутся как точки из D, так и точки, не принадлежащие D. Это означает, что ζ_0 — граничная точка D ▶

В дальнейшем мы будем иногда вводить на границы рассматриваемых областей некоторые дополнительные условия. Чтобы их сформулировать, обобщим введенное выше понятие связности.

Определение 2. Будем говорить, что множество M *связно*, если его нельзя разбить на две непустые части M_1 и M_2 так, что оба пересечения $\overline{M}_1 \cap M_2$ и $M_1 \cap \overline{M}_2$ пусты. В частности, замкнутое множество называется связным, если его нельзя разбить на два непересекающихся замкнутых (и непустых) подмножества. Замкнутое связное множество называют *континуумом*.

Свойство множества, выражаемое условие б) из определения 1 (возможность соединить любые две точки множества путем, лежащим на этом множестве), называют *линейной связностью*. Можно доказать, что любое линейно связное множество является связным, но обратное, вообще говоря, неверно. Однако для случая открытых множеств эти понятия совпадают [1]).

Пусть множество M несвязно. Максимальные связные подмножества M (т. е. не содержащиеся строго ни в каком другом связном подмножестве M) называются *связными компонентами* M. Можно доказать, что любое множество является объ-

[1]) Доказательство см. С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, т. 1, М., 1962, стр. 31.

единением связных компонент (в конечном или бесконечном числе) [1]).

Мы будем называть область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ односвязной, если ее граница ∂D является связным множеством; в противном случае D называется *многосвязной* областью. Если число связных компонент ∂D конечно, то это число называется *порядком связности* области D; если число таких компонент бесконечно, D называется *бесконечно связной* областью.

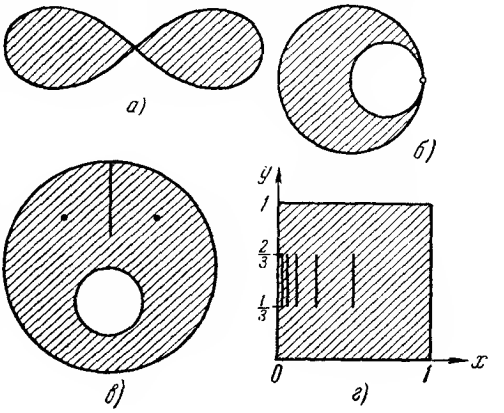


Рис. 4.

Пример. Множество на рис. 4, *а* — внутренность лемнискаты — не является областью, ибо оно несвязно (но замыкание этого множества связно). Множество точек, лежащих между соприкасающимися окружностями (рис. 4, *б*), — односвязная область (ее граница — связное множество). На рис. 4, *в* изображена четырехсвязная область (ее граница состоит из четырех связных компонент: окружности, окружности с отрезком и двух точек). Область на рис. 4, *г* — квадрат $\{0<x<1,\ 0<y<1\}$ с выброшенными отрезками $\left\{x=\frac{1}{2^n},\quad \frac{1}{3}\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}\right\}$, $n=1, 2, \ldots,$ — является бесконечно связной.

Иногда мы будем вводить условия иного рода. Мы будем называть область D *жордановой*, если ее граница ∂D состоит из замкнутых жордановых кривых (в геометрической трактовке этого понятия). Назовем область D *компактной*, если существует круг $\{|z|<R,\ R<\infty\}$, содержащий D. Будем говорить, что множество M *компактно принадлежит* области D, если его замыкание $\overline{M}$ (в топологии $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. с учетом не только конечных, но и бесконечной предельной точки M, если она есть) принадлежит D.

Пример. Прямоугольник $G_1=\left\{|x|<1, |y|<\frac{1}{2}\right\}$ компактно принадлежит полосе $D=\{|y|<1\}$, а вдвое более узкая полоса $G_2=\left\{|y|<\frac{1}{2}\right\}$ принадлежит D, но не компактно.

---

[1]) См. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, М.—Л., 1937, стр. 120.

Компактную принадлежность мы будем записывать символом $\Subset$ (так что $M \Subset D$, если $\bar{M} \subset D$). Компактность области D означает, что $D \Subset \mathbb{C}$.

Далее будет неоднократно использоваться следующая

Теорема 2. *Пусть $M \subset \bar{\mathbb{C}}$ — связное множество и N — его непустое подмножество. Если N является одновременно и замкнутым и открытым в относительной топологии*[1]) *M, то $M=N$.*

◀ Пусть, от противного, множество $N'=M \setminus N$ непусто. Замыкание $\bar{N}$ множества N в топологии $\bar{\mathbb{C}}$, очевидно, состоит из точек его замыкания $(\bar{N})_M$ в топологии M и некоторого множества (быть может, пустого), не принадлежащего M. Поэтому $\bar{N} \cap N' = (\bar{N})_M \cap N'$, а так как N замкнуто в топологии M, то $(N)_M = N$ и, следовательно, $\bar{N} \cap N' = N \cap N'$ пусто.

Но так как N и открыто в топологии M, то его дополнение N' замкнуто в той же топологии (предельные точки N' не могут принадлежать N в силу открытости последнего, следовательно, они принадлежат N'). Поэтому к пересечению $\bar{N}' \cap N$ можно применить то же рассуждение, что и к $\bar{N} \cap N'$, следовательно, $\bar{N}' \cap N$ пусто. Это противоречит определению связности M ▶

§ 2. Функции комплексного переменного

5. Понятие функции. Определение 1. Говорят, что на множестве $M \subset \bar{\mathbb{C}}$ задана *функция* f, если задан закон, по которому каждой точке $z \in M$ ставится в соответствие комплексное число w (конечное или бесконечное); обозначения

$$f\colon\ M \to \bar{\mathbb{C}} \quad \text{или} \quad w=f(z). \tag{1}$$

Согласно этому определению всякая функция однозначна (понятие многозначной функции мы введем в гл. III). Иногда мы будем еще накладывать условие взаимной однозначности. Функция $f\colon M \to \bar{\mathbb{C}}$ называется *взаимно однозначной* или *однолистной*, если она преобразует различные точки $z_1,\ z_2 \in M$ в различные, иными словами, если из равенства $f(z_1)=f(z_2)$ следует равенство $z_1=z_2$ (для $z_1,\ z_2 \in M$).

Задание f равносильно заданию двух действительных функций

$$u=u(z),\quad v=v(z), \tag{2}$$

где $u\colon M \to \mathbb{R}$ и $v\colon M \to \mathbb{R}$ (мы полагаем $z=x+iy$ и $f(z)=u+iv$). Если еще $f \not\equiv 0,\ \not\equiv \infty$[2]), то, полагая $f(z)=\rho e^{i\psi}$, мы

[1]) Относительной топологией множества $M \subset \bar{\mathbb{C}}$ называется топология, в которой окрестностями точек являются пересечения с M окрестностей тех же точек в топологии $\bar{\mathbb{C}}$.

[2]) Так мы будем писать, если $f(z) \neq 0,\ \neq \infty$ для всех $z \in M$.

можем записать эту функцию в виде двух соотношений:

$$\rho=\rho(z), \quad \psi=\psi(z)+2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \ldots) \tag{3}$$

(в точках, где $f=0$, $=\infty$, функция $\rho=0$ или $=\infty$, а ψ не определена).

Мы постоянно будем пользоваться геометрической иллюстрацией понятия функции. Задание (2) наводит на мысль иллюстрировать f в виде двух поверхностей $u=u(x, y)$ и $v=v(x, y)$ в трехмерном пространстве; однако этот способ неудобен, ибо он не иллюстрирует пару (u, v) как комплексное число. Поэтому ограничимся представлением о функции f: $M \to \overline{\mathbb{C}}$ как об *отображении* множества M в сферу $\overline{\mathbb{C}}$.

Чтобы сделать это представление более наглядным, будем рисовать множества, соответствующие друг другу при рассматриваемом отображении. Чаще всего мы будем рисовать координатные линии (декартовой или полярной системы координат) и их образы на плоскостях z и w. Снабдив эти множества числовыми отметками, мы в простых случаях получим достаточно хорошее геометрическое представление о функции.

Пример. Функцию

$$w=z^2 \tag{4}$$

в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$ удобно представить в полярных

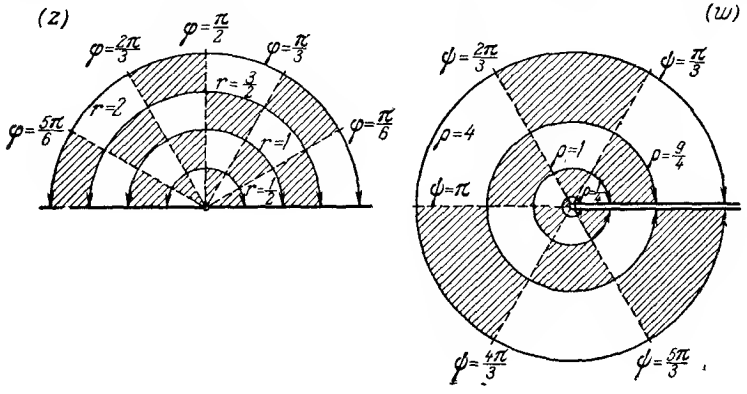


Рис. 5.

координатах. Полагая $z=re^{i\varphi}$ $(0<\varphi<\pi)$ и $w=\rho e^{i\psi}$, мы можем переписать равенство (4) в виде следующих двух:

$$\rho=r^2, \qquad \psi=2\varphi \tag{5}$$

(см. правило умножения комплексных чисел в полярных координатах, п. 1).

Из (5) видно, что полуокружность $\{r=r_0,\ 0<\varphi<\pi\}$ при рассматриваемом отображении переходит в окружность с выколотой точкой $\{\rho=r_0^2,\ 0<\psi<2\pi\}$, а луч $\{0<r<\infty,\ \varphi=\varphi_0\}$ — в луч $\{0<\rho<\infty,\ \psi=2\varphi_0\}$ (рис. 5). Верхняя полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$ переходит в плоскость w с выброшенной положительной полуосью. Удобно представить полуплоскость в виде эластичной пленки, натянутой на две полуоси (положительную и отрицательную, которые шарнирно соединены в начале координат) так, что пленка может свободно скользить по этим полуосям. Тогда преобразование (4) можно интерпретировать как деформацию пленки, происходящую оттого, что полуоси складываются друг с другом.

Отображение (4) можно представить и в декартовых координатах в виде двух равенств:

$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy \tag{6}$$

(полагаем $z=x+iy$ и $w=u+iv$ и в соотношении $w=z^2$ разделяем действительные и мнимые части). Положив в (6) $y=y_0$, получим кривую

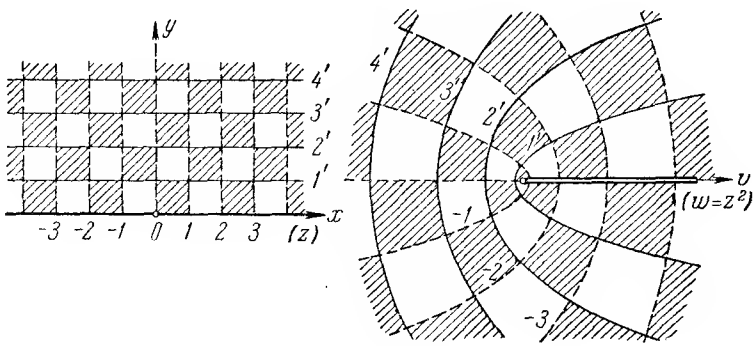


Рис. 6.

$u=x^2-y_0^2$, $v=2xy_0$ $(x\in\mathbb{R})$, соответствующую прямой $y=y_0$, — это парабола $u=\dfrac{v^2}{4y_0^2}-y_0^2$. Лучу $\{x=x_0,\ 0<y<\infty\}$ соответствует дуга параболы

$$u=x_0^2-y^2,\qquad v=2x_0y\ \left(y\in\mathbb{R}_+\right)^{1})$$

(рис. 6).

Замечание. Мы рассматривали отображение (4) в верхней полуплоскости (хотя оно определено всюду в $\mathbb{C}$) потому, что оно однолистно в этой области. Во всей плоскости или в любой области D, которая содержит хотя бы одну пару точек z_0 и $-z_0$ $(z_0\neq 0)$, переходящих в одну точку $w_0=z_0^2$, отображение (4) неоднолистно и описанные геометрические представления не столь наглядны.

---

[1]) Через $\mathbb{R}_+$ обозначается совокупность положительных чисел.

Иногда пользуются другим способом геометрического представления функции: в пространстве (x, y, ρ) рисуют поверхность $\rho = |f(z)|$, которая называется *поверхностью модуля* или *рельефом* функции f. На этой поверхности иногда изображают множества уровня $\operatorname{Arg} f = \text{const}$. В простых случаях эти множества представляют собой линии, и, имея достаточно густую их сетку, можно составить представление о распределении значений

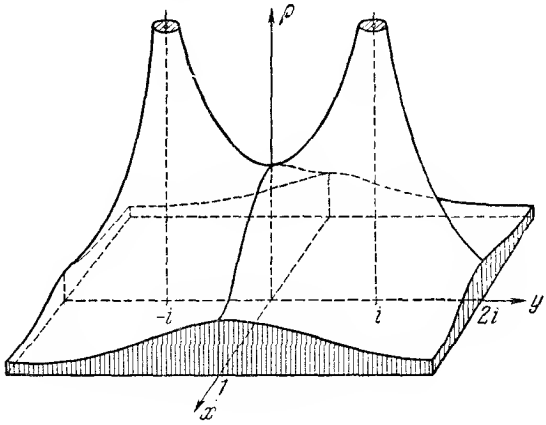


Рис. 7.

функции f в полярных координатах. На рис. 7 изображена поверхность модуля для функции $w = \frac{1}{1+z^2}$.

Перейдем теперь к основному для анализа понятию предела функции.

Определение 2. Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{C}}$; говорят, что число $A \in \overline{\mathbb{C}}$ является ее *пределом* при z, стремящемся к a,

$$\lim_{z \to a} f(z) = A, \tag{7}$$

если для любой окрестности U_A точки A найдется такая проколотая окрестность U'_a, что для всех $z \in U'_a$ значения $f(z)$ принадлежат U_A. Иначе, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенства

$$0 < \rho(z, a) < \delta \tag{8}$$

следует неравенство

$$\rho(f(z), A) < \varepsilon. \tag{9}$$

Если a, $A \neq \infty$, то (8) и (9) можно заменить неравенствами $0 < |z - a| < \delta$ и $|f(z) - A| < \varepsilon$. Если $a = \infty$, $A \neq \infty$, то их можно

переписать в виде $\delta<|z|<\infty$, $|f(z)-A|<\varepsilon$; читатель без труда распишет эти неравенства и в оставшихся случаях $a\neq\infty$, $A=\infty$ и $a=A=\infty$.

Для $A\neq\infty$ мы положим $f=u+iv$, $A=A_1+iA_2$ и легко убедимся в том, что равенство (7) равносильно двум действительным равенствам

$$\lim_{z\to a} u(z)=A_1, \quad \lim_{z\to a} v(z)=A_2. \tag{10}$$

Если предположить еще, что $A\neq 0$, и выбрать надлежащим образом значения $\arg f$ [1]), то (7) можно переписать в полярных координатах:

$$\lim_{z\to a}|f(z)|=|A|, \quad \lim_{z\to a}\arg f(z)=\arg A. \tag{10'}$$

Так как принятое определение предела функции читается в точности так, как такое же определение в действительном анализе, и алгебраические действия над комплексными функциями проводятся по тем же законам, как над действительными, то в комплексный анализ автоматически переносятся элементарные теоремы о пределах функции в точке (о пределе суммы и др.) — мы не останавливаемся на их формулировках и доказательствах.

В некоторых случаях мы будем говорить о пределах функций по множествам. Пусть дано множество M, имеющее a своей предельной точкой, и функция f, множество определения которой содержит M. Мы будем говорить, что f стремится к A при z, стремящемся к a по множеству M, и писать

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in M}} f(z)=A, \tag{11}$$

если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, такое, что для всех $z\in M$, для которых $0<\rho(z,a)<\delta$, справедливо неравенство $\rho(f(z),A)<\varepsilon$.

Определение 3. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $a\in\overline{\mathbb{C}}$; будем называть ее *непрерывной в точке a*, если существует

$$\lim_{z\to a} f(z)=f(a); \tag{12}$$

если $f(a)\neq\infty$, будем говорить о непрерывности в смысле $\mathbb{C}$; если $f(a)=\infty$ — о непрерывности в смысле $\overline{\mathbb{C}}$ (или обобщенной непрерывности).

---

[1]) Здесь и далее символом $\operatorname{arg} w$ обозначается одно из множества $\operatorname{Arg} w$ значений комплексного числа w; тот же символ применяется и для обозначения функции $\arg f(z)$, $z\in M$.

По соображениям, о которых мы только что говорили, в комплексный анализ автоматически переносятся элементарные теоремы о функциях, непрерывных в точке (непрерывность суммы и др.), — непрерывность здесь надо понимать в смысле $\mathbb{C}$.

Можно говорить также о непрерывности в точке a по множеству M, если a является предельной точкой M и предел в левой части (12) понимается как предел по множеству. Функция, непрерывная в каждой точке множества M (по M), называется *непрерывной* на M. В частности, если f непрерывна в каждой точке области D, она называется *непрерывной в области* (в этом случае она непрерывна в каждой точке D в смысле определения 3, ибо каждая точка z входит в D вместе с некоторой окрестностью).

Отметим свойства функций, непрерывных (в смысле $\mathbb{C}$) на замкнутых (в смысле $\overline{\mathbb{C}}$) множествах $K \subset \overline{\mathbb{C}}$.

1. Любая функция f, непрерывная на множестве K, ограничена (т. е. существует постоянная A такая, что $|f(z)| \leqslant A$ для всех $z \in K$).

2. Любая функция f, непрерывная на множестве K, достигает на K своей верхней и нижней грани (т. е. существуют точки z_1, $z_2 \in K$ такие, что $|f(z)| \leqslant |f(z_1)|$, $|f(z)| \geqslant |f(z_2)|$ для всех $z \in K$.

3. Любая функция f, непрерывная на множестве K, равномерно непрерывна (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, коль скоро z_1, $z_2 \in K$ и $\rho(z_1, z_2) < \delta$).

Эти свойства доказываются точно так же, как в действительном анализе, и поэтому на доказательствах мы не останавливаемся.

6. Дифференцируемость. Пусть функция $f = u + iv$ определена и конечна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.

Определение 1. Будем говорить, что f *дифференцируема в точке* z_0 *в смысле действительного анализа* (короче, в смысле $\mathbb{R}^2$), если функции u и v дифференцируемы как функции (x, y) в точке (x_0, y_0): *дифференциалом* f в точке z_0 называется выражение

$$df = du + i\,dv. \tag{1}$$

Если записать du и dv через частные производные (последние существуют в точке z_0), то (1) можно переписать в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy, \tag{2}$$

где $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$ — производные от комплексной функции по действительным переменным. Нам удобно

переписать формулу для дифференциала еще в одном виде. Рассмотрим переменные $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$; их дифференциалами будут $dz=dx+i\,dy$ и $d\bar{z}=dx-i\,dy$. Отсюда мы находим

$$dx=\frac{1}{2}(dz+d\bar{z}),\qquad dy=\frac{1}{2i}(dz-d\bar{z})$$

и, подставляя это в (2), после перегруппировки членов получаем

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}\,dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}, \tag{3}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Замечание. Представление дифференциала df в виде (3) единственно: если $df=A\,dz+B\,d\bar{z}$, то $A=\frac{\partial f}{\partial z}$ и $B=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. В самом деле, подставляя $dz=dx+i\,dy$ и $d\bar{z}=dx-i\,dy$, мы получим, что $df=(A+B)dx+i(A-B)dy$. Отсюда, как и в действительном анализе, найдем $A+B=\frac{\partial f}{\partial x}$, $i(A-B)=\frac{\partial f}{\partial y}$; решая эту систему, получим требуемое: $A=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $B=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Мы вводим основное для всей книги

Определение 2. Функция f называется *дифференцируемой в точке z_0 в смысле комплексного анализа* (короче, в смысле $\mathbb{C}$), если она дифференцируема в z_0 в смысле $\mathbb{R}^2$ и ее дифференциал пропорционален dz, т. е. в точке z_0

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0. \tag{5}$$

Читателю, незнакомому с комплексным анализом, трудно оценить сразу важность этого определения — она выяснится постепенно, по мере ознакомления с предметом. Сейчас мы укажем только, что в отличие от всех предыдущих понятий, которые представляют собой простой перенос соответствующих понятий действительного анализа, дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}$ не сводится к дифференцируемости в смысле $\mathbb{R}^2$. Именно, дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}$ требует не только дифференцируемости в смысле $\mathbb{R}^2$, но и выполнения условия (5), которое мы будем называть *условием (комплексной) дифференцируемости.*

Формулы (4) позволяют переписать это условие в виде двух скалярных равенств:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6}$$

В таком виде условие впервые появилось в работах Ж. Даламбера и Л. Эйлера и позднее (в более четкой форме) — у О. Коши и Б. Римана.

Бóльшая ограничительность условия комплексной дифференцируемости очевидна: в то время как примеры функций непрерывных, но нигде не дифференцируемых в смысле действительного анализа, строятся с некоторым трудом (примеры Вейерштрасса или Пеано), нигде не дифференцируемыми в смысле комплексного анализа оказываются самые «простые» функции. Например, функция

$$f(z) = x + 2iy \tag{7}$$

в смысле $\mathbb{C}$ нигде не дифференцируема! В самом деле, для нее $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2$, и первое из условий (6) нигде не выполняется.

Перейдем теперь к рассмотрению производной функции комплексного переменного. Если f дифференцируема в точке z_0 в смысле $\mathbb{R}^2$, то ее приращение $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Delta \bar{z} + o(\Delta z), \tag{8}$$

где $\Delta z = z - z_0$, $\Delta \bar{z} = \bar{z} - \bar{z}_0$, а $o(\Delta z)$ обозначает малую высшего порядка относительно Δz (т. е. величину, отношение которой к Δz стремится к 0 при $\Delta z \to 0$). Полагая $\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta}$, получаем $\Delta \bar{z} = |\Delta z| e^{-i\theta}$ и из (8) находим

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta} + \eta(\Delta z), \tag{9}$$

где $\eta(\Delta z) = \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$ стремится к нулю при $\Delta z \to 0$.

Отсюда видно, что для существования предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ нужно потребовать, чтобы при стремлении Δz к нулю величина $\theta = \arg \Delta z$ стремилась к некоторому пределу ϑ (рис. 8). Предел $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ при таком стремлении Δz к 0 называется *производной по направлению* ϑ функции f в точке z_0.

Из формулы (9) видно, что эта производная по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial z_\vartheta} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\vartheta}. \tag{10}$$

Таким образом, если в точке z_0 величина $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0$, то производные по направлению в этой точке зависят от направления. Именно, геометрическим местом (годографом) производных по направлению $\frac{\partial f}{\partial z_\vartheta}$ в данной точке является окружность с центром $\frac{\partial f}{\partial z}$ и радиусом $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|$ (см. рис. 8).

Если же f дифференцируема в точке z_0 в смысле $\mathbb{C}$, т. е. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, то эта окружность вырождается в точку $\frac{\partial f}{\partial z}$ и производные по всем направлениям совпадают (они равны $\frac{\partial f}{\partial z}$).

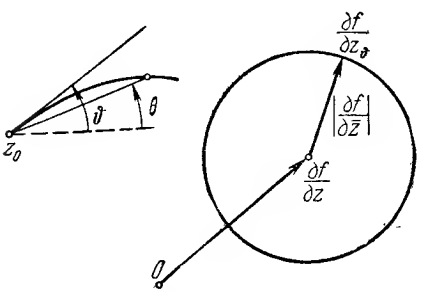


Рис. 8.

Определение 3. *Производной* функции f в точке z_0 называется

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0), \qquad (11)$$

если этот предел существует.

Из сказанного выше можно вывести, что дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}$ равносильна существованию производной. Мы, однако, предпочитаем прямое доказательство.

Теорема. *Для того чтобы функция f, определенная в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, имела в этой точке производную, необходима и достаточна дифференцируемость f в точке z_0 в смысле комплексного анализа.*

◀ Пусть f дифференцируема в точке z_0 в смысле $\mathbb{C}$; тогда она дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ в этой точке. Из формулы (9) имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \eta(\Delta z),$$

где $\eta \to 0$ при $\Delta z \to 0$; отсюда видно, что существует $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Пусть f имеет в точке z_0 производную $f'(z_0)$; тогда для достаточно малых Δz имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) + \eta(\Delta z),$$

где $\eta \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Таким образом, $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$, откуда видно, что f дифференцируема в точке z_0 в смысле $\mathbb{R}^2$ и

что $df=f'(z_0)\,dz$, а это и означает дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}$ в точке z_0 ▶

Так как производная $f'(z)$, если она существует, не зависит от направления, то ее можно вычислять, например, в направлении оси x; мы получим

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{12}$$

Определение производной функции комплексного переменного совпадает с таким же определением из действительного анализа, арифметические действия и теоремы о пределах в комплексном анализе такие же, как и в действительном. Поэтому в комплексный анализ без всяких изменений переносятся элементарные правила дифференцирования (дифференцирование суммы, произведения, частного, сложной и обратной функции); мы не останавливаемся на их формулировках и доказательствах.

В заключение мы должны уточнить сказанное выше о понятии комплексной дифференцируемости. Строго говоря, дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}$ в одной точке z_0 еще не влечет за собой тех последствий, которые мы имели в виду, говоря о важности этого понятия, — для этого нужно требовать дифференцируемости в окрестности точки z_0. Поэтому мы принимаем следующее

Определение 4. Функция f называется *голоморфной* (или *аналитической*) *в точке* $z_0\in\mathbb{C}$, если она дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в некоторой окрестности этой точки.

Пример. Функция

$$f(z)=|z|^2=z\bar{z}, \tag{13}$$

очевидно, дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ во всей плоскости $\mathbb{C}$. Однако $\frac{\partial f}{\partial z}=z$ равна 0 лишь при $z=0$, поэтому в смысле $\mathbb{C}$ она дифференцируема лишь в точке $z=0$. Таким образом, функция (13) дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в точке $z=0$, но не голоморфна в этой точке.

Мы будем называть функцию f *голоморфной на открытом множестве* $\Omega\subset\mathbb{C}$, если она голоморфна в каждой точке этого множества (для таких множеств, следовательно, понятия голоморфности и комплексной дифференцируемости совпадают).

Будем говорить, что функция f *голоморфна на произвольном множестве* $M\subset\mathbb{C}$, если ее можно продолжить на некоторое открытое множество $\Omega\supset M$ до голоморфной на Ω функции. В частности, голоморфность f в замкнутой области $\bar{G}$ означает возможность ее продолжения до функции, голоморфной в более широкой области $D\supset\supset G$.

Наконец, под *голоморфностью функции f в бесконечной точке* понимается голоморфность функции $\varphi(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ в точке $z=0$. Это определение позволяет рассматривать функции, голоморфные на множествах замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Очевидно, сумма и произведение функций, голоморфных в области D, также голоморфны в этой области. Поэтому совокупность всех функций, голоморфных в области D, образует *кольцо*, которое мы будем обозначать символом $H(D)$.

7. Геометрическая и гидродинамическая интерпретация. Начнем с выяснения геометрического смысла комплексной дифференцируемости. Если функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ в точке $z_0\in\mathbb{C}$, то в окрестности этой точки отображение $w=f(z)$ можно приблизить с точностью до малых высшего порядка относительно $z-z_0$ аффинным отображением

$$\begin{aligned} u-u_0&=\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0),\\ v-v_0&=\frac{\partial v}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(y-y_0), \end{aligned} \tag{1}$$

которое можно записать в комплексной форме [1]):

$$w-w_0=\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0)+\frac{\partial f}{\partial \bar z}(\bar z-\bar z_0) \tag{2}$$

(производные в (1) и (2) берутся в точке z_0). Это отображение мы будем называть *касательным* к отображению f в точке z_0.

Якобиан отображения f в рассматриваемой точке выражается через комплексные производные:

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2 \tag{3}$$

(для доказательства проще всего подставить в правую часть (3) выражения $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ из формул (4) предыдущего пункта). Если $J\neq 0$, то касательное отображение (2) не вырождено. Это отображение преобразует параллельные прямые в параллельные, но, вообще говоря, не сохраняет углы, так что квадраты переходят в параллелограммы; окружности оно преобразует в эллипсы.

---

[1]) Для получения (2) достаточно сложить первое уравнение (1) со вторым, умноженным на i, и затем положить $x-x_0=\frac{1}{2}[(z-z_0)+(\bar z-\bar z_0)]$, $y-y_0=\frac{1}{2i}[(z-z_0)-(\bar z-\bar z_0)]$. Заметьте, что это преобразование в точности повторяет преобразование дифференциала в предыдущем пункте.

Предположим теперь, что функция f в точке z_0 дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$. Тогда в этой точке $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, существует производная $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$ и касательное отображение (2) принимает вид

$$w - w_0 = f'(z_0)(z - z_0). \tag{4}$$

Если $f'(z_0) \neq 0$, то это отображение сводится к растяжению вектора $z - z_0$ в $|f'(z_0)|$ раз и к повороту его на угол $\arg f'(z_0)$ (см. правило умножения комплексных чисел в п. 1). Оно сохраняет ориентацию [1]) и обладает еще следующими свойствами: (α) сохраняет углы, (β) квадраты преобразует в квадраты, (γ) окружности преобразует в окружности. Легко видеть, что каждое из свойств (α), (β), (γ) влечет за собой остальные два.

Определение. Дифференцируемое в смысле $\mathbb{R}^2$ в точке z_0 отображение f называется *конформным* в этой точке, если касательное к f в точке z_0 отображение сохраняет ориентацию и обладает одним из свойств (α) — (γ). Отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ *конформно в области* D, если оно взаимно однозначно и конформно в каждой точке $z \in D$.

Мы доказали, что если функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение f конформно в этой точке.

Обратно, пусть отображение f конформно в точке z_0. Возьмем два вектора: $z - z_0 = 1$ и $z - z_0 = i$, касательное отображение (2) преобразует их соответственно в векторы $\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) i$. В силу конформности отображения f второй из них получается из первого поворотом на прямой угол против часовой стрелки, т. е.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) i = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) i.$$

Отсюда следует, что в точке z_0 мы имеем $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, т. е. существует $f'(z_0)$, а так как касательное к конформному отображению не вырождено, то $f'(z_0) \neq 0$.

Таким образом, *комплексная дифференцируемость функции f в точке z_0 вместе с условием $f'(z_0) \neq 0$ геометрически означает конформность отображения f в этой точке.*

---

[1]) Говорят, что аффинное отображение l сохраняет ориентацию, если оно преобразует любой треугольник $z_1 z_2 z_3$, вершины которого обходятся против движения часовой стрелки, в треугольник $l(z_1) l(z_2) l(z_3)$ с тем же порядком обхода вершин.

Замечание. Если отображение g дифференцируемо в смысле $\mathbb{R}^2$ в точке z_0, а отображение, касательное к нему в этой точке, обладает одним из свойств (α) — (γ), но меняет ориентацию на противоположную, то оно называется конформным отображением *второго рода* или *антиконформным* в этой точке. Легко видеть, что таким свойством будет обладать отображение $w=\overline{f(z)}$, сопряженное к отображению, дифференцируемому в смысле $\mathbb{C}$ в точке z_0, если $f'(z_0)\neq 0$.

Функцию $w=\overline{f(z)}$, сопряженную к голоморфной в некоторой точке z_0 функции f, мы будем называть *антиголоморфной* в этой точке. Очевидно, условие антиголоморфности функции g в точке z_0 состоит в том, что g дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ в некоторой окрестности z_0 и что в этой окрестности выполняется соотношение

$$\frac{\partial g}{\partial z}=0. \tag{5}$$

Мы видели, что модуль производной $f'(z_0)$ геометрически означает коэффициент растяжения, а ее аргумент — угол поворота отображения, касательного к f в точке z_0. Приведем теперь геометрическую иллюстрацию производной в терминах самого отображения f (а не касательного к нему). Для этого предположим, что производная f' существует и непрерывна [1]) в окрестности U точки z_0.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемый путь γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, с началом в точке z_0 (см. п. 3) такой, что $z(t)\in U$ для всех $t\in[\alpha, \beta]$. Отображение f переводит его в путь γ^*: $w=f[z(t)]$, $t\in[\alpha, \beta]$, также непрерывно дифференцируемый, ибо по правилу дифференцирования сложных функций

$$w'(t)=f'[z(t)]\cdot z'(t) \tag{6}$$

существует и непрерывна для всех $t\in[\alpha, \beta]$. Обозначим $\Delta z=z(t)-z_0$ и $\Delta w=f[z(t)]-f(z_0)$; так как существует производная $f'(z_0)$, то существует и

$$\lim_{t\to\alpha}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=|f'(z_0)|.$$

Но так как пути γ и γ^* спрямляемы, то $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ при $t\to\alpha$ представляют собой бесконечно малые, эквивалентные соответственно длинам Δs и Δs^* дуг γ и γ^*, которые отвечают отрезку $[\alpha, t]$. Поэтому последнее соотношение можно переписать в виде

$$|f'(z_0)|=\lim_{t\to\alpha}\frac{\Delta s^*}{\Delta s}. \tag{7}$$

[1]) Как мы увидим в дальнейшем, наши требования не независимы: из существования f' в некоторой окрестности точки z_0 следует ее непрерывность в этой окрестности.

Таким образом, $|f'(z_0)|$ *геометрически означает коэффициент растяжения длин в точке* z_0 *при отображении* f. Как видно из (7), этот коэффициент не зависит от выбора пути с началом в точке z_0. Иными словами, все пути с началом z_0 растягиваются в этой точке одинаково, т. е. *бесконечно малая окружность с центром в* z_0 *переходит в кривую, отличающуюся от окружности с центром в* $w_0=f(z_0)$ *на малые высших порядков* (круговое свойство, см. рис. 9).

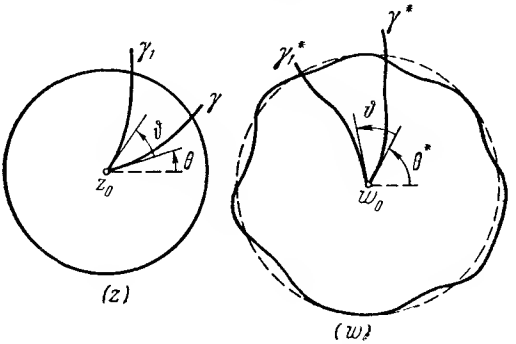


Рис. 9.

Предположим теперь еще, что $f'(z_0)\neq 0$, будем считать $f'\neq 0$ и всюду в U, а в качестве γ возьмем гладкий путь (т. е. будем считать $z'(t)\neq 0$ для $t\in[\alpha,\beta]$); из (6) видно, что и соответствующий путь γ^* также будет гладким. Тогда углы наклона к действительным осям хорд Δz и Δw при $t\to\alpha$ будут стремиться соответственно к углам θ и θ^* наклона касательных к γ и γ^* в точках z_0 и w_0, т. е. при надлежащем выборе значений аргументов существуют

$$\lim_{t\to\alpha}\arg\Delta z=\theta,\qquad \lim_{t\to\alpha}\arg\Delta w=\theta^*.$$

Положим $\arg\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\arg\Delta w-\arg\Delta z$, тогда существует

$$\lim_{t\to\alpha}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg f'(z_0)=\theta^*-\theta. \tag{8}$$

Таким образом, $\arg f'(z_0)$ *геометрически означает угол поворота пути в точке* z_0 *при отображении* f. Из (8) видно, что этот угол не зависит от выбора пути γ с началом в точке z_0, все пути с началом z_0 поворачиваются на одинаковый угол, т. е. угол между любыми двумя путями γ и γ_1 с началом z_0 сохраняется при отображении (свойство сохранения углов, см. рис. 9).

Выясним теперь гидродинамический смысл комплексной дифференцируемости и производной. Рассмотрим *установившееся плоскопараллельное течение жидкости*. Это означает, что векторы скорости $\boldsymbol{V}$ этого течения не зависят от времени и одинаковы во всех точках каждого перпендикуляра к некоторой плоскости, которую мы примем за плоскость комплексного переменного $z=x+iy$ (рис. 10). Таким образом, наше поле полностью описывается плоским векторным полем

$$\boldsymbol{V}=V_1(x,\ y)+iV_2(x,\ y). \tag{9}$$

Предположим, что в окрестности U некоторой точки z_0 функции V_1 и V_2 обладают непрерывными частными производными. Кроме того, будем считать, что в этой окрестности поле (9) *потенциально*, т. е.

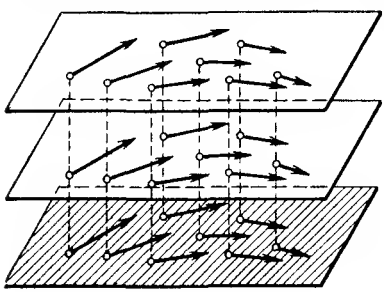


Рис. 10.

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{V}=\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}=0\ ^1), \tag{10}$$

и *соленоидально*, т. е.

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V}=\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}=0 \tag{11}$$

(равенства (10) и (11) справедливы для всех точек U).

Из условия потенциальности (10) следует, что в окрестности U дифференциальная форма V_1dx+V_2dy является точным дифференциалом некоторой функции φ, которая называется *потенциальной функцией* поля. Таким образом, в U имеем

$$V_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad V_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{12}$$

или, в векторной записи, $\boldsymbol{V}=\operatorname{grad}\varphi$.

Из условия соленоидальности (11) следует, что и форма $-V_2dx+V_1dy$ является точным дифференциалом некоторой функции ψ, так что в U имеем

$$-V_2=\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad V_1=\frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{13}$$

На линии уровня функции ψ имеем $d\psi=-V_2\,dx+V_1\,dy=0$, т. е. $\frac{dy}{dx}=\frac{V_2}{V_1}$, откуда видно, что эта линия является векторной ли-

[1]) Для плоского векторного поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ можно считать скаляром, ср. сноску на стр. 13.

нией поля V, т. е. линией тока (траекторией частиц жидкости). Поэтому ψ называется *функцией тока.*

Построим теперь комплексную функцию

$$f=\varphi+i\psi, \tag{14}$$

которая называется *комплексным потенциалом* поля. Сравнивая соотношения (12) и (13), мы видим, что в U выполняются условия

$$V_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad V_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{15}$$

Они совпадают с условиями комплексной дифференцируемости (6) из п. 6 и, следовательно, показывают, что комплексный потенциал f является функцией, голоморфной в точке z_0.

В векторном анализе доказывается, что и обратно, любую голоморфную в точке z_0 функцию $f=\varphi+i\psi$ можно рассматривать как комплексный потенциал векторного поля $V=\operatorname{grad}\varphi$, потенциального и соленоидального в окрестности z_0, которое можно трактовать как поле скоростей некоторого течения жидкости.

Таким образом, *голоморфность функции f означает, что эту функцию можно трактовать как комплексный потенциал плоскопараллельного установившегося течения жидкости, потенциального и соленоидального.*

Нетрудно выяснить и гидродинамический смысл производной: имеем

$$f'=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}=V_1-iV_2, \tag{16}$$

т. е. *производная комплексного потенциала представляет собой вектор, комплексно сопряженный вектору скорости течения.*

Пример. Найдем комплексный потенциал бесконечно глубокого течения над плоским дном, обтекающего препятствие высотой h, перпендикулярное к дну. Это плоскопараллельное течение описывается течением в верхней полуплоскости, обтекающим отрезок длины h, который без ограничения общности можно считать лежащим на мнимой оси.

Течение, таким образом, рассматривается в области D, граница ∂D которой состоит из действительной оси и отрезка $[0, ih]$ мнимой оси (рис. 11). Эта граница должна быть линией тока; мы примем ее за линию $\psi=0$ и будем считать, что всюду в D функция $\psi>0$. Для отыскания комплексного потенциала $\varphi+i\psi$ достаточно, следовательно, найти конформное отображение D на верхнюю полуплоскость $\{\psi>0\}$.

Одну из функций, реализующих такое отображение, можно получить следующим образом. Отображение $z_1=z^2$ переводит D в плоскость с вырезанным лучом $\operatorname{Re} z_1\geqslant -h^2$, $\operatorname{Im} z_1=0$ (см. пример в п. 5). Отображение $z_2=z_1+h^2$ сдвигает этот луч в положительную полуось $\operatorname{Re} z_2\geqslant 0$, $\operatorname{Im} z_2=0$. Если мы возьмем теперь отображение, обратное к возведению в квадрат:

$$w=\sqrt{z_2}=\sqrt{|z_2|}\,e^{i\frac{\arg z_2}{2}},$$

которое однозначно определено условием $0<\arg z_2<2\pi$, то в качестве образа плоскости z_2 с вырезанной положительной полуосью мы получим верхнюю

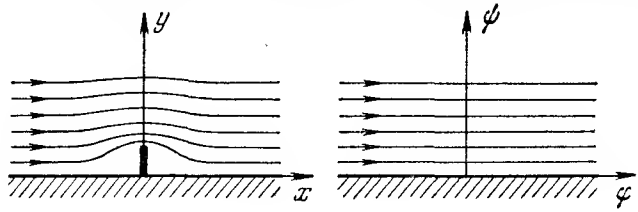


Рис. 11.

полуплоскость. Остается взять композицию рассмотренных отображений

$$w=\sqrt{z^2+h^2}, \tag{17}$$

и мы получим искомое отображение.

Уравнение линий тока при этом течении мы получим, отделяя действительные и мнимые части в соотношении $(\varphi+i\psi)^2=(x+iy)^2+h^2$; для линии $\psi=\psi_0$ будем иметь

$$y=\psi_0\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2+\psi_0^2}} \tag{18}$$

(соответствие линий тока изображено на рис. 11). Скорость рассматриваемого течения

$$v=\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{|z|}{\sqrt{|z^2+h^2|}},$$

в бесконечности она равна 1. Можно доказать, что общий вид решений рассматриваемой задачи

$$f(z)=v_\infty\sqrt{z^2+h^2}, \tag{19}$$

где $v_\infty>0$ — скорость течения в бесконечности. Подробнее о применении конформных отображений в гидродинамике см., например, книгу М. А. Лаврентьева и автора [1]).

§ 3. Элементарные функции

Здесь мы рассмотрим некоторые простейшие классы голоморфных функций комплексного переменного.

8. Дробно-линейные функции определяются соотношением

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc\neq 0, \tag{1}$$

где $a, \ldots, d$ — фиксированные комплексные числа, а z — комплексное переменное; условие $ad-bc\neq 0$ накладывается для

[1]) М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», М., 1965.

того, чтобы исключить случай вырождения в постоянную (при $ad-bc=0$ числитель (1) пропорционален знаменателю). При $c=0$ непременно $d\neq 0$ и функция (1) принимает вид

$$w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=Az+B,$$

т. е. обращается в *линейную функцию.*

Функция (1) определена для всех $z\neq -\frac{d}{c}, \infty$ (если $c\neq 0$; при $c=0$ она определена для всех конечных z). Мы определим ее в этих исключительных точках, положив $w=\infty$ при $z=-\frac{d}{c}$ и $w=\frac{a}{c}$ при $z=\infty$ (в случае $c=0$ достаточно положить $w=\infty$ при $z=\infty$). Теперь справедлива

Теорема 1. *Дробно-линейная функция* (1) *осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение* $\overline{\mathbb{C}}$ *на* $\overline{\mathbb{C}}$.

◀ Предполагаем, что $c\neq 0$, — упрощения в случае $c=0$ очевидны. Функция (1) определена (однозначно) всюду в $\overline{\mathbb{C}}$; решая уравнение (1) относительно z:

$$z=\frac{dw-b}{a-cw}, \tag{2}$$

мы видим, что каждому $w\neq\frac{a}{c},\infty$ соответствует определенное z, а в силу принятого выше условия точке $w=\frac{a}{c}$ отвечает $z=\infty$ и $w=\infty$ — точка $z=-\frac{d}{c}$. Следовательно, (1) взаимно однозначно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, остается доказать непрерывность. Но при $z\neq -\frac{d}{c}, \infty$ непрерывность функции (1) очевидна; непрерывность в этих точках следует из того, что

$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}}\frac{az+b}{cz+d}=\infty, \qquad \lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}\ \blacktriangleright$$

Мы хотим теперь доказать, что отображение (1) сохраняет углы во всех точках $\overline{\mathbb{C}}$. Для $z\neq -\frac{d}{c}, \infty$ это следует из того, что в этих точках существует производная

$$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$$

(см. п. 7). Чтобы установить то же свойство для исключительных точек (из которых обе связаны с бесконечностью: одна

сама бесконечна, а у другой образ бесконечен), надо ввести понятие угла в бесконечной точке.

Определение. Под *углом в точке* $z=\infty$ между двумя путями γ_1 и γ_2 (проходящими через ∞ и такими, что их сферические изображения имеют касательную в северном полюсе) понимается угол между образами Γ_1 и Γ_2 этих путей при отображении

$$z \to \frac{1}{z} = Z \tag{3}$$

в точке $Z=0$.

Для тех читателей, которые не удовлетворены этим формальным определением, мы сообщим геометрические соображения, приводящие к нему. Прежде всего докажем, что стереографическая проекция $\mathbb{C} \to S \setminus N$ представляет собой конформное отображение [1]).

Рассмотрим в плоскости $\mathbb{C}$ гладкий путь γ: $z=x(t)+iy(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, и по формулам (14) п. 1 найдем путь на S, соответствующий ему при стереографической проекции:

$$\gamma^*: \quad \xi = \frac{x(t)}{1+|z(t)|^2}, \quad \eta = \frac{y(t)}{1+|z(t)|^2}, \quad \zeta = \frac{|z(t)|^2}{1+|z(t)|^2}; \quad t\in[\alpha, \beta]. \tag{4}$$

Путь γ^*, очевидно, также гладкий, и для квадрата элемента его длины $d\sigma$ из (4) получаем

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{dx^2+dy^2}{(1+|z|^2)^2}, \tag{5}$$

или

$$d\sigma = \frac{|dz|}{1+|z|^2}, \tag{6}$$

где $|dz| = \sqrt{dx^2+dy^2}$ — соответствующий элемент длины γ (ср. с формулой (17) из п. 1).

Переменные x и y можно принять за координаты на сфере с выколотым северным полюсом $S \setminus N$; тогда (5) будет служить первой квадратичной формой на этой поверхности. При этом в стандартных обозначениях (в которых $d\sigma^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2$) мы будем иметь

$$E = G = \frac{1}{(1+|z|^2)^2}, \qquad F = 0, \tag{7}$$

откуда и следует конформность стереографической проекции [2]).

---

[1]) Под конформностью здесь понимается свойство сохранения углов.

[2]) В самом деле, угол α между гладкими путями $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{C}$ определяется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{1}{|dz_1|\,|dz_2|}(dx_1\,dx_2 + dy_1\,dy_2),$$

а угол между их образами на S — по известной из геометрии формуле

$$\cos\alpha^* = \frac{1}{d\sigma_1\,d\sigma_2}\{E\,dx_1\,dx_2 + F(dx_1\,dy_2 + dy_1\,dx_2) + G\,dy_1\,dy_2\};$$

из формул (7) и (6) видно, что в нашем случае $\cos\alpha^* = \cos\alpha$, т. е. $\alpha^* = \alpha$.

Учитывая доказанное, определим угол между путями γ_1, $\gamma_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ в точке $z=\infty$ как угол между сферическими образами γ_1^*, γ_2^* этих путей в северном полюсе N (предполагается, что γ_1^* и γ_2^* имеют в точке N касательные). Этому определению можно придать более удобную форму.

Для этого заметим, что преобразованию (3) соответствует вращение сферы. (В самом деле, как видно из формулы (17) п. 1, при этом преобразовании сохраняются сферические расстояния:

$$\rho(Z_1, Z_2) = \rho(z_1, z_2),$$

а точки S, соответствующие $z=\pm 1$, — они диаметрально противоположны — остаются неподвижными.) Поэтому угол в точке N между путями γ_1^* и γ_2^* равен углу в точке O между путями Γ_1^* и Γ_2^*, в которые переходят γ_1^* и γ_2^* при этом вращении. Но в силу конформности стереографической проекции этот угол равен углу в точке $Z=0$ между путями Γ_1 и Γ_2, в которые переходят γ_1 и γ_2 при отображении (3). Таким образом, мы приходим к принятому выше определению.

Теорема 2. *Дробно-линейное отображение* (1) *конформно* [1]) *во всех точках* $\overline{\mathbb{C}}$.

◀ Для неисключительных точек теорема уже доказана. Пусть γ_1 и γ_2 — два пути, проходящие через точку $z=-\frac{d}{c}$ и пересекающиеся в этой точке под углом α (предполагается, что пути имеют касательные в этой точке). Угол между их образами γ_1^* и γ_2^* при отображении (1) в точке $w=\infty$, соответствующей $z=-\frac{d}{c}$, по определению равен углу между образами Γ_1^* и Γ_2^* путей γ_1^* и γ_2^* при отображении $W=\frac{1}{w}$ в точке $W=0$. Но

$$W=\frac{cz+d}{az+b},$$

и, следовательно, Γ_1^* и Γ_2^* можно рассматривать как образы γ_1 и γ_2 при этом отображении. Так как производная

$$\frac{dW}{dz}=\frac{bc-ad}{(az+b)^2}$$

в точке $z=-\frac{d}{c}$ существует и отлична от нуля, то угол между Γ_1^* и Γ_2^* в точке $W=0$ равен α. Для точки $z=-\frac{d}{c}$ теорема доказана. Чтобы доказать ее для точки $z=\infty$, достаточно применить то же рассуждение к функции (2), обратной к (1) ▶

[1]) Под конформностью в бесконечной точке понимается свойство сохранения углов.

Мы хотим теперь доказать, что совокупность дробно-линейных отображений — мы обозначим эту совокупность через Λ — можно рассматривать как группу. Пусть даны два дробно-линейных отображения:

$$L_1\colon\ z \to \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0,$$

$$L_2\colon\ z \to \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}, \qquad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0;$$

их *произведением* мы назовем композицию отображений L_1 и L_2, т. е. отображение

$$L\colon\ z \to L_1 \circ L_2(z).$$

Отображение L, очевидно, дробно-линейно,

$$L\colon\ w = \frac{az + b}{cz + d}$$

(ибо подстановка в выражение L_1 вместо z дробно-линейной функции снова приводит к дробно-линейной функции), и притом $ad - bc \neq 0$ [1]) (ибо L преобразует $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, а не вырождается в постоянную).

Проверим выполнение групповых аксиом.

а) Ассоциативность: для любых трех отображений $L_1, L_2, L_3 \in \Lambda$ имеем

$$L_1 \circ (L_2 \circ L_3) = (L_1 \circ L_2) \circ L_3. \tag{8}$$

В самом деле, обе части (8) представляют собой дробно-линейное отображение $L_1\{L_2[L_3(z)]\}$. ▶

б) Существование единицы. Единицей, очевидно, служит тождественное отображение

$$E\colon\ z \to z. \tag{9}$$

в) Существование обратного элемента: для любого $L \in \Lambda$ существует отображение $L^{-1} \in \Lambda$ такое, что

$$L^{-1} \circ L = L \circ L^{-1} = E. \tag{10}$$

В самом деле, обратным элементом для отображения (1) служит обратное к нему отображение (2).

Доказана

Теорема 3. *Совокупность Λ всех дробно-линейных отображений образует группу, если в качестве групповой операции рассматривать композицию отображений.*

---

[1]) В этом можно убедиться и аналитически, если заметить, что

$$ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2).$$

Замечание. Группа Λ не коммутативна: пусть, например, L_1: $z \to z+1$, L_2: $z \to \frac{1}{z}$; тогда $L_1 \circ L_2$: $z \to \frac{1}{z}+1$, а $L_2 \circ L_1$: $z \to \frac{1}{z+1}$.

9. Геометрические свойства. Приведем два элементарно-геометрических свойства дробно-линейных отображений. Для формулировки первого из них условимся называть *окружностью на* $\overline{\mathbb{C}}$ любую окружность или прямую на комплексной плоскости (при стереографической проекции и тем и другим соответствуют окружности на сфере Римана); окружности в собственном смысле будем называть окружностями на $\mathbb{C}$. Имеет место

Теорема 1. *Произвольное дробно-линейное отображение преобразует любую окружность на* $\overline{\mathbb{C}}$ *тоже в окружность на* $\overline{\mathbb{C}}$ (круговое свойство дробно-линейных отображений).

◀ Для случая линейных отображений ($c=0$) утверждение очевидно, ибо такие отображения сводятся к растяжению с поворотом и сдвигу. Если $c \neq 0$, то отображение можно переписать в виде

$$L\colon \quad z \to \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = A + \frac{B}{z+C} \tag{1}$$

и, следовательно, представить как композицию трех отображений:

$$L_1\colon \quad z \to A + Bz, \qquad L_2\colon \quad z \to \frac{1}{z}, \qquad L_3\colon \quad z \to z + C$$

($L = L_1 \circ L_2 \circ L_3$). Отображения L_1 (растяжение с поворотом и сдвиг) и L_3 (сдвиг), очевидно, сохраняют окружности на $\overline{\mathbb{C}}$. Остается доказать это свойство для отображения

$$L_2\colon \quad z \to \frac{1}{z}. \tag{2}$$

Для доказательства заметим, что любую окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ можно записать уравнением

$$E(x^2+y^2) + F_1 x + F_2 y + G = 0, \tag{3}$$

где, быть может, $E=0$, и обратно, любое такое уравнение изображает окружность на $\overline{\mathbb{C}}$, быть может, вырождающуюся в точку или пустое множество[1]). Переходя к комплексным

[1]) Мы исключаем случай $E=F_1=F_2=G=0$.

переменным $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$, т. е. полагая в (3) $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, мы переписываем это уравнение в виде

$$Ez\bar{z}+Fz+\overline{F}\bar{z}+G=0, \tag{4}$$

где положено $F=\frac{1}{2}(F_1-iF_2)$, $\overline{F}=\frac{1}{2}(F_1+iF_2)$.

Чтобы получить уравнение образа окружности (4) при отображении (2), достаточно положить в (4) $z=\frac{1}{w}$; мы получим

$$E+F\overline{w}+\overline{F}w+Gw\overline{w}=0, \tag{5}$$

т. е. уравнение того же вида, что и (4). Случаи вырождения в точку или пустое множество исключены свойством взаимной однозначности дробно-линейных отображений; следовательно, рассматриваемый образ является окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$ ▶

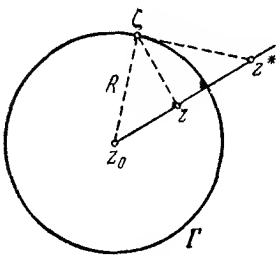


Рис. 12.

Мы видели выше, что произвольная голоморфная функция f, $f'(z_0)\neq 0$, с точностью до малых высшего порядка, преобразует бесконечно малые окружности с центром в точке z_0 в окружности с центром $f(z_0)$. Теорема 1 утверждает, что дробно-линейные функции точно преобразуют любые окружности на $\overline{\mathbb{C}}$ в окружности. Легко, однако, видеть на самых простых примерах, что центр окружности, вообще говоря, не переходит в центр.

Для формулировки второго геометрического свойства дробно-линейных отображений введем

Определение. Точки z и z^* будем называть *симметричными* относительно окружности Γ на $\mathbb{C}$, если они лежат на одном луче с вершиной в центре Γ так, что произведение их расстояний до центра равно квадрату радиуса Γ.

Имеем $\arg(z^*-z_0)=\arg(z-z_0)$ и $|z^*-z_0|\,|z-z_0|=R^2$ (z_0 — центр, R — радиус Γ), и, следовательно, симметричные относительно Γ точки связаны соотношением

$$z^*-z_0=\frac{R^2}{\overline{z-z_0}}. \tag{6}$$

Из рис. 12 ясен способ построения симметричных точек: если z лежит внутри Γ, то достаточно из z провести перпендикуляр к лучу z_0z до пересечения с Γ в точке ζ, а из ζ — касательную к Γ до пересечения с лучом в точке z^*; если z лежит

вне Γ, построение производится в обратном порядке (доказательство следует из подобия прямоугольных треугольников $z_0z\zeta$ и $z_0\zeta z^*$).

Легко устанавливается также следующее свойство, характеризующее симметричные точки:

(*) *Для того чтобы точки z и z^* были симметричными относительно окружности* Γ, *необходимо и достаточно, чтобы любая окружность* γ *на* $\overline{\mathbb{C}}$, *через них проходящая, была ортогональной* Γ.

В самом деле, если z и z^* симметричны относительно Γ, а γ — любая окружность, через них проходящая, то квадрат длины касательной к γ из точки z_0 по известной элементарно-геометрической теореме равен произведению секущей $|z_0 - z^*|$ на ее внешнюю часть $|z_0 - z|$ (рис. 13), т. е. равен R^2; таким образом, касательная к γ из z_0 является радиусом Γ, и эти окружности ортогональны (если γ — прямая, то она проходит через z_0 и, следовательно, ортогональна к Γ). Обратно, если любая окружность γ на $\overline{\mathbb{C}}$, проходящая через z и z^*, ортогональна к Γ (и, в частности, прямая zz^*), то, во-первых, точки z и z^* лежат на одном луче с вершиной z_0 и, во-вторых, произведение их расстояний до z_0 (по той же элементарно-геометрической теореме) равно R^2; следовательно, z и z^* симметричны относительно Γ.

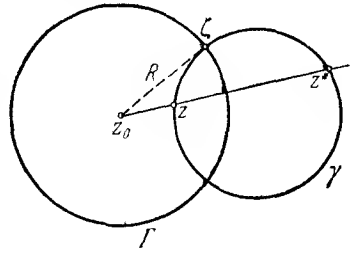


Рис. 13.

Свойство (*) позволяет переформулировать определение симметричных точек так, чтобы его можно было применять к окружностям на $\overline{\mathbb{C}}$: точки z и z^* называются *симметричными* относительно окружности Γ на $\overline{\mathbb{C}}$, если любая окружность γ, через них проходящая, ортогональна к Γ. Очевидно, что в случае, когда Γ представляет собой прямую, это определение совпадает с обычным.

Отображение $z \to z^*$, переводящее каждую точку $z \in \overline{\mathbb{C}}$ в точку z^*, симметричную с z относительно Γ, называется *симметрией* относительно этой окружности или *инверсией*.

Инверсия относительно окружности на $\overline{\mathbb{C}}$, как видно из (6), осуществляется функцией, сопряженной к дробно-линейной функции. На основании теоремы 2 предыдущего пункта отсюда следует, что *инверсия является антиконформным отображением всюду в* $\overline{\mathbb{C}}$.

(Для случая инверсии относительно прямой это утверждение очевидно: сдвигом и поворотом переведем эту прямую в действительную ось, а тогда инверсия сведется к отображению $z \to \bar{z}$.)

Теперь желаемое свойство дробно-линейных отображений получается совсем просто:

Теорема 2. *Произвольное дробно-линейное отображение L преобразует любые точки z и z^*, симметричные относительно какой-либо окружности Γ на $\overline{\mathbb{C}}$, в точки w и w^*, симметричные относительно образа $L(\Gamma)$ этой окружности* (свойство сохранения симметричных точек).

◀ Рассмотрим семейство $\{\gamma\}$ всех окружностей на $\overline{\mathbb{C}}$, проходящих через точки z и z^*; эти окружности ортогональны к Γ. По теореме 1 окружности γ преобразуются также в окружности $L(\gamma)$ на $\overline{\mathbb{C}}$, причем в силу конформности L все окружности $L(\gamma)$ ортогональны к $L(\Gamma)$. Отсюда следует, что точки w и w^*, через которые проходят все $L(\gamma)$, симметричны относительно $L(\Gamma)$ [1]) ▶

10. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы. В формулу дробно-линейного отображения

$$L: \quad w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

входят четыре комплексных коэффициента a, b, c и d. Однако на самом деле отображение зависит от трех комплексных параметров, ибо числитель и знаменатель дроби можно поделить на один из не равных нулю коэффициентов. Поэтому естественно ожидать, что при помощи дробно-линейного отображения можно единственным образом преобразовать три заданные точки в три заданные. Имеет место

Теорема 1. *Каковы бы ни были три различные точки z_1, z_2, $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и три различные точки w_1, w_2, $w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, существует, и притом только одно, дробно-линейное отображение L, $L(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.*

◀ Существование отображения L доказывается легко: строим дробно-линейные отображения L_1 и L_2, преобразующие z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 соответственно в точки 0, ∞, 1 плоскости ζ:

$$L_1: \quad \zeta = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \qquad L_2: \quad \zeta = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}; \tag{2}$$

отображение

$$L = L_2^{-1} \circ L_1, \tag{3}$$

---

[1]) Заметим, что всякая окружность, проходящая через w и w^*, ортогональная $L(\Gamma)$, является образом некоторой окружности из семейства $\{\gamma\}$.

которое определяется как функция $w=w(z)$ из соотношения

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}, \tag{4}$$

и есть искомое. В самом деле, оно, очевидно, дробно-линейное и преобразует точки z_k в w_k $(k=1, 2, 3)$.

Докажем единственность этого отображения. Пусть λ, $\lambda(z_k)=w_k$ $(k=1, 2, 3)$, будет какое-либо дробно-линейное отображение. Рассмотрим отображение $\mu=L_2\circ\lambda\circ L_1^{-1}$, где L_1 и L_2 определяются по формулам (2); очевидно, μ будет дробно-линейным отображением, оставляющим точки 0, ∞ и 1 неподвижными. Из условия $\mu(\infty)=\infty$ следует, что μ — целая линейная функция: $\mu(\zeta)=\alpha\zeta+\beta$; но из условия $\mu(0)=0$ получаем, что $\beta=0$, а из $\mu(1)=1$ — что $\alpha=1$. Таким образом, $\mu(\zeta)\equiv\zeta$, т. е. $L_2\circ\lambda\circ L_1^{-1}=E$, откуда по групповым законам получаем, что $\lambda=L_2^{-1}\circ L_1$ или, согласно (3), $\lambda\equiv L$ ▶

Замечание. Каждая точка z_k и w_k входит в соотношение (4) дважды, один раз в числителе, другой — в знаменателе. Читатель может убедиться в том, что это соотношение сохраняет силу, когда одна из точек z_k или w_k (или одна z_k и одна w_k) является бесконечной: нужно только числитель и знаменатель дроби, где появляется эта точка, заменить единицей. Например, в случае $z_1=w_3=\infty$ формула принимает вид

$$\frac{1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{1}=\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{1}{1}.$$

Таким образом, теорема 1 сохраняет силу для точек замкнутой плоскости.

На основании доказанной теоремы и кругового свойства (п. 9) можно утверждать, что любую окружность Γ на $\overline{\mathbb{C}}$ можно преобразовать дробно-линейным отображением в любую другую окружность Γ^* (достаточно перевести три точки Γ в три точки Γ^* и воспользоваться круговым свойством). Из топологических соображений ясно, что круг B, ограниченный Γ, переходит при этом в один из двух кругов, ограниченных Γ^* (чтобы узнать в какой, достаточно выяснить, куда переходит какая-либо точка $z_0\in B$). Отсюда легко вывести, что любой круг $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ можно дробно-линейным преобразованием отобразить на любой другой круг $B^*\subset\overline{\mathbb{C}}$.

Дробно-линейное отображение области D на D^* мы будем называть *дробно-линейным изоморфизмом*, а области D и D^*, для которых такой изоморфизм существует, — дробно-линейно изоморфными. Только что высказанное утверждение можно сформулировать так.

Теорема 2. *Любые два круга на замкнутой плоскости дробно-линейно изоморфны.*

Найдем для примера все такие изоморфизмы верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$ на единичный круг $\{|w|<1\}$. Использование теоремы 1 привело бы к некрасивой формуле, поэтому будем поступать иначе. Фиксируем точку a, $\operatorname{Im} a>0$, которая переходит в центр круга $w=0$. Точка $\bar{a}$, симметричная a относительно действительной оси, по теореме 2 предыдущего пункта должна переходить в точку $w=\infty$, симметричную $w=0$ относительно окружности $\{|w|=1\}$. Но точками, которые переходят в нуль и бесконечность, дробно-линейная функция определяется с точностью до постоянного множителя; поэтому искомое отображение должно иметь такой вид: $w=k\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$.

При действительных $z=x$ имеем $|z-a|=|z-\bar{a}|$; поэтому для того, чтобы ось x переходила в единичную окружность, надо взять $|k|=1$, т. е. $k=e^{i\theta}$. Таким образом, все дробно-линейные изоморфизмы верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$ на единичный круг $\{|w|<1\}$ определяются формулой

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \tag{5}$$

где a — произвольная точка верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} a>0$), а θ — произвольное действительное число.

Отображения (5) зависят от трех действительных параметров: θ и двух координат точки a, переходящей в центр круга.

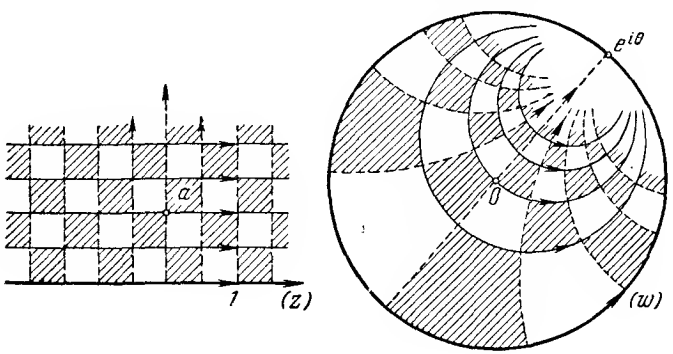


Рис. 14.

Геометрический смысл θ ясен из замечания, что точка $z=\infty$ при отображении (5) переходит в $w=e^{i\theta}$. Изменение этого параметра сводится к повороту круга. На рис. 14 изображены

сетка декартовых координат в плоскости z и ее образ при отображении (5).

Дробно-линейный изоморфизм области на себя мы будем называть *дробно-линейным автоморфизмом*. Очевидно, что совокупность всех дробно-линейных автоморфизмов какой-либо области образует группу, которая является подгруппой группы Λ всех дробно-линейных отображений.

Совокупность всех дробно-линейных автомоморфизмов $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, очевидно, совпадает с группой Λ. Также очевидно, что совокупность дробно-линейных автоморфизмов $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ совпадает с подгруппой (целых) линейных преобразований $z \to az+b$. Вычислим в заключение группу автоморфизмов единичного круга.

Фиксируем точку a, $|a|<1$, переходящую в центр круга $w=0$. Точка $a^*=1/\bar{a}$ симметричная с a относительно окружности $\{|z|=1\}$, должна переходить в точку $w=\infty$; поэтому искомое отображение должно иметь вид

$$w = k\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = k_1\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

где k и k_1 — некоторые постоянные. Так как точка $z=1$ переходит в точку единичной окружности, то должно быть $|k_1|\left|\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right| = |k_1| = 1$, т. е. $k_1=e^{i\theta}$, где θ — действительное число. Следовательно, искомое отображение должно иметь вид

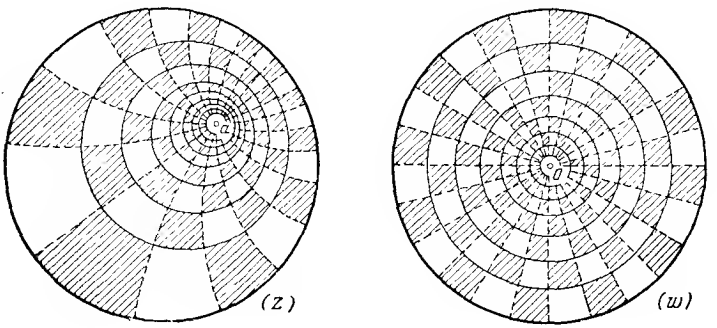


Рис. 15.

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \tag{6}$$

С другой стороны, очевидно, что любая функция вида (6), где $|a|<1$ и θ — действительное число, осуществляет дробно-

линейное отображение единичного круга $\{|z|<1\}$ на единичный круг $\{|w|<1\}$. На рис. 15 изображен прообраз сетки полярных координат плоскости w. Он состоит из двух семейств: дуг окружностей, проходящих через точки a и $a^*=\frac{1}{\bar{a}}$ (прообраз лучей), и окружностей, имеющих эти точки симметричными (прообраз окружностей).

Таким образом, группа дробно-линейных автоморфизмов единичного круга вычислена. Она зависит от трех действительных параметров: двух координат точки a и числа θ.

11. Некоторые рациональные функции.

1. Степенная функция

$$w=z^n, \tag{1}$$

где n — натуральное число, голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$. Ее производная $\frac{dw}{dz}=nz^{n-1}$ при $n>1$ отлична от нуля всюду при $z\neq 0$, следовательно, отображение (1) при $n>1$ конформно в каждой точке $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Записывая функцию (1) в полярных координатах $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\psi}$:

$$\rho=r^n, \qquad \psi=n\varphi, \tag{2}$$

мы видим, что осуществляемое нашей функцией отображение увеличивает в n раз углы с вершиной в точке $z=0$ и поэтому при $n>1$ не конформно в этой точке.

Из (2) видно также, что любые две точки z_1 и z_2 с одинаковыми модулями и с аргументами, отличающимися на целое кратное $2\pi/n$:

$$|z_1|=|z_2|, \quad \arg z_1=\arg z_2+k\frac{2\pi}{n} \tag{3}$$

(и только такие точки), при отображении (1) «склеиваются», т. е. переходят в одну точку w. Следовательно, при $n>1$ это отображение неоднолистно в $\mathbb{C}$. Для однолистности его в некоторой области $D\subset\mathbb{C}$ необходимо и достаточно, чтобы D не содержала никаких двух различных точек z_1 и z_2, связанных соотношениями (3) [1].

Примером области, в которой отображение (1) однолистно, может служить сектор

$$D=\left\{0<\arg z<\frac{2\pi}{n}\right\}.$$

Этот сектор гомеоморфно преобразуется в область $D^*=$

[1] Область однолистности функции (1) при $n>1$ не может содержать точку $z=0$, ибо в любой окрестности $z=0$ имеются различные точки, связанные соотношениями (3).

$=\{0<\arg w<2\pi\}$, т. е. в плоскость w с выброшенной положительной полуосью. На рис. 16 показано соответствие сеток полярных координат при этом отображении.

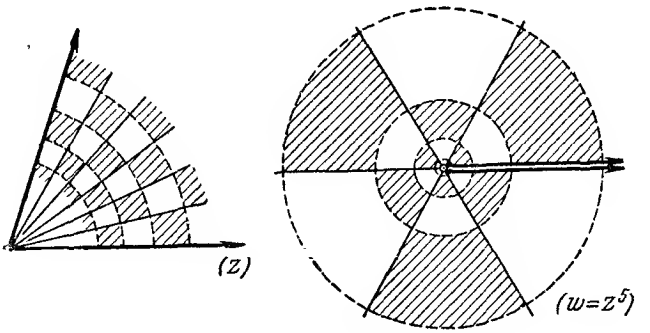


Рис. 16.

Если мы возьмем в плоскости z по-прежнему полярные координаты $z=re^{i\varphi}$, а в плоскости w — декартовы $w=u+iv$, то отображение (1) перепишется в виде следующих двух соотношений:

$$u=r^n\cos n\varphi, \qquad v=r^n\sin n\varphi. \tag{4}$$

На рис. 17 показан прообраз сетки декартовых координат

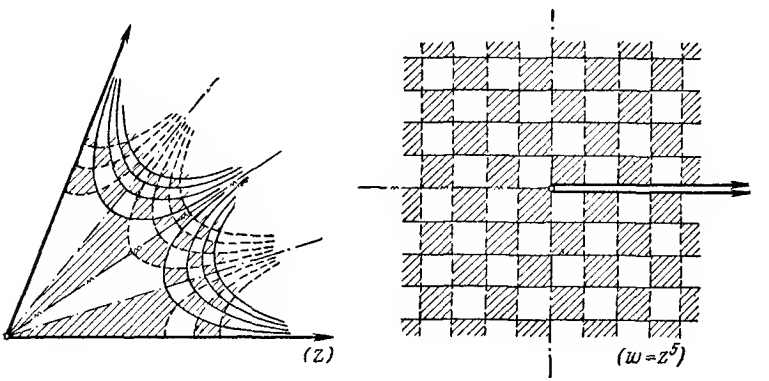


Рис. 17.

плоскости w при этом отображении. Он составлен из кривых с полярными уравнениями $r=\sqrt[n]{\dfrac{u_0}{\cos n\varphi}}$ (пунктирные линии)

$r=\sqrt[n]{\frac{v_0}{\sin n\varphi}}$ (сплошные). При $n=2$ это обычные гиперболы $x^2-y^2=u_0$ (пунктир) и $2xy=v_0$ (сплошные линии). В силу конформности отображения сетка ортогональна, т. е. пунктирные линии ортогональны сплошным.

2. Функция Жуковского. Так называют рациональную функцию

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \tag{5}$$

голоморфную в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ее производная

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$$

отлична от нуля всюду в этой области, кроме точек $z=\pm 1$, откуда видно, что отображение (5) конформно в каждой конечной точке $z\neq 0, \pm 1$. Точке $z=0$ соответствует $w=\infty$, и конформность в этой точке согласно определению угла в бесконечности, принятому в п. 6, следует из того, что производная

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{w}\right)=2\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$$

отлична от нуля при $z=0$. Согласно тому же определению конформность отображения $w=f(z)$ в точке $z=\infty$ сводится к конформности $w=f\left(\frac{1}{z}\right)$ в точке $z=0$; но в случае функции Жуковского $f(z)\equiv f\left(\frac{1}{z}\right)$, и по только что доказанному отображение (5) конформно в точке $z=\infty$. Ниже мы увидим, что в остальных исключительных точках $z=\pm 1$ отображение (5) не конформно.

Выясним условия однолистности нашей функции в какой-либо области D. Пусть z_1 и z_2 она переводит в одну точку, тогда

$$z_1+\frac{1}{z_1}-\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right)=(z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1z_2}\right)=0,$$

и при $z_1\neq z_2$ мы получаем $z_1z_2=1$. Таким образом, для однолистности функции Жуковского в какой-либо области D необходимо и достаточно, чтобы она не содержала никакой пары точек z_1 и z_2, для которых [1])

$$z_1z_2=1. \tag{6}$$

[1]) Область однолистности функции Жуковского не может содержать точек ± 1, ибо в любой окрестности этих точек существуют различные точки, связанные соотношением (6).

Примером области, удовлетворяющей условию однолистности, является внешность единичного круга $D=\{z\in\overline{\mathbb{C}}\colon |z|>1\}$. Чтобы наглядно представить отображение (5), положим $z=re^{i\varphi}$, $w=u+iv$ и запишем (5) в виде

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{7}$$

Из этих соотношений видно, что окружности $\{|z|=r_0\}$, $r_0>1$, функция Жуковского преобразует в эллипсы с полуосями

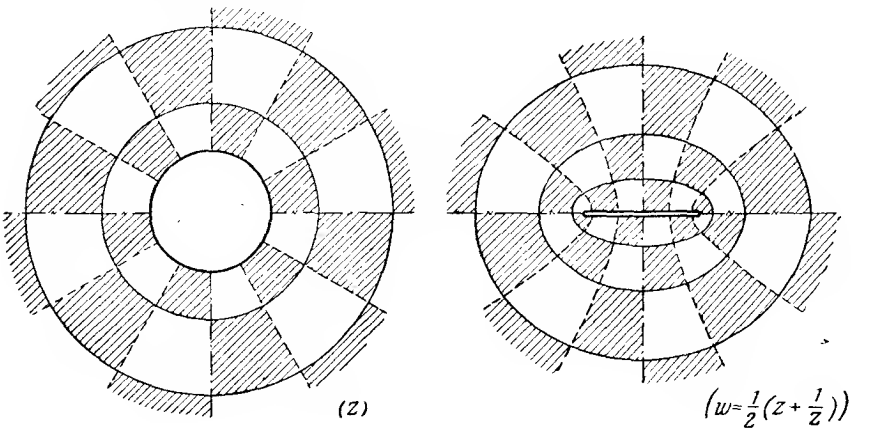


Рис. 18

$a_{r_0}=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)$ и $b_{r_0}=\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)$, с фокусами в точках ± 1 (ибо $a_{r_0}^2-b_{r_0}^2=1$ для любого r_0). Эти эллипсы изображены на рис. 18 сплошными линиями; при $r_0\to 1$ имеем $b_{r_0}\to 0$ и эллипсы стягиваются к отрезку $[-1, 1]\subset\mathbb{R}$; при больших r_0 разность $a_{r_0}-b_{r_0}=\frac{1}{r_0}$ мала и они мало отличаются от окружностей. Лучи $\{\varphi=\varphi_0,\ 1<r<\infty\}$ преобразуются в части гипербол $\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi_0}=1$ с теми же фокусами ± 1 (пунктирные линии на рис. 18); в силу конформности семейство этих гипербол ортогонально описанному выше семейству эллипсов.

Из сказанного видно, что функция Жуковского осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение внешности единичного круга (включая бесконечную точку) на внешность отрезка $[-1, 1]$ действительной оси.

В точках $z=\pm 1$ отображение (5) не конформно. В этом лучше всего убедиться, представив функцию Жуковского в виде

$$\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \tag{8}$$

(тождественность этой формулы формуле (5) проверяется простой выкладкой). Отображение (5), следовательно, представляет собой композицию отображений

$$\zeta=\frac{z-1}{z+1}, \quad \omega=\zeta^2, \quad w=\frac{1+\omega}{1-\omega} \tag{9}$$

(последнее отображение обратно к отображению $\frac{w-1}{w+1}=\omega$). Первое и третье из отображений (9) дробно-линейны и по доказанному в п. 8 конформны всюду в $\overline{\mathbb{C}}$; отображение $\omega=\zeta^2$ удваивает углы в точках $\zeta=0$ и $\zeta=\infty$, которым соответствуют точки $z=\pm 1$. Поэтому отображение Жуковского удваивает углы в этих точках.

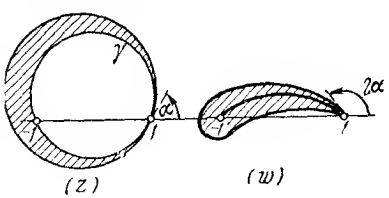


Рис. 19.

Используя разложение (9), читатель убедится в том, что функция Жуковского осуществляет однолистное конформное отображение внешности окружности γ, изображенной на рис. 19 (она проходит через точки ± 1 и составляет в них угол α с действительной осью), на внешность дуги окружности (с концами в точках ± 1, составляющей в точке $w=1$ угол 2α с действительной осью) [1]).

Можно убедиться также в том, что окружности, касающиеся γ извне в одной из точек ± 1, при этом отображении переходят в замкнутые кривые с характерным острием, напоминающие профиль крыла самолета (см. рис. 19). Это замечание позволило Н. Е. Жуковскому создать первый метод аэродинамического расчета крыльев.

12. Показательная функция. Мы определим функцию e^z тем же предельным соотношением, которым она определяется в действительном анализе:

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n. \tag{1}$$

---

[1]) Случай $\alpha=\frac{\pi}{2}$ уже разобран выше другим способом.

Докажем существование этого предела для любого $z \in \mathbb{C}$; для этого положим $z=x+iy$ и заметим, что по правилам возведения в степень

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n \operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\ ^{1}).$$

Отсюда видно, что существуют

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x, \quad \lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = y,$$

а значит, существует и предел (1), который записывается в тригонометрической форме так:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{2}$$

Таким образом,

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z. \tag{3}$$

Полагая в (2) $x=0$, мы получим *формулу Эйлера*

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \tag{4}$$

которой неоднократно пользовались. Однако до сих пор символ e^{iy} мы употребляли для сокращенного обозначения правой части, а теперь можем понимать его как мнимую степень числа e.

Перечислим основные свойства показательной функции.

1°. *Функция e^z голоморфна во всей плоскости* $\mathbb{C}$. В самом деле, полагая $e^z=u+iv$, находим из (2), что $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$; функции u и v дифференцируемы в смысле $\mathbb{R}^2$ всюду в $\mathbb{C}$, и всюду в $\mathbb{C}$ выполняются условия комплексной дифференцируемости

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x\sin y.$$

Таким образом, функция (2) определяет продолжение действительной показательной функции e^x с оси $\mathbb{R}^1$ на всю

---

[1]) Для достаточно большого n точка $1+\frac{z}{n}$ лежит в правой полуплоскости, и мы берем значения $\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)$ и арктангенса из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

плоскость $\mathbb{C}$, причем продолженная функция оказывается голоморфной. Ниже (в п. 21) мы покажем, что такое продолжение определяется единственным образом.

2°. *Для функции e^z сохраняется обычная формула дифференцирования.* В самом деле, производную, когда она существует, можно вычислять в направлении оси x. Поэтому

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + ie^x \sin y) = e^z. \tag{5}$$

Показательная функция не обращается в нуль, ибо $|e^z| = e^x > 0$; поэтому $(e^z)' \neq 0$ и отображение $w = e^z$ конформно в каждой точке $\mathbb{C}$.

3°. *Для функции e^z сохраняется обычная теорема сложения*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \tag{6}$$

В самом деле, полагая $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2)$ и пользуясь формулами сложения действительных показательной и тригонометрических функций, получаем

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ = e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\}.$$

Таким образом, сложению комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует умножение их образов e^{z_1} и e^{z_2}. Иными словами, показательная функция e^z преобразует аддитивную группу поля комплексных чисел в мультипликативную группу этого поля: при отображении $z \to e^z$

$$z_1 + z_2 \to e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \tag{7}$$

4°. *Функция e^z периодическая, с мнимым основным периодом $2\pi i$.* В самом деле, так как по формуле Эйлера $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, то по теореме сложения для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z.$$

С другой стороны, пусть $e^{z+T} = e^z$; умножая обе части на e^{-z}, получаем $e^T = 1$, откуда, полагая $T = T_1 + iT_2$, имеем $e^{T_1}(\cos T_2 + i \sin T_2) = 1$. Но тогда $e^{T_1} = 1$, т. е. $T_1 = 0$, и $\cos T_2 = 1$, $\sin T_2 = 0$, т. е. $T_2 = 2n\pi$, где n — целое число. Таким образом, $T = 2n\pi i$ и $2\pi i$ действительно является основным периодом.

Из этого рассуждения видно также, что для однолистности отображения $w = e^z$ в какой-либо области D необходимо и достаточно, чтобы эта область не содержала ни одной пары точек, связанных соотношением

$$z_1 - z_2 = 2n\pi i \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8}$$

Примером области, удовлетворяющей этому условию, является полоса $\{0<\operatorname{Im} z<2\pi\}$. Полагая $z=x+iy$ и $w=\rho e^{i\psi}$, мы согласно (3) запишем отображение $w=e^z$ в виде

$$\rho=e^x, \quad \psi=y. \tag{9}$$

Отсюда видно, что это отображение преобразует прямые $\{y=y_0\}$ в лучи $\{\psi=y_0\}$, а отрезки $\{x=x_0,\ 0<y<2\pi\}$ — в окружности с выколотой точкой $\{\rho=e^{x_0},\ 0<\psi<2\pi\}$ (рис. 20). Полоса $\{0<y<2\pi\}$

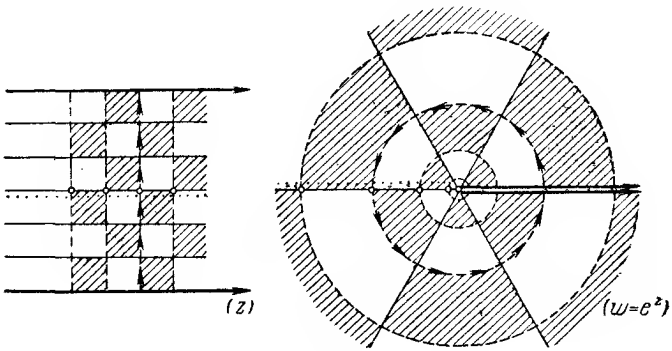


Рис. 20.

преобразуется, следовательно, в плоскость w с выброшенной положительной полуосью. Вдвое более узкая полоса $\{0<y<\pi\}$ преобразуется при этом в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

13. Тригонометрические функции. Из формулы Эйлера для всех действительных x мы имеем $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$, откуда

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Эти формулы можно использовать для голоморфного продолжения косинуса и синуса в комплексную плоскость, положив по определению для любого $z\in\mathbb{C}$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{1}$$

(голоморфность в $\mathbb{C}$ правых частей очевидна).

Все свойства этих функций вытекают из этого определения и соответствующих свойств показательной функции. Так, обе они периодические с основным периодом 2π (показательная функция имеет период $2\pi i$, но в формулах (1) есть множитель при z, равный i), косинус — четная, а синус — нечетная функция.

Для этих функций сохраняются обычные формулы дифференцирования

$$(\cos z)' = i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\sin z,$$

аналогично $(\sin z)' = \cos z$. Сохраняются также тригонометрические соотношения, такие, как

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\quad \cos z = \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right),$$

теоремы сложения и т. д.; читатель без труда выведет их из формул (1).

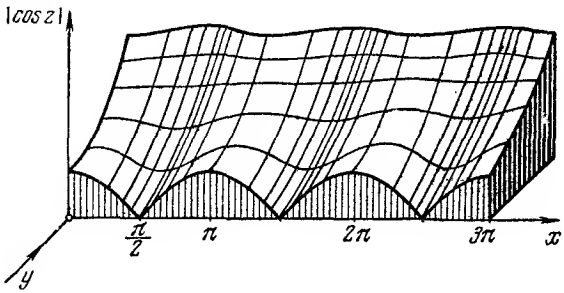


Рис. 21.

Тригонометрические функции комплексного переменного тесно связаны с гиперболическими, которые для любого $z\in\mathbb{C}$ определяются обычными формулами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2},\qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}. \tag{2}$$

Эта связь выражается соотношениями

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \cos iz, \qquad \operatorname{sh} z = -i\sin iz,\\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, \qquad \sin z = -i\operatorname{sh} iz, \end{aligned} \tag{3}$$

которые видны из сравнения формул (1) и (2).

Пользуясь теоремой сложения и формулами (3), находим

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y,$$

откуда

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \tag{4}$$

(мы воспользовались тождествами $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ и $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$). Эта формула позволяет построить поверхность модуля (рельеф) косинуса; она изображена на рис. 21.

Для примера рассмотрим еще отображение полуполосы $D=\left\{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y>0\right\}$, которое осуществляется функцией $w=\sin z$. Мы представим это отображение как композицию уже известных нам отображений

$$z_1=iz,\quad z_2=e^{z_1},\quad z_3=\frac{z_2}{i},\quad w=\frac{1}{2}\left(z_3+\frac{1}{z_3}\right)$$

и тогда увидим, что $w=\sin z$ однолистно (и конформно) отображает полуполосу D на верхнюю полуплоскость. На рис. 22 изображено соответствие линий при этом отображении: лучам

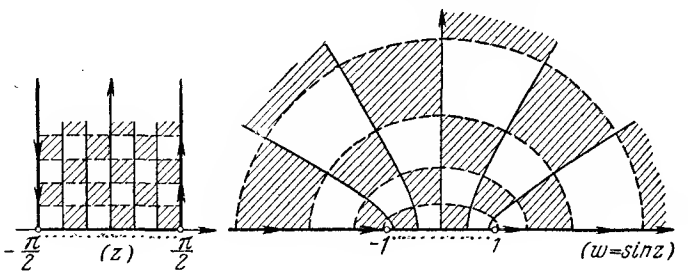


Рис. 22.

$\{x=x_0,\ 0<y<\infty\}$ соответствуют лежащие в верхней полуплоскости части гипербол с фокусами ± 1, а отрезкам $\left\{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y=y_0\right\}$ — такие же части эллипсов с теми же фокусами. Из этого рисунка видно, что на вертикальных границах полуполосы синус принимает действительные значения, по модулю большие 1.

Тангенс и котангенс для комплексных значений аргумента определяются формулами

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\qquad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z} \tag{5}$$

и рационально выражаются через показательную функцию:

$$\operatorname{tg} z=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},\qquad \operatorname{ctg} z=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}. \tag{6}$$

Эти функции голоморфны всюду в $\mathbb{C}$, за исключением тех точек, где знаменатели дробей в формулах (6) обращаются в нуль (в этих точках числители отличны от нуля). Найдем такие точки, например, для $\operatorname{ctg} z$. В них имеем $\sin z=0$, т. е. $e^{iz}=e^{-iz}$;

отсюда в силу условия (8) п. 12 находим $2iz=2in\pi$, $z=n\pi$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$ [1]).

Тангенс и котангенс в комплексной плоскости остаются периодическими с действительным периодом π, для них сохраняются обычные формулы дифференцирования и тригонометрические соотношения — все эти утверждения легко получить из формул (6).

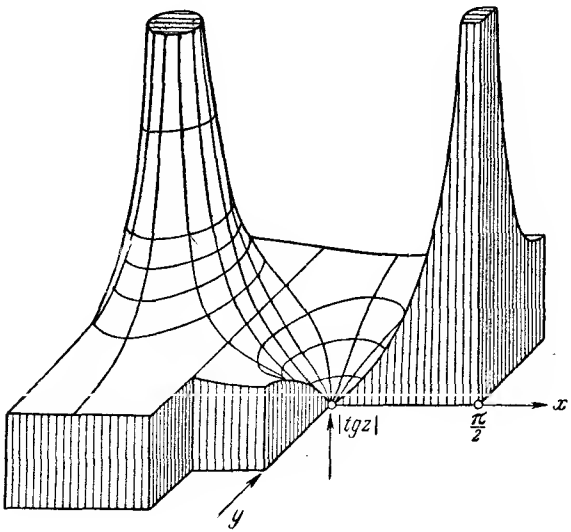


Рис. 23.

Из формулы (4) и аналогичной формулы для синуса находим

$$|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}}. \qquad (7)$$

На рис. 23 изображен рельеф тангенса. Он имеет резко выраженные пики над точками $z=\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$, в которых тангенс теряет голоморфность.

Отображения, осуществляемые функциями $w=\operatorname{tg} z$ и $w=\operatorname{ctg} z$, представляют собой композицию уже известных отображений. Например, $w=\operatorname{tg} z$ сводится к таким отображениям:

$$z_1 = 2iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad w = -i\frac{z_2-1}{z_2+1}.$$

[1]) Мы доказали сейчас, что при голоморфном продолжении синуса в комплексную плоскость не появляется новых точек, где он обращается в нуль.

Полосу $\left\{-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right\}$ эта функция однолистно и конформно отображает на внутренность единичного круга. Прямые $\{x=x_0\}$ при этом преобразуются в дуги окружностей, проходящих че-

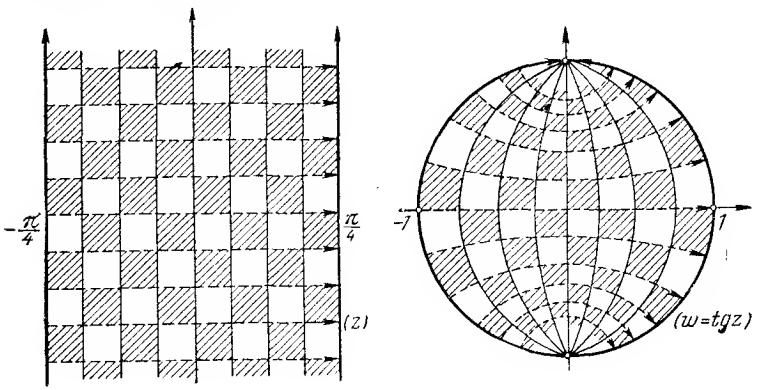


Рис. 24.

рез точки $\pm i$, а отрезки $\left\{-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4},\ y=y_0\right\}$ - в дуги окружностей, для которых эти точки симметричны (рис. 24).

ЗАДАЧИ

1. На множестве плоских векторов $z=(x, y)$ введем обычным образом сложение и умножение на скаляр (действительное число); тогда, отождествляя действительные числа с векторами вида $(x, 0)$, каждый вектор $z=(x, y)$ можно записать в виде $z=x+iy$, где по определению $i=(0, 1)$. Однако умножение двух векторов $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ определим иначе, чем при определении комплексных чисел: именно положим

$$z_1 * z_2=x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

(мы перемножаем двучлены x_1+iy_1 и x_2+iy_2 по обычным правилам алгебры с заменой $i^2=1$). Такую систему будем называть системой гиперболических комплексных чисел (H).

а) Покажите, что (H) является коммутативной алгеброй с делителями нуля, и найдите геометрическое место делителей нуля.

б) Пусть $\bar{z}=x-iy$; тогда $\|z\|=\sqrt{|z*\bar{z}|}$ естественно назвать модулем числа z. Найдите геометрическое место точек z, для которых $\|z\|=1$. Покажите, что при умножении гиперболических комплексных чисел их модули перемножаются. Покажите, что условие $\|z\|=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы z было делителем нуля.

в) Для z_2, $\|z_2\|\neq 0$, и любого z_1 определим частное формулой

$$z_1 \overset{*}{:} z_2=\frac{z_1*\bar{z}_2}{\|z_2\|^2}\operatorname{sgn}(z_2*\bar{z}_2),$$

где $\operatorname{sgn} x$ — знак действительного числа x. Покажите, что $(z_1 \overset{*}{:} z_2)*z_2=z_1$.

г) Для функции $w=f(z)=u+iv$ введем гиперболическую производную

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \|\Delta z\|\neq 0}} \Delta w \mathbin{\overset{*}{*}} \Delta z,$$

если этот предел существует. Покажите, что для существования такой производной необходимы и достаточны дифференцируемость f в смысле $\mathbb{R}^2$ и выполнение условий

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

д) Выясните геометрическую картину отображений $w=z*z$ и $w=1 \mathbin{\overset{*}{*}} z$ (соответствие надлежащим образом выбранных координатных сеток).

е) Положим по определению $e^{z}_{*}=e^{x}(\operatorname{ch} y+i \operatorname{sh} y)$ и $\sin^{*} z=\sin x\cdot\cos y+ +i\cos x\cdot\sin y$. Выясните сходство и отличие этих функций от обычной показательной функции и синуса, а также найдите геометрическую картину отображений, ими осуществляемых.

2. Исследуйте на непрерывность в смысле $\overline{\mathbb{C}}$ функции z, $\bar{z}$ и $\operatorname{Re} z= =\frac{1}{2}(z+\bar{z})$.

3. Пусть u и v — действительные функции двух действительных переменных, дифференцируемые в смысле $\mathbb{R}^2$, а $\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}$, $\nabla v=\frac{\partial v}{\partial x}+$ $+i\frac{\partial v}{\partial y}$ — их градиенты. Покажите, что условия дифференцируемости в смысле $\mathbb{C}$ функции $f=u+iv$ выражаются равенствами

$$(\nabla u,\ \nabla v)=0,\quad |\nabla u|=|\nabla v|,$$

где $(\nabla u,\ \nabla v)$ — скалярное произведение.

4. Пусть точка z движется по закону $z=re^{it}$, где r — постоянная, а t — время. Найдите скорость движения точки $w=f(z)$, где функция f голоморфна на окружности $\{|z|=r\}$.

(Ответ: $izf'(z)$.)

5. Пусть f голоморфна на окружности $\gamma=\{|z|=r\}$ и $f'(z)\neq 0$ на γ. Докажите, что условием выпуклости образа $f(\gamma)$ служит неравенство $\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+1\geqslant 0$. [Указание: сначала рассмотрите условие выпуклости в виде $\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi+\arg f'\left(re^{i\varphi}\right)\right)\geqslant 0$.]

6. Найдите общий вид дробно-линейных отображений, соответствующих вращению сферы Римана относительно двух ее диаметрально противоположных точек.

7. Докажите, что группа дробно-линейных автоморфизмов верхней полуплоскости состоит из отображений

$$z\to\frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c и d действительны и $ad-bc>0$.

8. (Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского) [1])

а) Л-точками называются точки единичного круга $U=\{|z|<1\}$, Л-прямыми — лежащие в U дуги окружностей, ортогональных к $\{|z|=1\}$. Проверьте выполнение обычных аксиом связи точек и прямых. Убедитесь, что через Л-точку, лежащую вне данной Л-прямой, можно провести бесконечно много Л-прямых, не пересекающихся с данной.

б) Назовем Л-расстоянием между Л-точками z_1 и z_2 величину

$$\rho_{\text{Л}}(z_1, z_2)=\ln\frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1z_2}\right|}.$$

Проверьте выполнение аксиомы треугольника. Докажите, что если Л-точки z_1, z_2 и z_3 лежат на одной Л-прямой в естественном порядке, то

$$\rho_{\text{Л}}(z_1, z_3)=\rho_{\text{Л}}(z_1, z_2)+\rho_{\text{Л}}(z_2, z_3).$$

в) Назовем Л-движением дробно-линейный изоморфизм круга U. Покажите, что Л-движения сохраняют Л-расстояния.

г) Л-окружностью с центром z_0 называется геометрическое место точек, Л-расстояние которых до z_0 постоянно. Покажите, что Л-окружность изображается окружностью, имеющей точки z_0 и $z_0^*=1/\bar{z}_0$ симметричными.

д) Эквидистантой называется геометрическое место точек, Л-расстояние которых до данной Л-прямой постоянно. Покажите, что эквидистанта изображается лежащими в U двумя дугами окружностей, которые пересекают $\{|z|=1\}$ в тех же точках, что и рассматриваемая Л-прямая (они не являются Л-прямыми!).

9. Докажите, что для любого условно сходящегося ряда с комплексными членами существует такая прямая $l\subset\mathbb{C}$, что для любой точки $s\in l$ найдется перестановка членов этого ряда, после которой он будет сходиться к s. (Обобщение теоремы Римана об условно сходящихся рядах с действительными членами.)

---

[1]) По поводу этой задачи см. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1960.

ГЛАВА II

СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы рассмотрим важнейшие методы исследования голоморфных функций. Они основаны на представлении таких функций в виде специальных интегралов (интегралов Коши) или в виде сумм некоторых рядов (рядов Тейлора и Лорана). Начнем с понятия интеграла от функций комплексного переменного.

§ 4. Интеграл

14. Понятие интеграла. Определение. Пусть дан путь γ класса C^1, т. е. непрерывно дифференцируемое отображение $z(t)\colon J \to \mathbb{C}$, где $J=[\alpha, \beta]$ — отрезок действительной оси $\mathbb{R}^1$ (см. п. 3). Пусть на образе этого пути $z(J)$, который мы также будем обозначать через γ, задана комплексная функция $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$ такая, что функция $f \circ z(t)$ непрерывна на J (в этом случае мы просто будем говорить, что f непрерывна на γ). Будем называть интегралом от функции f *вдоль пути* γ число

$$\int\limits_{\gamma} f\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \tag{1}$$

где в правой части интеграл от комплексной функции действительного переменного понимается как соответствующая линейная комбинация интегралов от действительной и мнимой частей.

Определение без всяких изменений распространяется на кусочно непрерывно дифференцируемые пути.

Примеры. 1. Пусть γ — окружность $z=a+re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, и $f(z)=(z-a)^n$, где $n=0, \pm 1, \ldots$ — произвольное целое число. По определению (1)

$$\int\limits_{\gamma} (z-a)^n\,dz = r^{n+1} i \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt;$$

при $n \neq -1$ имеем

$$\int\limits_{\gamma} (z-a)^n\,dz = r^{n+1} i \left\{ \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(n+1)t\,dt + i \int\limits_{0}^{2\pi} \sin(n+1)t\,dt \right\} = 0,$$

а при $n=-1$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Таким образом, целые степени $(z-a)^n$ обладают свойством «ортогональности»

$$\int_\gamma (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при } n=-1, \end{cases} \tag{2}$$

которым мы будем неоднократно пользоваться.

2. Пусть γ — произвольный путь $z=z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, класса C^1 с концами в точках $a=z(\alpha)$ и $b=z(\beta)$; тогда

$$\int_\gamma dz = b-a, \quad \int_\gamma z\,dz = \frac{b^2-a^2}{2}. \tag{3}$$

В самом деле,

$$\int_\gamma dz = \int_\alpha^\beta z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta dx(t) + i\int_\alpha^\beta dy(t) =$$

$$= x(\beta)-x(\alpha)+i[y(\beta)-y(\alpha)] = z(\beta)-z(\alpha).$$

Аналогично

$$\int_\gamma z\,dz = \int_\alpha^\beta z(t)z'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}[z^2(t)]\,dt = \frac{z^2(\beta)}{2} - \frac{z^2(\alpha)}{2}.$$

Мы видим, что интегралы (3) не зависят от вида пути и вполне определяются его начальной и конечной точками. По любому замкнутому пути эти интегралы равны нулю.

Замечание. В принятых нами в определении условиях на путь и функцию интеграл (1) всегда существует (как интеграл от непрерывной функции) и может пониматься в смысле Римана. Если путь γ лишь спрямляем, то даже для непрерывных функций f требуется более общее понятие интеграла, ибо в правой части (1) множитель $z'(t)$ существует лишь почти всюду. Поэтому в случае спрямляемых путей нужно пользоваться интегралом Лебега (и тогда естественно считать функцию f такой, что $f\circ z(t)$ суммируема на J).

Перечислим основные свойства интеграла от комплексных функций.

1°. Линейность. Если f и g непрерывны на пути $\gamma \in C^1$, то для любых комплексных постоянных a и b

$$\int_\gamma (af + bg)\,dz = a\int_\gamma f\,dz + b\int_\gamma g\,dz. \tag{4}$$

Следует непосредственно из определения.

2°. Аддитивность. Пусть даны два пути $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1$, определенные соответственно функциями $z_1(t)$, $t\in[\alpha, \beta_1]$, и $z_2(t)$, $t\in[\alpha_2, \beta]$, причем $\beta_1=\alpha_2$ и $z_1(\beta_1)=z_2(\alpha_2)$. *Объединением* $\gamma_1\cup\gamma_2$ этих путей назовем кусочно непрерывно дифференцируемый путь γ: $[\alpha, \beta]\to\mathbb{C}$, определяемый функцией

$$z(t)=\begin{cases} z_1(t), & t\in[\alpha,\ \beta_1],\\ z_2(t), & t\in[\alpha_2,\ \beta].\end{cases}$$

Пусть на γ задана непрерывная функция f; непосредственно из определения интеграла следует, что

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz. \tag{5}$$

Замечание. Можно обобщить понятие объединения путей, отказавшись от условия на расположение отрезков $[\alpha, \beta_1]$ и $[\alpha_2, \beta]$ и от условия $z_1(\beta_1)=z_2(\alpha_2)$. Тогда $\gamma_1\cup\gamma_2$ уже, вообще говоря, не будет путем; в этом случае мы сохраним свойство (5) по определению (положив интеграл по $\gamma_1\cup\gamma_2$ равным сумме интегралов по γ_1 и γ_2).

3°. Инвариантность относительно замены параметра. Теорема 1. *Пусть путь* γ_1: $z=z_1(\tau)$, $\tau\in[\alpha_1, \beta_1]$ *получается из гладкого пути* γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, *допустимой заменой параметра* [1]). *Тогда для любой функции* f, *непрерывной на* γ (*а следовательно, и на* γ_1),

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz. \tag{6}$$

◀ По определению

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt.$$

Сделаем в правой части замену переменных $t=t(\tau)$, которая связывает параметры t и τ на наших путях. По теореме из дей-

[1]) Это означает (см. п. 3), что существует возрастающая функция $t=t(\tau)$: $[\alpha_1, \beta_1]\xrightarrow{\text{на}}[\alpha, \beta]$ класса C^1 такая, что $z_1(\tau)=z[t(\tau)]$ для всех $\tau\in[\alpha_1, \beta_1]$.

ствительного анализа (примененной отдельно к действительной и отдельно к мнимой части интеграла) и правилу дифференцирования сложных функций получим тогда

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f[z_1(\tau)]\,z_1'(\tau)\,d\tau.$$

Интеграл справа — это интеграл от f вдоль пути γ_1 ▶

Из этой теоремы можно сделать важный вывод: интеграл, введенный нами для пути, имеет смысл и для *кривой*, под которой мы понимаем класс эквивалентных путей (см. п. 3). Точнее, для любого пути, определяющего некоторую гладкую кривую, интеграл от функции, непрерывной вдоль этого пути, имеет одно и то же значение.

В соответствии со сказанным в п. 3 мы будем часто в дальнейшем понимать под кривой множество точек комплексной плоскости — образ отрезка $[\alpha, \beta]$ для любого пути, определяющего эту кривую. Тогда мы будем говорить и об интеграле по этому множеству, понимая под ним интеграл вдоль соответствующей кривой.

Замечание. Теорема 1 сохраняется и для функций, суммируемых на спрямляемых путях, если допустимой считать монотонную абсолютно непрерывную замену параметра (в самом деле, тогда можно воспользоваться теоремой о замене переменных для интеграла Лебега). Поэтому имеет смысл и понятие интеграла вдоль спрямляемой кривой.

4°. Ориентированность. Обозначим через γ^- путь, который получается из пути γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, класса C^1 заменой переменных $t\to\alpha+\beta-t$ (т. е. путь $z_1(t)=z(\alpha+\beta-t)$, $t\in[\alpha, \beta]$), и пусть f — функция, непрерывная на γ; тогда

$$\int_{\gamma^-} f\,dz = -\int_{\gamma} f\,dz. \tag{7}$$

Это утверждение доказывается так же, как теорема 1.

Мы будем говорить, что путь γ^- получается из γ *переменой ориентации.*

5°. Оценка интеграла. Теорема 2. *Для любой функции f, непрерывной на гладком пути γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, справедливо неравенство*

$$\left|\int_{\gamma} f\,dz\right| \leqslant \int_{\gamma} |f|\,|dz|, \tag{8}$$

где $|dz| = \sqrt{dx^2+dy^2}$ — элемент длины γ и справа стоит криволинейный интеграл по дуге.

◀Обозначим через I величину интеграла от f по γ, и пусть $I=|I|e^{i\theta}$; имеем

$$|I|=\int_\gamma e^{-i\theta}f\,dz=\int_\alpha^\beta e^{-i\theta}f[z(t)]\,z'(t)\,dt$$

(мы внесли постоянный множитель $e^{-i\theta}$ под знак интеграла). Так как интеграл справа — действительное число, то

$$|I|=\int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\{e^{-i\theta}f[z(t)]\,z'(t)\}\,dt\leqslant\int_\alpha^\beta |f[z(t)]|\,|z'(t)|\,dt=\int_\gamma |f|\,|dz|\ ▶$$

Следствие. *Если в условиях предыдущей теоремы* $|f(z)|\leqslant M$ *всюду на* γ, *где* M — *некоторая постоянная, то*

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right|\leqslant M|\gamma| \tag{9}$$

(через $|\gamma|$ мы обозначаем длину пути γ).

Неравенство (9) получается из (8), если оценить интеграл в правой части и заметить, что

$$\int_\gamma |dz|=|\gamma|.$$

15. Первообразная. Определение 1. *Первообразной* функции f в области D называется такая голоморфная в этой области функция F, что в каждой точке $z\in D$

$$F'(z)=f(z). \tag{1}$$

Если F — первообразная функции f в области D, то и любая функция $F(z)+C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной f в D. Обратно, пусть F_1 и F_2 — две какие-либо первообразные функции f в области D и $\Phi=F_1-F_2$. Функция Φ голоморфна в D, поэтому $\frac{\partial\Phi}{\partial\bar z}\equiv 0$ в D; но и $\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\Phi'=F_1'-F_2'\equiv 0$ в D, поэтому $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial y}\equiv 0$ в D. Отсюда по теореме действительного анализа (примененной к функциям $\operatorname{Re}\Phi$ и $\operatorname{Im}\Phi$) мы заключаем, что $\Phi\equiv C$, постоянная в D. Доказана

Теорема 1. *Если* F — *какая-либо первообразная функции* f *в области* D, *то совокупность всех первообразных* f *дается формулой*

$$F(z)+C, \tag{2}$$

где C — *произвольная постоянная.*

Таким образом, первообразная функции f в области D, если она существует, определяется единственным образом с точностью до постоянного слагаемого.

Перейдем к вопросам существования первообразной. Сначала мы изучим вопрос о существовании локальной первообразной, действующей в окрестности некоторой точки. Мы докажем, что локально каждая голоморфная функция имеет первообразную. Доказательство разобьем на два этапа.

Лемма 1. *Пусть функция f непрерывна в круге $U=\{|z-a|<r\}$ и интеграл от нее по границе*[1]) *любого треугольника $\Delta \Subset U$ равен нулю*:

$$\int\limits_{\partial\Delta} f\,dz = 0. \tag{3}$$

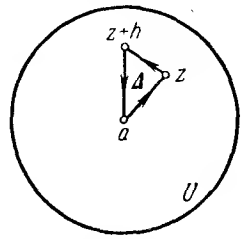


Рис. 25.

Тогда функция

$$F(z) = \int\limits_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{4}$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку $[a, z] \subset U$, является первообразной f в U (т. е. F голоморфна в U и $F'(z)=f(z)$ в каждой точке $z \in U$).

◀ Фиксируем произвольную точку $z \in U$ и будем считать $|h|$ столь малым, что точка $z+h \in U$ (рис. 25). Тогда треугольник $\Delta=\{a, z+h, z\} \Subset U$, и по условию (3)

$$\int\limits_{[a,\,z]} f\,d\zeta + \int\limits_{[z,\,z+h]} f\,d\zeta = \int\limits_{[a,\,z+h]} f\,d\zeta,$$

откуда видно, что

$$F(z+h) - F(z) = \int\limits_{[z,\,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta \tag{5}$$

(мы воспользовались свойствами интегралов и определением функции F). Но согласно примеру 2 из п. 14

$$\int\limits_{[z,\,z+h]} f(z)\,d\zeta = f(z) \int\limits_{[z,\,z+h]} d\zeta = f(z)\,h$$

(мы вынесли постоянный множитель $f(z)$ из-под знака интеграла); поэтому, используя (5), можно написать

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{[z,\,z+h]} \{f(\zeta) - f(z)\}\,d\zeta. \tag{6}$$

[1]) Мы считаем, что граница $\partial\Delta$ ориентирована каким-либо образом (так что при ее обходе треугольник Δ остается все время с одной стороны).

Теперь воспользуемся непрерывностью функции f: для любого $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$ такое, что при $|h|<\delta$ для всех $\zeta\in[z,\ z+h]$ справедливо неравенство $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. На этом основании получаем из (6), что при $|h|<\delta$

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\frac{1}{|h|}\varepsilon\cdot|h|=\varepsilon,$$

а это означает, что существует $F'(z)=f(z)$ ▶

Лемма 2. *Если функция $f\in H(D)$* [1]*, то интеграл от f по границе любого треугольника $\Delta\Subset D$ равен нулю.*

◀ Пусть лемма неверна и существует треугольник $\Delta\Subset D$ такой, что

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta} f\,dz\right|=M>0. \tag{7}$$

Разобьем Δ на четыре треугольника средними линиями и предположим, что границы Δ и этих треугольников ориентированы против часовой стрелки (рис. 26). Очевидно, что интеграл от f по $\partial\Delta$ равен сумме интегралов по границам маленьких треугольников, ибо интегралы по средним линиям (пунктир на рис. 26) берутся дважды в противоположных направлениях и потому сокращаются, а остальные части границ составляют $\partial\Delta$. Поэтому найдется хотя бы один маленький треугольник — мы обозначим его через Δ_1 — такой, что

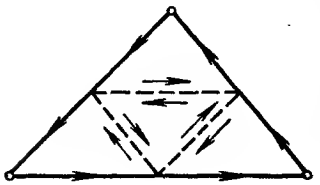


Рис. 26.

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_1} f\,dz\right|\geqslant\frac{M}{4}.$$

Треугольник Δ_1 мы снова разобьем средними линиями на четыре треугольника и по тем же соображениям найдем среди них хотя бы один — мы обозначим его через Δ_2 — такой, что

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_2} f\,dz\right|\geqslant\frac{M}{4^2}.$$

Продолжая наше рассуждение, построим последовательность вложенных друг в друга треугольников таких, что для интеграла по границе n-го треугольника справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,dz\right|\geqslant\frac{M}{4^n}. \tag{8}$$

[1]) Напомним, что через $H(D)$ обозначается совокупность всех функций, голоморфных в области D.

Треугольники Δ_n (мы считаем их замкнутыми) имеют общую точку z_0, которая принадлежит Δ, а следовательно, и D. Так как функция f голоморфна в точке z_0, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что модуль разности

$$\alpha(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0) \tag{9}$$

будет меньше ε для всех z из проколотой окрестности $U'=\{0<|z-z_0|<\delta\}$.

В U' найдется хотя бы один треугольник построенной последовательности, пусть это будет Δ_n. На основании (9) и примеров из предыдущего пункта

$$\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,dz=\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,dz+\int\limits_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz+\int\limits_{\partial\Delta_n}\alpha(z)(z-z_0)\,dz=$$
$$=\int\limits_{\partial\Delta_n}\alpha(z)(z-z_0)\,dz,$$

где $|\alpha(z)|<\varepsilon$ для всех $z\in\partial\Delta_n$. Кроме того, для всех $z\in\partial\Delta_n$ величина $|z-z_0|$ не превосходит периметра $|\partial\Delta_n|$ треугольника Δ_n, поэтому по теореме об оценке интеграла

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,dz\right|=\left|\int\limits_{\partial\Delta_n}\alpha(z)(z-z_0)\,dz\right|<\varepsilon|\partial\Delta_n|^2.$$

Но по нашему построению $|\partial\Delta_n|=\frac{|\partial\Delta|}{2^n}$, где $|\partial\Delta|$ — периметр треугольника Δ, следовательно,

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,dz\right|<\varepsilon\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}.$$

Учитывая (8), мы получаем неравенство

$$M<\varepsilon|\partial\Delta|^2,$$

откуда в силу произвольности числа ε заключаем, что $M=0$ вопреки предположению (7) ▶

Доказанную лемму 2 мы будем называть *основной леммой* интегрального исчисления. Из нее и из леммы 1 непосредственно вытекает локальная теорема существования первообразной голоморфной функции.

Теорема 2. *Если функция $f\in H(D)$, то в любом круге $\{|z-z_0|<r\}\subset D$ она имеет первообразную*

$$F(z)=\int\limits_{[z_0,\,z]} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{10}$$

Вопрос о существовании глобальной первообразной, действующей во всей области D, несколько сложнее. Мы займемся им в следующем пункте, а сейчас лишь покажем, как из локальных первообразных можно склеить первообразную, действующую вдоль заданного пути.

Определение 2. Пусть в области D задана функция f и γ: $z=z(t)$, $t\in J$, где $J=[\alpha, \beta]\subset\mathbb{R}^1$ — произвольный (непрерывный) путь, лежащий в D. Функцию $\Phi(t)$: $J\to\mathbb{C}$ мы будем называть *первообразной функции f вдоль пути γ*, если она: 1) непрерывна на J и 2) для любой точки $t_0\in J$ существует окрестность $U_{z_0}\subset D$ точки $z_0=z(t_0)$, в которой f имеет первообразную F такую, что

$$F[z(t)]=\Phi(t) \qquad (11)$$

для всех t из некоторой окрестности $u_{t_0}\subset J$.

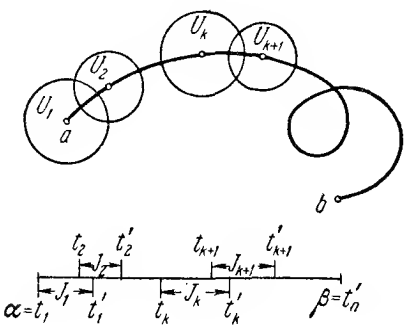


Рис. 27.

Заметим, что если f имеет первообразную F во всей области D, то функция $F[z(t)]$ будет служить первообразной вдоль пути γ. Однако в определении не требуется существования первообразной во всей D — достаточно, чтобы она существовала лишь локально, в окрестности каждой точки $z_0\in\gamma$. Более того, если $z(t')=z(t'')=z'$ при $t'\neq t''$, то две первообразные f, из которых одна соответствует окрестности $u_{t'}$, а другая — окрестности $u_{t''}$, не обязаны совпадать: они могут отличаться постоянным слагаемым (заметьте, что они действуют в окрестности одной и той же точки z' и по теореме 1 их разность может быть только постоянной). Поэтому первообразная вдоль пути, являясь функцией параметра t, может не быть функцией точки z.

Теорема 3. *Для любой функции $f\in H(D)$ и любого (непрерывного) пути $\gamma\subset D$ первообразная f вдоль γ существует и определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

◀ Пусть путь γ определяется отображением $z=z(t)$: $J\to D$. Разобьем отрезок $J=[\alpha, \beta]$ на n отрезков $J_k=[t_k, t_k']$ так, чтобы два соседних пересекались по отрезку $(t_k<t_{k+1}<t_k'$, $t_1=\alpha$, $t_n'=\beta$; рис. 27). Пользуясь равномерной непрерывностью функции $z(t)$, мы можем выбрать J_k столь малыми, чтобы для любого $k=1, \ldots, n$ образ $z(J_k)$ содержался в круге $U_k\subset D$, в котором f имеет первообразную (по теореме 2).

Среди совокупности первообразных, действующих в U_1 (они отличаются друг от друга постоянным слагаемым), выберем произвольно одну, которую обозначим через F_1. Рассмотрим какую-либо первообразную, действующую в U_2; в пересечении $U_1 \cap U_2$ она может отличаться от F_1 лишь постоянным слагаемым (ибо это — две первообразные одной функции). Поэтому среди первообразных, действующих в U_2, существует одна, мы обозначим ее через F_2, которая совпадает с F_1 в пересечении $U_1 \cap U_2$.

Продолжая это рассуждение, мы в каждой U_k выберем первообразную F_k так, что $F_k \equiv F_{k-1}$ в пересечении $U_{k-1} \cap U_k$ $(k=1, \ldots, n)$. Функция

$$\Phi(t) = F_k[z(t)], \quad t \in J_k \qquad (k=1, \ldots, n),$$

будет первообразной функции f вдоль пути γ. В самом деле, она, очевидно, непрерывна на отрезке J и для каждой точки $t_0 \in J$ найдется окрестность, в которой $\Phi(t) = F[z(t)]$, где F — первообразная f, действующая в окрестности $z(t_0)$.

Остается доказать вторую часть теоремы. Пусть $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ — две первообразные f вдоль пути γ. В окрестности u_{t_0} каждой точки $t_0 \in J$ мы имеем $\Phi_1 = F^{(1)}[z(t)]$ и $\Phi_2 = F^{(2)}[z(t)]$, где $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — две первообразные функции f, действующие в некоторой окрестности точки $z(t_0)$. Они могут отличаться лишь постоянным слагаемым, поэтому $\varphi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ постоянна в u_{t_0}. Но локально постоянная в каждой точке связного множества функция постоянна на всем множестве [1]). Поэтому $\Phi_1(t) - \Phi_2(t) = \text{const}$ для всех $t \in J$ ▶

Если известна первообразная функции f вдоль пути γ, то интеграл от f по γ вычисляется по обычной формуле Ньютона — Лейбница:

Теорема 4. *Если* γ: $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, *— кусочно гладкий путь и функция* f *непрерывна на* γ *и имеет первообразную* $\Phi(t)$ *вдоль* γ, то

$$\int_\gamma f\,dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{12}$$

◀ Пусть сначала путь γ гладкий и целиком лежит в области, где функция f имеет первообразную F. По определению

[1]) В самом деле, пусть $\mathcal{E} = \{t \in J : \varphi(t) = \varphi(t_0)\}$. Это множество непусто, ибо содержит t_0. Оно открыто, ибо φ локально постоянна и вместе с каждой точкой t в $\mathcal{E}$ входит некоторая окрестность u_t. Но оно и замкнуто, ибо φ непрерывна (так как она локально постоянна) и поэтому из условий $\varphi(t_n) = \varphi(t_0)$ и $t_n \to t''$ следует, что $\varphi(t'') = \varphi(t_0)$. По теореме 2 из п. 4 $\mathcal{E} \equiv J$.

интеграла

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \tag{13}$$

а по определению первообразной вдоль пути для всех $t\in[\alpha, \beta]$

$$\Phi(t) = F[z(t)] + \text{const}.$$

Так как для всех $z\in\gamma$ существует $F'(z)=f(z)$, а в силу гладкости γ для всех $t\in[\alpha, \beta]$ существует непрерывная производная $z'(t)$, то функция Φ для всех $t\in[\alpha, \beta]$ имеет непрерывную производную

$$\Phi'(t) = f[z(t)]\,z'(t)$$

Мы видим, что функция $\Phi(t)$ является первообразной непрерывной функции, стоящей под знаком интеграла в правой части (13).

По формуле Ньютона — Лейбница для функций действительного переменного получаем (12).

В общем случае мы можем разбить γ на конечное число путей γ_ν: $z=z(t)$, $t\in[\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}]$ $(\alpha_0=\alpha<\alpha_1<\ldots<\alpha_n=\beta)$, так, что каждый из них является гладким и лежит в области, где f имеет первообразную. По только что доказанному

$$\int_{\gamma_\nu} f\,dz = \Phi(\alpha_{\nu+1}) - \Phi(\alpha_\nu),$$

и, складывая все эти равенства, получим (12) ▶

Замечание 1. Если рассматривать вместо интеграла Римана интеграл Лебега, то теорему 4 можно точно так же доказать для спрямляемых путей. Однако можно пойти и дальше. Пусть функция f голоморфна в области D, тогда по теореме 3 существует ее первообразная $\Phi(t)$ вдоль произвольного непрерывного пути $\gamma\subset D$. Учитывая теорему 4, мы определим *интеграл от f по произвольному непрерывному пути* $\gamma\subset D$ как приращение ее первообразной вдоль этого пути на отрезке $[\alpha, \beta]$ изменения параметра.

Очевидно, что правая часть (12) не меняется при допустимых заменах параметра. Поэтому можно рассматривать интеграл от голоморфных функций и по любым (непрерывным) кривым.

Замечание 2. Теорема 4 позволяет убедиться в справедливости сделанного в начале пункта утверждения о том, что в многосвязной области не каждая голоморфная функция имеет первообразную. Рассмотрим область $D=\{0<|z|<2\}$ и в ней го-

ломорфную функцию $f(z)=\frac{1}{z}$; эта функция не может иметь в D первообразной. В самом деле, если бы первообразная F функции f в D существовала, то для любого пути γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, лежащего в D, первообразной вдоль этого пути служила бы функция $F[z(t)]$ и, по теореме 4,

$$\int_{\gamma} f\,dz = F(b) - F(a),$$

где $a=z(\alpha)$ и $b=z(\beta)$ — концы γ. В частности, интеграл от f вдоль любого замкнутого пути $\gamma\subset D$, для которого $b=a$, равнялся бы нулю. Но мы знаем (см. пример 1 в п. 14), что интеграл от f вдоль единичной окружности $z=e^{it}$, $t\in[0, 2\pi]$, т. е. интеграл

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

В заключение приведем несколько терминологических замечаний. Вместо интегрирования функций часто говорят об интегрировании *дифференциальных форм*. Для функций двух действительных переменных x и y (линейные) дифференциальные формы имеют вид

$$\omega = P\,dx + Q\,dy, \tag{14}$$

где P и Q — функции от x и y, заданные в плоской области D. Форма (14) называется *замкнутой* в D, если P и Q дифференцируемы и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{15}$$

всюду в этой области. Эта форма называется *точной*, если существует дифференцируемая в D функция $\varphi(x, y)$ такая, что всюду в D

$$P\,dx + Q\,dy = d\varphi. \tag{16}$$

Как и в п. 6, будем вместо x и y рассматривать комплексные переменные $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$; после перехода к этим переменным форма (14) примет вид

$$\omega = f_1\,dz + f_2\,d\bar{z}, \tag{17}$$

где положено $f_1=\frac{1}{2}(P-iQ)$, $f_2=\frac{1}{2}(P+iQ)$. Однако в комплексном анализе обычно рассматривают частный вид дифференциальных форм, для которых коэффициент при $d\bar{z}$ равен нулю:

$$\omega = f\,dz. \tag{18}$$

Положим $f=u+iv$ и $dz=dx+i\,dy$, тогда форма (18) перепишется в виде линейной комбинации двух действительных форм

$$\omega=\omega_1+i\omega_2=u\,dx-v\,dy+i(v\,dx+u\,dy).$$

Условия замкнутости форм ω_1 и ω_2 в области D состоят в том, что функции u и v дифференцируемы в D и всюду в D

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

(ср. условие (15) замкнутости формы ω). Но это — условие голоморфности функции f в области D. Учитывая сказанное, мы будем называть форму $\omega=f\,dz$ *замкнутой* в области D, если функция f голоморфна в этой области.

Форма $\omega=f\,dz$ называется *точной* в области D, если существует такая голоморфная в D функция F, что всюду в D

$$\omega=dF, \tag{19}$$

т. е. если f имеет в области D первообразную F.

В п. 20 мы докажем, что производная от голоморфной функции также голоморфна. Отсюда следует, что всякая точная форма $f\,dz=dF$ непременно является замкнутой. Обратное утверждение неверно, вот пример: форма $\omega=\frac{dz}{z}$ замкнута в области $D=\{0<|z|<2\}$, но не точна в ней (см. замечание 2). Однако по теореме 3 каждая замкнутая форма $f\,dz$ л о к а л ь н о т о ч н а (в окрестности каждой точки $z_0\in D$ ее можно представить как дифференциал функции $\int\limits_{[z_0,\,z]} f(\xi)\,d\xi$).

В следующем пункте мы убедимся в том, что в о д н о с в я з н о й области у каждой голоморфной функции существует первообразная. Поэтому в такой области каждая замкнутая форма точна.

Понятие дифференциальной формы особенно удобно для функций нескольких комплексных переменных (см. часть II).

16. Гомотопия. Теорема Коши. Эта основная в интегральном исчислении теорема состоит в том, что интеграл от голоморфной в некоторой области функции по любому замкнутому пути, который непрерывной деформацией внутри области стягивается в точку, равен нулю. Она, таким образом, обобщает основную лемму интегрального исчисления, доказанную в предыдущем пункте. Мы получим теорему Коши как следствие более общей теоремы об инвариантности интеграла от голоморфных функций относительно непрерывных деформаций пути интегрирования (теорема 1). Перейдем к точным формулировкам и доказательствам.

Для простоты предположим, что для всех рассматриваемых путей параметр t меняется на одном и том же отрезке $J=[0, 1]$. Это предположение не ограничивает общности, ибо ему всегда можно удовлетворить при помощи допустимой замены параметра, которая заменит путь ему эквивалентным и сохранит значение интеграла вдоль пути.

Определение 1. Два пути $z_0(t)\colon J\to D$ и $z_1(t)\colon J\to D$ с общими концами $z_0(0)=z_1(0)=a$ и $z_0(1)=z_1(1)=b$ называются *гомотопными* в области D, если существует непрерывное

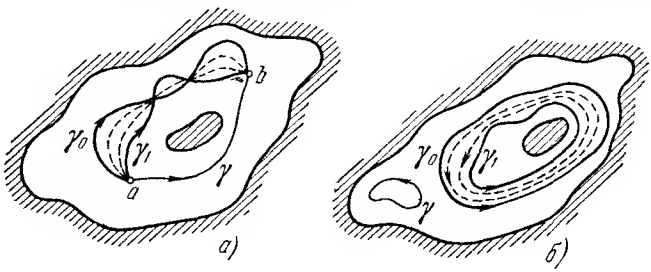


Рис. 28.

отображение $z(s, t)\colon J\times J\to D$ (через $J\times J$ мы обозначаем произведение отрезков, т. е. квадрат $0\leqslant s\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$) такое, что

$$\begin{aligned} &z(0, t)\equiv z_0(t), \quad z(1, t)\equiv z_1(t) \quad (t\in J),\\ &z(s, 0)\equiv a, \qquad z(s, 1)\equiv b \qquad (s\in J). \end{aligned} \tag{1}$$

Два замкнутых пути $z_0(t)\colon J\to D$ и $z_1(t)\colon J\to D$ называются *гомотопными* в области D, если существует такое непрерывное отображение $z(s, t)\colon J\times J\to D$, что

$$\begin{aligned} &z(0, t)\equiv z_0(t), \quad z(1, t)\equiv z_1(t) \qquad (t\in J)\\ &z(s, 0)\equiv z(s, 1) \qquad (s\in J). \end{aligned} \tag{2}$$

При фиксированном $s=s_0\in J$ функция $z(s_0, t)\colon J\to D$ определяет путь в области D, причем такие пути непрерывно меняются при изменении s_0 и их семейство «связывает» в D пути $z_0(t)$ и $z_1(t)$ (на рис. 28 эти «промежуточные» пути изображены пунктиром). Таким образом, гомотопность двух путей в области D означает возможность непрерывно деформировать их друг в друга внутри D. На рис. 28 пути γ_0 и γ_1 гомотопны, а γ не гомотопен им.

Гомотопность принято обозначать символом $\sim$, так что если путь γ_0 гомотопен пути γ_1, то мы будем писать $\gamma_0\sim\gamma_1$.

Очевидно, что гомотопность удовлетворяет обычным аксиомам эквивалентности (рефлексивности, симметричности и транзитивности). Поэтому в данной области все пути с общими концами или все замкнутые пути можно разбить на классы, каждый из которых объединяет все гомотопные друг другу пути; такие классы называются *гомотопическими классами.*

Среди классов замкнутых путей выделяется класс путей, гомотопных нулю. Говорят, что замкнутый путь γ *гомотопен нулю* в области D, если существует непрерывное отображение $z(s, t)$: $J\times J \to D$, удовлетворяющее условиям (2) и такое, что $z_1(t)\equiv\text{const}$ (это означает, что γ непрерывной деформацией внутри D стягивается в точку). Можно доказать, что два пути γ_1 и γ_2 с общими концами гомотопны друг другу тогда и только тогда, когда их разность (т. е. объединение путей γ_1 и γ_2^-) гомотопна нулю.

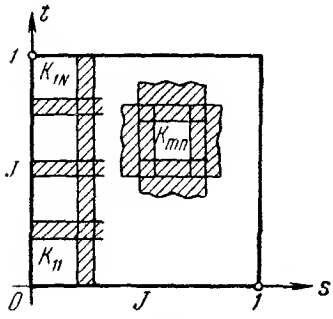


Рис. 29.

В *односвязной* области любой замкнутый путь гомотопен нулю и, значит, любые два пути с общими концами гомотопны друг другу (это свойство можно было бы принять за определение односвязности). Поэтому в односвязных областях разбиение на гомотопические классы тривиально.

Так как гомотопность двух путей, очевидно, не нарушается при допустимых заменах параметра, то это понятие распространяется на кривые. Именно, две кривые (с общими концами или замкнутые) называются *гомотопными* в области D, если в D гомотопны пути γ_1 и γ_2, представляющие соответственно эти кривые.

Переходим к доказательству теоремы об инвариантности интеграла при гомотопных деформациях пути интегрирования.

Теорема 1. *Если функция* $f\in H(D)$, *а* γ_1 *и* γ_0 — *два пути, гомотопные друг другу в* D *как пути с общими концами или как замкнутые пути, то*

$$\int\limits_{\gamma_0} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz. \tag{3}$$

◀ Будем считать, что отрезком изменения параметра t для путей γ_0 и γ_1 служит $J=[0, 1]$; пусть $z(s, t)$: $J\times J \to D$ — функция, определяющая их гомотопию (см. определение 1). Построим систему квадратиков K_{mn} $(m, n=1, \ldots, N)$, покрывающих квадрат $K=J\times J$ так, что каждый K_{mn} пересекается с каждым соседним квадратиком (рис. 29). В силу равномерной

непрерывности функции $z(s, t)$ квадратики K_{mn} можно выбрать столь мелкими, чтобы образ $z(K_{mn})$ содержался в круге $U_{mn} \subset D$, в котором функция f имеет первообразную F_{mn} (мы пользуемся тем, что локально каждая голоморфная функция имеет первообразную). Фиксируем индекс m и будем поступать, как при доказательстве теоремы 3 из предыдущего пункта. Выберем произвольно первообразную F_{m1}, действующую в U_{m1}, а первообразную F_{m2}, действующую в U_{m2}, подберем так, чтобы $F_{m1} = F_{m2}$ в пересечении $U_{m1} \cap U_{m2}$ (мы пользуемся тем, что две первообразные f в этом пересечении могут отличаться лишь постоянным слагаемым). Точно так же подбираем первообразные $F_{m3}, \ldots, F_{mN}$ (так, что $F_{m, n+1} = F_{mn}$ в $U_{m, n+1} \cap U_{mn}$) и строим функцию

$$\Phi_m(s, t) = F_{mn}[z(s, t)] \quad \text{для} \quad (s, t) \in K_{mn} \quad (n = 1, \ldots, N). \tag{4}$$

Функция Φ_m, очевидно, непрерывна в прямоугольнике $K_m = \bigcup_{n=1}^{N} K_{mn}$ и определена с точностью до постоянного слагаемого. Мы выбираем произвольно Φ_1, а Φ_2 подбираем так, чтобы $\Phi_1 = \Phi_2$ в пересечении $K_1 \cap K_2$ [1]). Точно так же подбираем функции $\Phi_3, \ldots, \Phi_N$ (так, что $\Phi_m = \Phi_{m+1}$ в $K_m \cap K_{m+1}$) и строим функцию

$$\Phi(s, t) = \Phi_m(s, t) \quad \text{для} \quad (s, t) \in K_m \qquad (m = 1, \ldots, N). \tag{5}$$

При фиксированном $s \in J$ функция $\Phi(s, t)$, очевидно, является первообразной вдоль пути γ_s: $z = z(s, t)$, $t \in J$, поэтому по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_{\gamma_s} f\, dz = \Phi(s, 1) - \Phi(s, 0). \tag{6}$$

Далее разберем отдельно два случая:

а) Пути γ_1 и γ_2 имеют общие концы. В этом случае по определению гомотопии для любого $s \in J$ имеем $z(s, 0) = a$ и $z(s, 1) = b$. Следовательно, функции $\Phi(s, 0)$ и $\Phi(s, 1)$ локально постоянны в каждой точке J, и, значит, они постоянны на этом отрезке. Таким образом, $\Phi(0, 0) = \Phi(1, 0)$, $\Phi(0, 1) = \Phi(1, 1)$ и из формулы (6) мы получаем (3).

б) Пути γ_1 и γ_2 замкнуты. Так как в этом случае $z(s, 0) = z(s, 1)$ для любого $s \in J$, то $\Phi(s, 1) - \Phi(s, 0)$ локально постоянна в каждой точке J и, следовательно, постоянна на всем этом отрезке. Поэтому из (6) опять вытекает (3) ▶

[1]) Это можно сделать, так как функция $\Phi_2 - \Phi_1$, будучи локально постоянной и непрерывной на связном множестве $K_1 \cap K_2$, постоянна.

Замечание. Первоначально мы ввели понятие интеграла для пути и затем убедились в том, что фактически интеграл определяется не путем, а кривой, т. е. классом эквивалентных путей. Теорема 1 показывает, что в случае голоморфных функций можно пойти дальше и утверждать, что в этом случае интеграл определяется не кривой, а гомотопическим классом, которому принадлежит эта кривая.

Из доказанной теоремы просто получается

Теорема 2 (Коши). *Если функция $f\in H(D)$, то ее интеграл по любому замкнутому пути $\gamma\subset D$, гомотопному нулю в этой области, равен нулю*:

$$\int_{\gamma} f\,dz=0, \quad \text{если} \quad \gamma\sim 0. \tag{7}$$

◀ Так как $\gamma\sim 0$, то этот путь можно в D гомотопно деформировать в замкнутый путь γ_1: $z=z_1(t)$, $t\in J$, лежащий в некотором круге $U\subset D$. По теореме 3 предыдущего пункта функция f имеет в U первообразную F, и, следовательно, первообразной f вдоль γ_1 будет функция $F[z_1(t)]$. Так как $z_1(0)=z_1(1)=a$ (путь γ_1 замкнут), то по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_{\gamma_1} f\,dz=F(a)-F(a)=0.$$

Но по теореме 1 интегралы от f по γ и γ_1 равны, следовательно, интеграл от f по γ равен нулю ▶

Так как в односвязной области каждый замкнутый путь гомотопен нулю, то для таких областей теорема Коши формулируется особенно просто:

Теорема 3 (Коши). *Если функция f голоморфна в односвязной области $D\subset\mathbb{C}$, то ее интеграл вдоль любого замкнутого пути $\gamma\subset D$ равен нулю.*

Ввиду важности этой теоремы приведем еще ее элементарное доказательство в двух дополнительных предположениях: 1) производная f' непрерывна[1]) в D и 2) γ — гладкий жорданов путь.

Из второго предположения следует, что γ является границей области G, принадлежащей области D в силу односвязности последней. Первое предположение позволяет применить известную из анализа формулу Римана — Грина

$$\int_{\partial G} P\,dx+Q\,dy=\iint_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{8}$$

[1]) Скоро мы убедимся в том, что это предположение выполняется автоматически для голоморфных функций.

при выводе которой требуется непрерывность в $\overline{G}$ частных производных функций P и Q (через ∂G здесь обозначается граница области G, проходимая против часовой стрелки). Применяя эту формулу к действительной и мнимой частям интеграла

$$\int\limits_{\partial G} f\,dz = \int\limits_{\partial G} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\partial G} v\,dx + u\,dy,$$

мы получим

$$\int\limits_{\partial G} f\,dz = \iint\limits_{G}\left\{-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} dx\,dy.$$

Пользуясь символом комплексной производной $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (см. п. 6), мы перепишем последнее соотношение в виде формулы

$$\int\limits_{\partial G} f\,dz = 2i\iint\limits_{G}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy, \tag{9}$$

которую можно рассматривать как комплексную запись формулы Римана — Грина.

Так как в силу голоморфности $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, то теорема Коши (в сделанных дополнительных предположениях) непосредственно вытекает из этой формулы.

Из теоремы Коши (в последней формулировке) просто выводится глобальная теорема о существовании первообразной для односвязной области:

Теорема 4. *Всякая функция f, голоморфная в односвязной области D, имеет в этой области первообразную.*

◀ Покажем, что в D интеграл от f по незамкнутому пути не зависит от выбора этого пути и полностью определяется его началом и концом. В самом деле, пусть γ_1 и γ_2 — два пути, соединяющие в D точки a и b (рис. 30). Без ограничения общности можно считать, что для γ_1 параметр меняется на отрезке $[\alpha, \beta_1]$, а для γ_2 — на отрезке $[\beta_1, \beta]$ $(\alpha<\beta_1<\beta)$. Обозначим через γ объединение путей γ_1 и γ_2^-; это — замкнутый путь, лежащий в области D. По свойствам интегралов

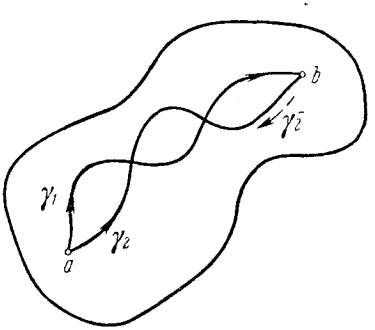


Рис. 30.

$$\int\limits_{\gamma_1} f\,dz - \int\limits_{\gamma_2} f\,dz = \int\limits_{\gamma} f\,dz,$$

но по теореме 3 интеграл от f по любому замкнутому пути $\gamma \subset D$ равен нулю, отсюда и следует наше утверждение[1]).

Фиксируем теперь точку $a \in D$ и будем считать a началом пути, лежащего в D, конец которого z будем считать произвольным. Интеграл от f по этому пути (который мы обозначим через $\widehat{az}$) является функцией точки z:

$$F(z) = \int\limits_{\widehat{az}} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{10}$$

Повторяя в точности рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2 из предыдущего пункта, мы убедимся в том, что F голоморфна в D и что $F' = f$ в каждой точке $z \in D$, т. е. что F является первообразной f в области D ▶

Пример функции $f = \frac{1}{z}$ в области $\{0 < |z| < 2\}$ (см. замечание 2 в предыдущем пункте) показывает, что условие односвязности области в этой теореме существенно: для многосвязных областей глобальная теорема существования первообразной, вообще говоря, неверна.

17. Обобщения теоремы Коши. Тот же пример показывает, что в многосвязной области интеграл от голоморфной функции по замкнутому пути не обязательно равен нулю, т. е. теорема Коши в том виде, как она сформулирована в теореме 3 предыдущего пункта, на многосвязные области не распространяется.

В формулировке теоремы 2 порядок связности несущественен. Очевидно, что замкнутая кривая гомотопна нулю в области D, если она является границей некоторой области $G \Subset D$ (ее можно деформировать в точку, стягивая в точку область G). Поэтому теорему Коши можно формулировать еще и так: если функция f голоморфна в области D, а область $G \Subset D$ и ограничена непрерывной кривой ∂G, то интеграл от f по ∂G равен нулю.

Для применений полезно иметь обобщение этой теоремы на случай, когда область G не обязательно односвязна. Чтобы сформулировать это обобщение, введем:

Определение. Пусть граница компактной[2]) области G состоит из конечного числа замкнутых кривых γ_ν ($\nu = 0, \ldots, n-1$). Будем считать, что внешняя граница γ_0, т. е. кривая, отделяющая точки G от бесконечной точки, ориентирована против часовой стрелки, а остальные граничные кривые γ_ν ($\nu = 1, \ldots, n-1$) —

[1]) Это утверждение можно получить непосредственно из теоремы 1, если воспользоваться замечанием, что в односвязной области любые два пути с общими концами гомотопны друг другу.

[2]) Напомним, что *компактной* называется область G, замыкание которой в $\overline{\mathbb{C}}$ состоит лишь из конечных точек ($G \Subset \mathbb{C}$).

по часовой (иными словами, граничные кривые ориентированы так, что область во время обхода границы всегда остается слева (рис. 31). Границу области G с такой ориентацией мы будем называть *ориентированной границей* и обозначать символом ∂G [1]).

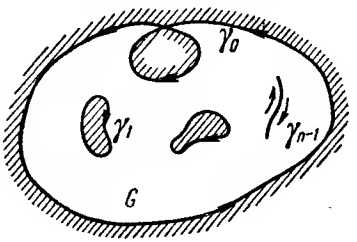


Рис. 31.

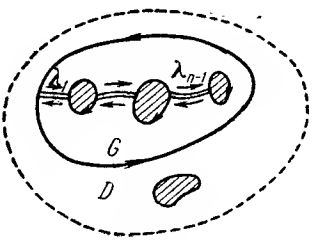


Рис. 32.

Теперь мы можем сформулировать обобщение теоремы Коши, о котором говорили выше:

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in H(D)$ *и* G *— любая компактно принадлежащая* D *область, ограниченная конечным числом кривых. Тогда интеграл от* f *по ориентированной границе области* G *равен нулю*:

$$\int_{\partial G} f\,dz = 0. \tag{1}$$

◀ Проведем в G конечное число разрезов $\lambda_\nu^{\pm}$, связывающих компоненты границы этой области (на рис. 32 мы для наглядности изобразим эти разрезы, состоящими из двух берегов). Очевидно, что замкнутая кривая Γ, состоящая из ориентированной границы ∂G и совокупностей $\Lambda^+ = \bigcup \lambda_\nu^+$ и $\Lambda^- = \bigcup \lambda_\nu^-$, гомотопна нулю в области D [2]). В силу свойств интегралов

$$\int_\Gamma f\,dz = \int_{\partial G} f\,dz + \int_{\Lambda^+} f\,dz + \int_{\Lambda^-} f\,dz = \int_{\partial G} f\,dz,$$

а так как $\Gamma \sim 0$ в D, то по теореме 2 предыдущего пункта мы получаем (1) ▶

В некоторых вопросах полезно иметь более общий результат о равенстве нулю интеграла по границе самой области D, а не только областей, компактно ей принадлежащих. Ясно, что без дополнительных условий такой результат получить нельзя, ибо функция может не быть определенной на ∂D. Мы

[1]) Здесь мы пользуемся геометрическими представлениями об ориентированной границе. Формальное ее определение см. в п. 13 ч. II.

[2]) Это можно доказать индукцией по числу компонент ∂D. Заметим однако, что формальное доказательство всего проводимого здесь построения достаточно громоздко.

приведем естественные дополнительные условия, в которых такое обобщение теоремы Коши имеет место.

Теорема 2. *Пусть функция f голоморфна в компактной области D, ограниченной конечным числом спрямляемых кривых, и непрерывна в $\overline{D}$. Тогда интеграл от f по ориентированной границе этой области равен нулю:*

$$\int_{\partial D} f\,dz = 0. \tag{2}$$

◀ Без ограничения общности можно считать, что D — односвязная область (т. е. ∂D состоит из одной кривой), ибо приемом, примененным при доказательстве теоремы 1, общий случай сводится к этому. Дальнейшее доказательство [1]) разобьем на три этапа.

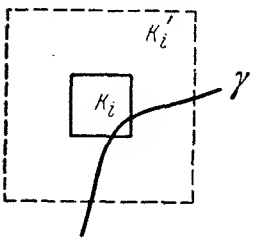


Рис. 33.

1°. Пусть γ — спрямляемая кривая и $d(\gamma)$ — ее диаметр [2]); пусть плоскость $\mathbb{C}$ покрыта сеткой прямых, параллельных координатным осям, причем сторона квадратов сетки

$$\varepsilon < \frac{1}{3\sqrt{2}}\, d(\gamma). \tag{3}$$

Докажем, что *сумма диаметров квадратов сетки, пересекающихся с* γ, не превосходит $9\sqrt{2}\,|\gamma|$, где $|\gamma|$ — длина кривой γ.

В самом деле, пусть $\{K_i\}$, $i \in I$, — (конечная) совокупность квадратов сетки, пересекающихся с γ, и K_i' — квадрат со стороной 3ε с тем же центром, что K_i, и так же расположенный (рис. 33). В силу условия (3) γ должна выходить на границу $\partial K_i'$, следовательно, длина части γ, лежащей в K_i',

$$|\gamma \cap K_i'| \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Кроме того, мы имеем

$$\sum_{i \in I} |\gamma \cap K_i'| \leqslant 9\,|\gamma|, \tag{5}$$

ибо $|\gamma| = \sum\limits_{i \in I} |\gamma \cap K_i|$, а в сумме $\sum\limits_{i \in I} |\gamma \cap K_i'|$ мы считаем каждую из длин $|\gamma \cap K_i|$ не более 9 раз. Из неравенств (4) и (5) получаем, что

$$\sum_{i \in I} d(K_i) = \sum_{i \in I} \varepsilon\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2} \sum_{i \in I} |\gamma \cap K_i'| \leqslant 9\sqrt{2}\,|\gamma|. \tag{6}$$

2°. Пусть функция f определена на множестве $M \subset \mathbb{C}$ и δ — положительное число. *Модулем непрерывности* f на M называется величина

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(z_1) - f(z_2)| \quad \text{для } z_1, z_2 \in M, |z_1 - z_2| \leqslant \delta.$$

Известно, что если M — компактное замкнутое множество, то для непрерывности f на нем необходимо и достаточно, чтобы $\omega_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

---

[1]) Это доказательство нам сообщил Л. Д. Иванов.

[2]) Под *диаметром* $d(M)$ множества $M \subset \mathbb{C}$ понимается верхняя грань расстояний $|z' - z''|$ между точками $z', z'' \in M$.

Докажем, что *если f непрерывна на замкнутой спрямляемой кривой γ, то*

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leqslant \omega_f(d(\gamma))\,|\gamma|, \tag{7}$$

где $d(\gamma)$ — диаметр кривой γ.

В самом деле, в силу того, что интеграл от dz по γ равен нулю, для любой точки $z_0 \in \gamma$ имеем

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma [f(z) - f(z_0)]\,dz.$$

Так как $|f(z) - f(z_0)| \leqslant \omega_f(d(\gamma))$ для всех $z \in \gamma$, то отсюда простой оценкой получаем (7).

3°. Теперь будем доказывать утверждение теоремы. Покроем $\mathbb{C}$ сеткой, как в 1°, и представим интеграл (2) в виде

$$\int_{\partial D} f\,dz = \sum_{i\in I}\int_{\partial(D\cap K_i)} f\,dz + \sum_{\partial K_j}\int f\,dz, \tag{8}$$

где первая сумма распространена на квадраты $\{K_i\}$, $i \in I$, пересекающиеся с $\partial D = \gamma$, а вторая — на квадраты, целиком состоящие из внутренних точек D (она равна нулю по теореме Коши).

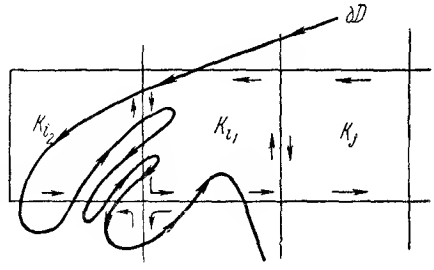


Рис. 34.

Для каждого $i \in I$ пересечение $D \cap K_i$ состоит из конечного или счетного множества компонент (на рис. 34 $D \cap K_{i_1}$ состоит из одной компоненты, а $D \cap K_{i_2}$ — из трех). К границе каждой компоненты $D \cap K_i$ мы применим неравенство (7), в котором первый множитель заменим величиной $\omega_f(\varepsilon\sqrt{2})$ — модулем непрерывности f на $\overline{D}$ для $\delta = \varepsilon\sqrt{2}$ (мы учитываем, что диаметр границы каждой компоненты не превосходит $\varepsilon\sqrt{2}$ и что $\omega(\delta)$ — неубывающая функция от δ). Затем мы сложим все такие неравенства (при фиксированном i) и учтем, что объединение границ всех компонент состоит из $\gamma \cap K_i$ и некоторого множества точек на dK_i, длина которого не превосходит $|\partial K_i| = 4\varepsilon$. Таким образом мы получим

$$\left|\int_{\partial(D\cap K_i)} f\,dz\right| \leqslant \omega_f(\varepsilon\sqrt{2}) \quad (|\gamma \cap K_i| + 4\varepsilon).$$

Подставляя это в (8), будем иметь

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leqslant \omega_f(\varepsilon\sqrt{2})\sum_{i\in I}(|\gamma\cap K_i| + 4\varepsilon) = \omega_f(\varepsilon\sqrt{2})\left(|\gamma| + 4\sum_{i\in I}\varepsilon\right).$$

Теперь воспользуемся неравенством (6), из которого следует, что $\sum_{i\in I}\varepsilon \leqslant 9|\gamma|$, получим

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leqslant 37\,|\gamma|\,\omega_f(\varepsilon\sqrt{2}).$$

Остается заметить, что в силу равномерной непрерывности f на $\overline{D}$ величина $\omega_f(\varepsilon\sqrt{2})$ стремится к 0 при $\varepsilon\to 0$, а так как ε можно взять сколь угодно малым и оцениваемый интеграл не зависит от ε, то он равен нулю ▶

18. Интегральная формула Коши. Здесь мы получим представление функций, голоморфных в компактной области, при помощи интеграла по границе этой области. Такое представление, как мы увидим, находит важные применения как в теоретических, так и практических вопросах.

Теорема 1. *Пусть $f\in H(D)$ и G — компактно принадлежащая D область, ограниченная конечным числом (непрерывных) кривых. Тогда в любой точке $z\in G$ функция f представима в виде*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{1}$$

где ∂G — ориентированная граница G (см. стр. 87).

Величина в правой части этой формулы называется интегралом Коши.

◀ Возьмем $\rho>0$ таким, чтобы круг $U_\rho=\{z'\colon |z'-z|<\rho\}\Subset G$, и обозначим $G_\rho=G\setminus\overline{U}_\rho$. Функция $g(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ голоморфна в $\overline{G}_\rho$, как частное двух голоморфных функций со знаменателем, отличным от нуля. По теореме 1 предыдущего пункта (она применима, ибо g голоморфна в некоторой области, компактно содержащей G_ρ) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_\rho} g\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=0,$$

где окружность $\partial U_\rho=\{\zeta\colon |\zeta-z|=\rho\}$ ориентирована против часовой стрелки.

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \tag{2}$$

где число $\rho>0$ можно считать сколь угодно малым. Так как функция f непрерывна в точке z, то для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать число $\delta>0$ столь малым, что при $\rho<\delta$

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon \quad \text{для всех} \quad \zeta\in\partial U_\rho.$$

Поэтому разность [1])

$$f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{3}$$

по абсолютной величине не превосходит $\frac{1}{2\pi}\varepsilon\cdot 2\pi=\varepsilon$ и, следовательно, стремится к нулю при $\rho\to 0$. Но, как видно из (2), левая часть (3) не зависит от ρ, следовательно, она равна нулю при всех достаточно малых ρ, т. е.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

Отсюда и из (2) следует формула (1) ▶

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 точка z лежит вне $\overline{G}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=0. \tag{4}$$

Это утверждение следует непосредственно из теоремы Коши, ибо здесь функция $g(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ голоморфна в $\overline{G}$.

Замечание 2. Если вместо теоремы 1 предыдущего пункта мы используем теорему 2, то получим такую теорему:

Теорема 1′. *Если функция f голоморфна в компактной области D, ограниченной конечным числом спрямляемых кривых, и непрерывна в $\overline{D}$, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\begin{cases}f(z) & \text{для всех } z\in D,\\ 0 & \text{для всех } z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D},\end{cases} \tag{5}$$

где ∂D — ориентированная граница D.

Интегральная формула Коши выражает весьма интересный факт: значения голоморфной в области $\overline{G}$ функции полностью определяются ее значениями на границе. (В самом деле, если значения f на ∂G известны, то известна и вся правая часть формулы (1), т. е. известно значение f в любой точке $z\in G$.) Этот факт принципиально отличает голоморфные функции от функций, дифференцируемых в смысле действительного анализа.

Из теоремы 1 просто вытекает

Теорема 2 (о среднем). *Значение функции $f\in H(D)$ в каждой конечной точке $z\in D$ равно среднему арифметическому*

---

[1]) Мы воспользовались тем, что $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=1$ (см. пример 1 п. 14) и что постоянный множитель $f(z)$ можно внести под знак интеграла.

ее значений на любой достаточно малой окружности с центром в z:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{it})\,dt. \tag{6}$$

◀ Возьмем круг $U_\rho=\{z'\colon |z'-z|<\rho\}$ такой, что $U_\rho\Subset D$, и примем его в качестве области G из теоремы 1. По интегральной формуле Коши получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{7}$$

а так как на ∂U_ρ имеем $\zeta-z=\rho e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $d\zeta=\rho i e^{it}dt$, то (7) сводится к (6) ▶

Теорема о среднем показывает, что голоморфные функции, описательно говоря, очень правильно устроены и что их значения тесно связаны с соседними значениями. Это объясняет наличие у таких функций целого ряда специфических свойств, которых нет у функций, дифференцируемых в смысле действительного анализа. Многие такие свойства мы рассмотрим в дальнейшем.

В заключение приведем формулу интегрального представления функций, дифференцируемых в смысле действительного анализа, которая обобщает интегральную формулу Коши.

Теорема 3. *Пусть функция f принадлежит классу C^1 в замыкании компактной области D, ограниченной конечным числом спрямляемых кривых. Тогда в каждой точке $z\in D$*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta-z}. \tag{8}$$

Эту формулу мы будем называть *формулой Коши — Грина*; если $f\in H(D)$, то двойной интеграл в ней исчезает, и мы получаем формулу Коши.

◀ Исключим из D малый круг $\overline{U}_\rho=\{\zeta\colon |\zeta-z|\leqslant\rho\}$ и к функции $g(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, принадлежащей классу C^1 в области $D_\rho=D\setminus\overline{U}_\rho$, применим формулу Грина в комплексной записи (см. формулу (9) п. 16):

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=2i\iint_{D_\rho}\frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta-z}\ ^{1}).$$

---

[1]) Мы имеем $\dfrac{\partial g}{\partial\bar\zeta}=\dfrac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\cdot\dfrac{1}{\zeta-z}$, ибо функция $\dfrac{1}{\zeta-z}$ голоморфно зависит от ζ и ее производная по $\bar\zeta$ равна нулю.

Так как f непрерывна в точке z, то $f(\zeta)=f(z)+O(\rho)$ для $\zeta\in U_\rho$, где $O(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$. Поэтому

$$\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z)\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\int\limits_{\partial U_\rho}\frac{O(\rho)}{\zeta-z}\,d\zeta=2\pi i f(z)+O(\rho),$$

и последняя формула при $\rho\to 0$ дает (8) [1] ▶

§ 5. Ряды Тейлора

В этом параграфе мы, отправляясь от интегральной формулы Коши, получим представление голоморфных функций в виде сумм степенных рядов (рядов Тейлора).

Напомним известные из анализа простейшие понятия, связанные с рядами. Ряд (из комплексных чисел) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ имеет конечный предел s; этот предел называется *суммой ряда.*

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$, где функции f_n определены на некотором множестве $M\subset\overline{\mathbb{C}}$, называется *равномерно сходящимся* на M, если он сходится в каждой точке $z\in M$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n\geqslant N$ остатки этого ряда $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}f_k(z)\right|<\varepsilon$ для всех $z\in M$.

Точно так же, как в анализе, доказывается, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ сходится равномерно на множестве M, если сходится ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|f_n\|$, где $\|f_n\|=\sup\limits_{z\in M}|f_n(z)|$ (последнее условие равносильно тому, что рассматриваемый ряд

---

[1]) Наше рассуждение доказывает существование

$$\lim_{\rho\to 0}\int\int\limits_{D_\rho}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta-z};$$

но так как $f\in C^1(\overline{D})$, то двойной интеграл в (8) существует (в этом можно убедиться, переходя к полярным координатам с центром в точке z) и этот предел совпадает с ним.

мажорируется на M сходящимся числовым рядом). Без всяких изменений переносятся и доказательства того, что сумма равномерно сходящегося ряда из функций, непрерывных на множестве M, непрерывна на этом множестве и что равномерно сходящийся на кривой (класса C^1 или спрямляемой) ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать по этой кривой.

19. Ряды Тейлора. Одной из основных в теории функций комплексного переменного является

Теорема 1. *Если функция $f\in H(D)$ и z_0 — произвольная точка D, то в любом круге $U=\{|z-z_0|<R\}\subset D$ эту функцию можно представить в виде суммы сходящегося степенного ряда*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n. \qquad (1)$$

◀ Пусть $z\in U$ — произвольная точка; выберем число r так, чтобы $|z-z_0|<r<R$, и обозначим через γ_r окружность $\{\zeta\colon |\zeta-z_0|=r\}$. По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Чтобы получить разложение f в степенной ряд, разложим «ядро» этой формулы в геометрическую прогрессию по степеням $z-z_0$:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}, \qquad (2)$$

затем умножим обе части на $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ и проинтегрируем почленно по γ_r. Так как для всех $\zeta\in\gamma_r$ имеем

$$\frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}=\frac{|z-z_0|}{r}=q<1,$$

то прогрессия (2) сходится равномерно по ζ на γ_r. Равномерность сходимости не нарушится при умножении на непрерывную на γ_r и, следовательно, ограниченную функцию $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$. Поэтому наше почленное интегрирование законно, и, выполнив его, мы получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \blacktriangleright \tag{3}$$

Определение. Степенной ряд (1), коэффициенты которого определены формулами (3), называется *рядом Тейлора* функции f с центром в точке z_0.

Из теоремы об инвариантности интеграла (п. 16) видно, что коэффициенты c_n ряда Тейлора, определяемые по формуле (3), не зависят от радиуса r окружности γ_r $(0<r<R)$.

Отметим простые следствия теоремы 1.

Неравенства Коши. *Пусть функция f голоморфна в замкнутом круге $\overline{U}=\{|z-z_0|\leqslant r\}$ и на окружности $\gamma_r=\partial U$ ее модуль не превосходит постоянной M. Тогда коэффициенты ряда Тейлора f с центром в z_0 удовлетворяют неравенствам*

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{r^n} \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{4}$$

◀ Из формул (3), учитывая, что $|f(\zeta)| \leqslant M$ для всех $\zeta \in \gamma_r$, находим

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}}\, 2\pi r = \frac{M}{r^n} \blacktriangleright$$

Из неравенств Коши вытекает интересная

Теорема 2 (Лиувилль). *Если функция f голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена, то она постоянна.*

◀ По теореме 1 в любом замкнутом круге $\overline{U}=\{|z|\leqslant R\}$, $R<\infty$, функция f представляется рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

коэффициенты которого не зависят от R. Так как f ограничена в $\mathbb{C}$ (пусть $|f(z)| \leqslant M$), то по неравенствам Коши для любого $n=0,\ 1,\ \ldots$ имеем

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n}.$$

Здесь R можно взять сколь угодно большим, поэтому при $n=1,\ 2,\ \ldots$ правая часть стремится к нулю при $R \to \infty$. Но левая часть не зависит от R, поэтому $c_n=0$ для $n=1,\ 2,\ \ldots$ и $f(z) \equiv c_0$ ▶

Таким образом, два свойства функции — быть голоморфной во всей плоскости $\mathbb{C}$ и быть ограниченной — могут сосуществовать лишь на тривиальных функциях (постоянных).

Теорему Лиувилля можно сформулировать еще и так:

Теорема 2′. *Если функция f голоморфна во всей замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, то она постоянна.*

◀ Функция f голоморфна в бесконечности, значит, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ существует и конечен. Отсюда следует, что f ограничена в некоторой окрестности $\{|z|\leqslant R\}$ бесконечной точки. В остальной части плоскости $\{|z|\leqslant R\}$ она ограничена, как непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве. Поэтому f ограничена в $\mathbb{C}$, а так как она голоморфна там, то по теореме 2 $f\equiv$ $\equiv$ const ▶

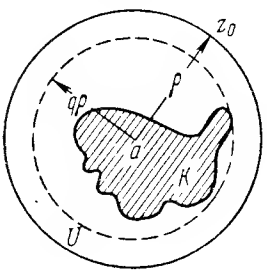


Рис. 35.

Теорема 1 утверждает, что любую голоморфную в круге функцию в этом круге можно представить как сумму сходящегося степенного ряда. Мы хотим теперь доказать, что, и обратно, сумма любого сходящегося степенного ряда является голоморфной функцией. Для этого напомним некоторые свойства степенных рядов, известные читателю из курса анализа.

Лемма. *Если члены степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{5}$$

в некоторой точке $z_0\in\mathbb{C}$ ограничены, т. е.

$$|c_n(z_0-a)^n|\leqslant M \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{6}$$

то этот ряд сходится в круге $U=\{z\colon |z-a|<|z_0-a|\}$ и на каждом компактном подмножестве $K\Subset U$ он сходится равномерно.

◀ Можно предполагать, что $z_0\neq a$, т. е. $|z_0-a|=\rho>0$, иначе множество U пусто. Пусть множество $K\Subset U$, тогда для любой точки $z\in K$

$$\frac{|z-a|}{\rho}\leqslant q<1$$

(рис. 35). Поэтому для любой точки $z\in K$ и для любого $n=0,\ 1,\ \ldots$ мы имеем

$$|c_n(z-a)^n|\leqslant |c_n|\rho^n q^n.$$

Но по условию (6) $|c_n|\rho^n\leqslant M$, следовательно, для любой $z\in K$ ряд (5) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $M\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ и, значит, сходится равномерно на K.

Второе утверждение леммы доказано, а первое следует из второго, ибо любая точка $z' \in U$ содержится в некотором круге $\{|z-a|<\rho'\}$, $|z'-a|<\rho'<\rho$, компактно принадлежащем U ▶

Теорема 3 (Абель). *Если степенной ряд* (5) *сходится в некоторой точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, *то этот ряд сходится в круге* $U=\{z: |z-a|<|z_0-a|\}$ *и на каждом компактном подмножестве* U *он сходится равномерно.*

◀ Так как ряд (5) сходится в точке z_0, то общий член $c_n(z_0-a)^n$ соответствующего числового ряда стремится к нулю. Но всякая сходящаяся последовательность ограничена, поэтому выполняется условие леммы, а из леммы следуют оба утверждения теоремы ▶

Формула Коши—Адамара. *Пусть дан степенной ряд* (5) *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}, \tag{7}$$

где $0 \leqslant R \leqslant \infty$ $\left(\text{мы считаем } \frac{1}{0}=\infty \text{ и } \frac{1}{\infty}=0\right)$. *Тогда в любой точке* z, *в которой* $|z-a|<R$, *ряд* (5) *сходится, а в любой точке* z, *в которой* $|z-a|>R$, *расходится* [1]).

◀ Верхним пределом последовательности действительных чисел α_n называется число A такое, что: 1) существует подпоследовательность $\alpha_{n_k} \to A$ и 2) каково бы ни было $\varepsilon>0$, найдется такой номер N, что $\alpha_n<A+\varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. При этом не исключаются случаи $A=\pm\infty$, только при $A=+\infty$ условие 2) отпадает, а при $A=-\infty$ число $A+\varepsilon$ в нем заменяется произвольным числом (в последнем случае условие 1) выполняется автоматически и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=-\infty$). В анализе доказывается, что всякая последовательность $\alpha_n \in \mathbb{R}$ имеет единственный (конечный или бесконечный) верхний предел.

Пусть $0<R<\infty$; для любого $\varepsilon>0$ можно найти число N такое, что при $n \geqslant N$ имеем $\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{1}{R}+\varepsilon$, и, следовательно,

$$|c_n(z-a)^n|<\left\{\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|z-a|\right\}^n. \tag{8}$$

Если $|z-a|<R$, то можно выбрать ε столь малым, что будет $\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|z-a|=q<1$; тогда, как видно из (8), члены ряда (5) при $n \geqslant N$ мажорируются членами геометрической прогрессии q^n, и, следовательно, ряд (5) сходится при $|z-a|<R$.

[1]) Заметим: это утверждение содержит первое утверждение теоремы Абеля.

Из условия 1) в определении верхнего предела видно, что для любого $\varepsilon>0$ найдется последовательность $n_k\to\infty$ такая, что $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}>\frac{1}{R}-\varepsilon$, и, следовательно,

$$|c_{n_k}(z-a)^{n_k}|>\left\{\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)|z-a|\right\}^{n_k}. \tag{9}$$

Если $|z-a|>R$, то можно выбрать ε столь малым, что будет $\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)|z-a|>1$; тогда, как видно из (9), $|c_{n_k}(z-a)^{n_k}|>1$, и, следовательно, общий член ряда (5) не стремится к 0, т. е. ряд расходится при $|z-a|>R$.

Доказательство в случаях $R=0$ и $R=\infty$ предоставляется читателям ▶

Определение. *Областью сходимости* степенного ряда (5) называется открытое ядро (т. е. совокупность внутренних точек) $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ множества $\mathcal{E}$ тех точек $z\in\mathbb{C}$, в которых сходится этот ряд.

Теорема 4. *Областью сходимости степенного ряда* (5) *является круг* $\{|z-a|<R\}$, *где* R — *число, определяемое по формуле Коши — Адамара* (7).

◀ Из предыдущего утверждения следует, что множество $\mathcal{E}$ точек сходимости ряда (5) представляет собой круг $\{|z-a|<R\}$, дополненный некоторым множеством точек окружности $\{|z-a|=R\}$ (быть может, пустым). Поэтому открытым ядром $\mathcal{E}$ является круг $\{|z-a|<R\}$ ▶

Круг (открытый), существование которого только что доказано, называется *кругом сходимости* степенного ряда (5), а число R — *радиусом сходимости.*

Примеры. 1. Ряды

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n,\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}z^n,\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(nz)^n, \tag{10}$$

как видно из формулы Коши — Адамара, имеют соответственно радиусы сходимости $R=\infty$, 1 и 0. Поэтому круг сходимости первого из них есть $\mathbb{C}$, второго — единичный круг $\{|z|<1\}$, а третьего — пустое множество.

2. Из той же формулы видно, что кругом сходимости всех трех рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}z^n,\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \tag{11}$$

является единичный круг $\{|z|<1\}$. Однако множества точек сходимости всех трех рядов различны. Ряд а) расходится во всех точках окружности $\{|z|=1\}$, ибо его общий член при $|z|=1$ не стремится к нулю. Ряд б) в некоторых точках окружности $\{|z|=1\}$ сходится (например, в $z=-1$), а в некоторых

расходится (например, в $z=1$). Ряд в) сходится во всех точках этой окружности, ибо для любого z, $|z|=1$, он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Переходим к доказательству голоморфности суммы степенного ряда.

Теорема 5. *Сумма степенного ряда*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{12}$$

голоморфна в круге его сходимости.

◀ Мы предполагаем, что радиус сходимости ряда $R>0$, ибо иначе нечего доказывать. Напишем формально производный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}=\varphi(z); \tag{13}$$

он сходится или расходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^n$, а так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|c_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|},$$

то радиус сходимости ряда (13) тоже равен R. На компактных подмножествах круг $U=\{|z-a|<R\}$ ряд (13) сходится равномерно, следовательно, функция $\varphi(z)$ непрерывна в этом круге.

По той же причине ряд (13) можно почленно интегрировать по границе любого треугольника $\Delta \Subset U$:

$$\int_{\partial\Delta} \varphi\, dz=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{\partial\Delta} (z-a)^{n-1}\, dz=0$$

(по теореме Коши все интегралы в правой части равны нулю, значит, и интеграл в левой части также). Следовательно, можно применить лемму 1 из п. 15, по которой функция

$$\int_{[a,\,z]} \varphi(\zeta)\, d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{[a,\,z]} (\zeta-a)^{n-1}\, d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

(мы снова воспользовались равномерной сходимостью) в каждой точке $z\in U$ имеет производную, равную $\varphi(z)$. Но тогда и функция

$$f(z)=c_0+\int\limits_{[a,\,z]}\varphi(\zeta)\,d\zeta$$

в каждой точке $z\in U$ имеет производную $f'(z)=\varphi(z)$ ▶

20. Свойства голоморфных функций. Отметим несколько следствий теоремы о голоморфности суммы степенного ряда.

Теорема 1. *Производная функции $f\subset H(D)$ голоморфна в области D.*

◀ Для любой точки $z_0\in D$ мы построим круг $U=\{|z-z_0|<R\}$, принадлежащий D. По теореме 1 п. 19 функция f в этом круге представляется как сумма степенного ряда. По теореме 5 п. 19 производная $f'=\varphi$ представляется рядом, сходящимся в том же круге. Поэтому к φ можно снова применить теорему 5, и, значит, φ дифференцируема в U в смысле комплексного анализа ▶

Из этой теоремы непосредственно вытекает необходимое условие существования первообразной, о котором говорилось в п. 15:

Следствие. *Если функция f имеет в области D первообразную F, то f голоморфна в D. (В иных терминах: всякая точная в области D дифференциальная форма $f\,dz=dF$ является замкнутой в D.)*

Повторным применением теоремы 1 получается

Теорема 1′. *Любая функция $f\in H(D)$ имеет в D производные всех порядков, также принадлежащие $H(D)$ (бесконечно дифференцируема).*

Следующая теорема утверждает единственность разложения функции в степенной ряд с данным центром.

Теорема 2. *Если функция f в круге $\{|z-z_0|<R\}$ представима как сумма степенного ряда*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$

то коэффициенты этого ряда определяются однозначно по формулам

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\qquad(n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{2}$$

◀ Подставляя в (1) $z=z_0$, найдем $f(z_0)=c_0$. Дифференцируя ряд (1) почленно:

$$f'(z)=c_1+2c_2(z-z_0)+3c_3(z-z_0)^2+\ldots,$$

и затем подставляя $z=z_0$, найдем $f'(z_0)=c_1$. Продифференцируем (1) n раз:

$$f^{(n)}(z)=n!\,c_n+c_1'(z-z_0)+c_2'(z-z_0)^2+\ldots$$

(мы не выписываем выражений для коэффициентов), и снова подставим $z=z_0$; получим $n!c_n=f^{(n)}(z_0)$ ▶

Теорему 2 иногда формулируют так: *всякий сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.*

Формула (2) позволяет писать тейлоровские разложения элементарных функций. Например, мы имеем

$$\begin{gathered}e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,\\ \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots,\qquad \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots;\end{gathered}\tag{3}$$

все три разложения справедливы всюду в $\mathbb{C}$ (их радиус сходимости $R=\infty$).

Сравнивая только что найденные значения c_n с первоначальными их значениями, вычисленными по формуле (3) п. 19, получим выражения для производных голоморфных функций:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).\tag{4}$$

Если f голоморфна в области D и $G\Subset D$ — область, ограниченная конечным числом непрерывных кривых и такая, что $z_0\in G$, то, пользуясь неизменностью интеграла при гомотопной деформации контура, мы можем заменить в последней формуле γ_r ориентированной границей ∂G. Получим интегральные формулы для производных голоморфных функций:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots)\tag{5}$$

(мы пишем z вместо z_0 и предполагаем, что $z\in G$).

Это формулы получаются из интегральной формулы Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

дифференцированием по параметру z под знаком интеграла. Наше косвенное рассуждение позволяет избежать доказательства законности такого дифференцирования.

Теорема 3 (Морера). *Если функция f непрерывна в области D и интеграл от нее по границе $\partial\Delta$ любого треугольника $\Delta\Subset D$ равен нулю, то $f\in H(D)$.*

◀ Для любой точки $a \in D$ построим круг $U = \{|z-a|<r\} \subset D$. По теореме 2 п. 15 функция

$$F(z) = \int\limits_{[a,\,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

голоморфна в U и $F'(z) = f(z)$ в каждой точке $z \in U$. По теореме 1 отсюда следует, что и f голоморфна в U. Тем самым доказана голоморфность f в каждой точке $a \in D$ ▶

Замечание. Теорема Мореры является обратной к основной лемме интегрального исчисления (п. 15), по которой интеграл от голоморфной в области D функции по границе любого треугольника $\Delta \Subset D$ равен нулю. Эту теорему можно рассматривать также как обратную к теореме Коши (она сильнее последней, в которой требуется, чтобы равнялся нулю интеграл от f по любому замкнутому пути $\gamma \subset D$, а не только по границам треугольников $\Delta \Subset D$). Однако в теореме Мореры вводится дополнительное условие непрерывности функции f. Это условие существенно: например, для функции, равной 0 всюду в $\mathbb{C}$, кроме одной точки, где она равна 1, интеграл по границе любого треугольника равен нулю, однако эта функция не голоморфна, ибо она даже не непрерывна.

В заключение приведем сводку результатов об эквивалентности различных определений голоморфности функции в точке:

Теорема 4. *Эквивалентны следующие три утверждения*:

(R) *функция f в некоторой окрестности U точки a имеет производную $f'(z)$ в смысле комплексного анализа*;

(C) *функция f непрерывна в некоторой окрестности U точки a, и интеграл от нее по границе любого треугольника $\Delta \Subset U$* равен нулю;

(W) *функция f разлагается в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности U точки a.*

Эти три утверждения отражают три концепции в построении теории голоморфных функций. Обычно функцию, удовлетворяющую условию (R), называют голоморфной в смысле Римана, условию (C) — голоморфной в смысле Коши и условию (W) — голоморфной в смысле Вейерштрасса.

Импликация (R) $\Rightarrow$ (C) доказана в теореме Коши (п. 16), (C) $\Rightarrow$ (R) — в теореме Мореры, (R) $\Rightarrow$ (W) — в теореме Тейлора, (W) $\Rightarrow$ (R) — в теореме о голоморфности суммы степенного ряда.

И, наконец, сделаем еще одно

Замечание. Мы убедились в том, что представимость функции f в круге $\{|z-a|<R\}$ в виде суммы сходящегося степенного ряда является необходимым и достаточным условием ее голоморфности в этом круге. Однако сходимость степенного

ряда в точках границы круга сходимости не связана с голоморфностью суммы ряда в этих точках. В этом можно убедиться на простых примерах.

В самом деле, напишем разложение в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{6}$$

сходящееся в круге $\{|z|<1\}$. Во всех точках окружности $\{|z|=1\}$ ряд (6) расходится, ибо его общий член не стремится к 0. Однако сумма этого ряда голоморфна во всех точках окружности, кроме $z=1$. С другой стороны, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}=f(z) \tag{7}$$

сходится во всех точках окружности круга сходимости $\{|z|=1\}$, ибо он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum \frac{1}{n^2}$. Однако его сумма f не может быть голоморфной в точке $z=1$, так как производная $f'(z)=\sum_{1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ при стремлении к 1 по действительной оси неограниченно возрастает.

21. Теорема единственности. Определение 1. *Нулем* функции f называется любая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$, в которой эта функция равна нулю, т. е. корень уравнения $f(z)=0$.

В действительном анализе нули дифференцируемых функций могут иметь предельные точки, в которых функция остается дифференцируемой (такова, например, точка $x=0$ для функции $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$). В комплексном анализе дело обстоит не так: нули голоморфной функции непременно изолированы, они могут иметь предельные точки лишь на границе области, в которой голоморфна эта функция [1]). Этот факт выражает

Теорема 1. *Если точка a является нулем голоморфной в этой точке функции f, не равной тождественно нулю ни в*

[1]) Заметим, что функция $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$ перестает быть голоморфной в точке $z=0$, ибо при $z\to 0$ по некоторым направлениям (например, по направлению мнимой оси) $\sin\frac{1}{z}$ стремится к бесконечности быстрее любой степени $\frac{1}{z}$.

какой окрестности a, то существует такое натуральное число n, что

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z), \tag{1}$$

где функция φ голоморфна в точке a и отлична от нуля в некоторой окрестности этой точки.

◀ В самом деле, в некоторой окрестности точки a функция f разлагается в степенной ряд. Свободный член этого ряда равен нулю, ибо $f(a)=0$, но все его коэффициенты не могут быть равными нулю, ибо тогда $f\equiv 0$ в некоторой окрестности a. Поэтому найдется отличный от нуля коэффициент с младшим номером, который мы обозначим через n, и разложение имеет вид

$$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\ldots,\quad c_n\neq 0. \tag{2}$$

Обозначим через

$$\varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-a)+\ldots$$

сумму ряда, сходящегося в некоторой окрестности a, и поэтому голоморфную в этой окрестности. Так как $\varphi(a)=c_n\neq 0$, то в силу непрерывности этой функции $\varphi\neq 0$ в некоторой окрестности a ▶

Теорема 2 (единственности). *Если две функции f_1, $f_2\in H(D)$ совпадают на множестве $\mathscr{E}$, которое имеет хотя бы одну предельную точку a, принадлежащую D, то $f_1=f_2$ всюду в D.*

◀ Функция $f=f_1-f_2\in H(D)$; нужно доказать, что $f\equiv 0$ в D, т. е. что множество $\mathscr{F}=\{z\in D\colon f(z)=0\}\supset\mathscr{E}$ совпадает с D. Предельная точка a является нулем f (в силу непрерывности последней). По теореме 1 функция $f=0$ в некоторой окрестности a, ибо иначе эта точка не могла быть предельной для множества нулей f.

Таким образом, открытое ядро $\mathring{\mathscr{F}}$ множества $\mathscr{F}$ (т. е. совокупность его внутренних точек) непусто — оно содержит точку a. По построению $\mathring{\mathscr{F}}$ открыто, но оно в то же время и замкнуто (в относительной топологии области D). В самом деле, если $b\in D$ является предельной точкой $\mathring{\mathscr{F}}$, то по той же теореме 1 функция $f\equiv 0$ в некоторой окрестности b, т. е. $b\in\mathring{\mathscr{F}}$. Так как D по определению области связно, то по теореме 3 п. 4 имеем $\mathring{\mathscr{F}}\equiv D$ ▶

Эта теорема также показывает существенное отличие понятия голоморфности функции от понятия дифференцируемости в смысле действительного анализа. В самом деле, две даже бесконечно дифференцируемые функции действительного переменного могут совпадать на части области определения, не совпадая тождественно (рис. 36). Но по доказанной теореме две

голоморфные функции, совпадающие на любом множестве, которое имеет предельную точку в области, где они голоморфны (например, на маленьком кружке или на дуге, принадлежащей области), совпадают тождественно во всей области.

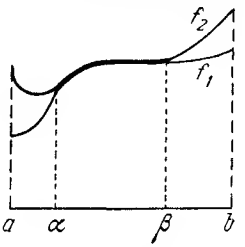


Рис. 36.

Заметим еще, что, пользуясь теоремой единственности, можно несколько упростить формулировку теоремы 1. Именно, условие, что функция f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки a, можно заменить условием, что она вообще не равна нулю тождественно (по теореме единственности эти условия совпадают).

Из теоремы 1 видно, что голоморфные функции обращаются в нуль, как целая степень $(z-a)$.

Определение 2. *Порядком нуля* $a \in \mathbb{C}$ функции f, голоморфной в этой точке, называется номер младшей отличной от нуля производной $f^{(k)}(a)$. Иными словами, точка a называется нулем f порядка n, если в этой точке

$$f(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \qquad (n \geqslant 1). \tag{3}$$

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ видно, что порядок нуля совпадает с номером младшего отличного от нуля коэффициента тейлоровского разложения функции в этой точке, т. е. с числом n, которое участвует в формулировке теоремы 1. Теорема единственности показывает, что голоморфные функции, не равные тождественно нулю, не могут иметь нулей бесконечного порядка.

Подобно тому, как это делается для многочленов, можно определить порядок нуля при помощи делимости. Именно, справедлива

Теорема 3. *Порядок нуля* $a \in \mathbb{C}$ *голоморфной функции* f *совпадает с порядком наивысшей степени* $(z-a)^k$, *на которую* f *«делится» в том смысле, что частное* $\dfrac{f(z)}{(z-a)^k}$ (*после продолжения по непрерывности в точку* a) *оказывается функцией, голоморфной в точке* a.

◀ Обозначим через n порядок нуля a и через N наивысший порядок степени бинома $(z-a)$, на которую делится f. Из формулы (1) видно, что f делится на любую степень $k \leqslant n$:

$$\frac{f(z)}{(z-a)^k} = (z-a)^{n-k}\,\varphi(z),$$

поэтому $N \geqslant n$. Пусть f делится на $(z-a)^N$, т. е. частное

$$\frac{f(z)}{(z-a)^N} = \psi(z)$$

представляет собой функцию, голоморфную в точке a. Разлагая ψ в ряд по степеням $(z-a)$, мы найдем, что тейлоровское разложение f с центром в точке a начинается со степени не ниже N. Поэтому $n \geqslant N$, и, объединяя это с полученным выше неравенством, найдем, что $N=n$ ▶

Пример. Функция $f(z)=\sin z - z$ имеет в точке $z=0$ нуль третьего порядка. В самом деле, имеем $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, но $f'''(0)\neq 0$. Это видно также из разложения

$$f(z)=\sin z - z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

Замечание. Пусть f голоморфна в бесконечности и равна там 0; *порядком* этого нуля естественно назвать порядок нуля в точке $z=0$ функции $\varphi(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$. Доказанная теорема останется справедливой и для точки $a=\infty$, если вместо деления на $(z-a)^k$ рассматривать умножение на z^k $(k=1, 2, \ldots)$.

Понятие порядка нуля можно распространить на A-точки голоморфных функций. Точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ называется *A-точкой* функции f, если $f(a)=A$. *Порядком* A-точки a функции f, голоморфной в этой точке, называется порядок a как нуля функции $f(z)-A$.

22. Теорема Вейерштрасса касается дифференцирования рядов из голоморфных функций. Как известно, в действительном анализе почленное дифференцирование рядов требует сходимости ряда в какой-либо точке и равномерной сходимости ряда из производных. В комплексном анализе ситуация упрощается. Имеет место

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Если ряд*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

из функций, голоморфных в некоторой области D, сходится равномерно на любом компактном подмножестве этой области, то

1) *сумма этого ряда f голоморфна в D;*

2) *ряд можно почленно дифференцировать в каждой точке D любое число раз.*

◀ Пусть a — произвольная точка D; построим круг $U=\{|z-a|<r\}\Subset D$. Так как ряд (1) по условию сходится на U равномерно, а его члены непрерывны в U, то его сумма f непрерывна в U. Обозначим через γ ориентированную границу лю-

бого треугольника $\Delta \subset U$. Так как ряд (1) сходится на γ равномерно, мы можем проинтегрировать его почленно вдоль γ:

$$\int_\gamma f\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n\,dz.$$

Но так как f_n голоморфны в U, то по теореме Коши все интегралы в правой части равны нулю. Следовательно, равен нулю и интеграл от f по γ. Мы можем применить теорему Мореры, по которой f голоморфна в U. Утверждение 1) доказано.

Для доказательства 2) опять возьмем произвольную точку $a \in D$, построим круг $U = \{|z-a|<r\} \Subset D$ и обозначим через $\gamma_r = \partial U$ окружность $\{|z-a|=r\}$. По формуле Коши для производных имеем

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

В силу равномерной сходимости на γ_r ряда

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-a)^{k+1}} \tag{3}$$

(он отличается от (1) множителем, модуль которого равен $\frac{1}{r^{k+1}}$ для всех $z \in \gamma_r$) мы можем подставить (3) в интеграл (2). Применяя формулы (2) к функциям f_n, найдем

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(a).$$

Утверждение 2) доказано ▶

В анализе особую роль играют ряды, составленные из полиномов. По теореме Вейерштрасса можно утверждать, что если ряд из полиномов

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \tag{4}$$

сходится равномерно на каждом компактном подмножестве некоторой области D, то его сумма f голоморфна в D.

Для практики важна обратная задача о приближении произвольной функции, голоморфной в области D, последовательностью полиномов, причем обычно требуется, чтобы такое приближение было равномерным на каждом компактном подмножестве D. Приведем точную постановку задачи о равномерном приближении полиномами.

Пусть задана область $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ и функция $f\in H(D)$. Требуется для любого множества $K\Subset D$ и любого $\varepsilon>0$ построить такой полином $P(z)$, чтобы

$$\|f-P\|_K=\sup_{z\in K}|f(z)-P(z)|<\varepsilon. \tag{5}$$

Эта задача равносильна задаче построения ряда из полиномов $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(z)$, который сходится к f равномерно на каждом компактном подмножестве области D. В самом деле, если такой ряд построен, то его частичные суммы с достаточно большими номерами, очевидно, удовлетворяют условиям задачи. Для доказательства обратного утверждения воспользуемся леммой о компактном исчерпывании:

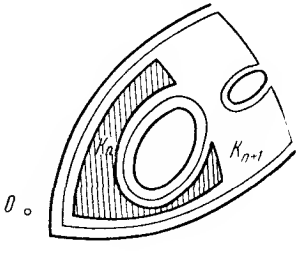


Рис. 37.

Лемма. *Для любой области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ можно построить компактное исчерпывание, т. е. последовательность таких замкнутых (в топологии $\overline{\mathbb{C}}$) множеств K_n, что*

$$K_1\subset K_2\subset\ldots\subset K_n\subset\ldots, \tag{6}$$

причем все $K_n\subset D$ и каждая точка $z\in D$ принадлежит всем K_n, начиная с некоторого $\left(D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n\right)$.

◀ В качестве K_n можно взять множества

$$K_n=\left\{z\in D\cap\{|z|\leqslant n\}:\ \rho(z,\partial D)\geqslant\frac{1}{n}\right\},$$

где $\rho(z,\partial D)$ — расстояние от точки z до границы области и $n=1, 2, \ldots$ (рис. 37) ▶

Замечание. Фиксируем точку $z_0\in D$ и обозначим через G_n связную компоненту открытого ядра $\overset{\circ}{K}_n$, содержащую z_0 (начиная с некоторого $n=n_0$ все они непусты). Тогда мы получим компактное исчерпывание D областями

$$G_1\Subset G_2\ldots\Subset G_n\Subset\ldots, \tag{7}$$

причем все $G_n\Subset D$ и $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$.

Так как функция $\rho(z,\partial D)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. для всех $z', z''\in D$ имеем

$$|\rho(z',\partial D)-\rho(z'',\partial D)|\leqslant|z'-z''|,$$

то границы областей G_n состоят из конечного числа спрямляемых кривых. Более того, покрывая $\overline{G}_n$ конечным числом кругов достаточно малого радиуса, мы можем построить последовательность областей G_n' с кусочно гладкими границами, также компактно исчерпывающую D.

Наконец, заметим, что если область D односвязна, то и области G_n ее компактного исчерпывания можно считать односвязными.

Вернемся к прерванному рассуждению. Пользуясь леммой, нетрудно доказать, что если для области D задача о равномерном приближении полиномами разрешима, то в ней любую функцию $f \in H(D)$ можно представить рядом из полиномов, равномерно сходящимся на каждом $K \Subset D$. В самом деле, построим компактное исчерпывание $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, как в лемме, и построим последовательность полиномов P_n таких, что

$$\|f - P_n\|_{K_n} \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Тогда ряд

$$P_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(z) - P_n(z)] \tag{9}$$

будет искомым. В самом деле, его n-я частичная сумма равна P_n и поэтому в силу (8) он сходится к f равномерно на каждом $K \Subset D$ (каждое $K \Subset D$ принадлежит всем K_n, начиная с некоторого номера, и, следовательно, $\|f - P_n\|_K < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, если n достаточно велико).

Если область D представляет собой круг $U = \{|z - a| < R\}$, то поставленную задачу решают полиномы Тейлора функции f с центром в точке a:

$$P_n(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n. \tag{10}$$

Действительно, мы знаем, что f представляется в U рядом Тейлора, причем этот ряд сходится равномерно на компактных подмножествах U.

Однако степенные ряды сходятся лишь в кругах, поэтому полиномы Тейлора непригодны для приближения функций в областях более общего вида. Вопрос о приближении функций в односвязных областях решает

Теорема 2 (Рунге). *Пусть функция f голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и K — произвольное компактное*

подмножество D. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется полином P такой, что

$$\|f-P\|_K<\varepsilon. \tag{11}$$

◀ Построим односвязную область G с кусочно гладкой границей $\partial G=\gamma$ такую, что $K\Subset G\Subset D$ (см. замечание после леммы). Для любой точки $z\in K$ по интегральной формуле Коши имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{12}$$

Докажем сначала, это f можно приблизить на K р а ц и о н а л ь н ы м и функциями. Для этого разобьем γ на участки точками ζ_ν ($\nu=1, \ldots, N$), взятыми в порядке обхода γ, обозначим через γ_ν участок γ между ζ_ν и $\zeta_{\nu+1}$, положим $\Delta\zeta_\nu=\zeta_{\nu+1}-\zeta_\nu$(мы считаем $\zeta_{N+1}=\zeta_1$) и рассмотрим рациональную функцию

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu-z}\,\Delta\zeta_\nu. \tag{13}$$

Имеем, очевидно,

$$f(z)-g(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{N}\int_{\gamma_\nu}\left\{\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu-z}\right\}d\zeta. \tag{14}$$

Так как функция $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ двух комплексных переменных z и ζ непрерывна на компактном множестве $K\times\gamma$ четырехмерного пространства (z, ζ) [1]), то она равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать γ_ν столь мелкими, что

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu-z}\right|<\varepsilon$$

для всех $\zeta\in\gamma_\nu$ и всех $z\in K$. Подставляя эту оценку в (14), найдем

$$\|f-g\|_K\leqslant\frac{1}{2\pi}\varepsilon|\gamma|,$$

где $|\gamma|$ — длина γ. Возможность приближения f рациональными функциями вида (13) доказана.

Остается показать, что любую функцию вида (13) можно приблизить равномерно на K п о л и н о м а м и. Для этого достаточно доказать, что на K равномерно приближается полино-

[1]) Через $A\times B$ обозначается произведение множеств A и B, т. е. совокупность всех пар (a, b), где $a\in A$ и $b\in B$.

мами любая функция $\frac{1}{\zeta_\nu - z}$, где $\zeta_\nu \in \partial G$ — произвольная точка. Докажем большее: пусть G' — область такая, что $K \Subset G' \Subset G$ и дополнение $\Delta = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G'}$ связно [1]); тогда множество

$$\mathscr{E} = \left\{ a \in \Delta: \frac{1}{a-z} \text{ приближается равномерно на } K \text{ полиномами} \right\}$$

совпадает с Δ.

Множество $\mathscr{E}$ непусто, ибо оно содержит внешность круга $\{|z|<R\}$, в котором лежит K. В самом деле, для любого a, $|a|>R$, функция $\frac{1}{a-z}$ голоморфна в $\{|z|\leqslant R\}$ и, следовательно, равномерно приближается в этом круге (а значит, и на K) своими полиномами Тейлора с центром $z=0$. Множество $\mathscr{E}$ замкнуто (в топологии Δ), ибо если последовательность точек $a_n \in \mathscr{E}$ сходится к некоторой точке $a \in \Delta$, то и последовательность функций $\frac{1}{a_n - z}$ равномерно на K сходится к $\frac{1}{a-z}$ (при $a=\infty$ последнюю надо заменить тождественным нулем), а так как все $\frac{1}{a_n - z}$ равномерно на K приближаются полиномами, то и $\frac{1}{a-z}$ — также. Но в то же время $\mathscr{E}$ и открыто: пусть $a_0 \in \mathscr{E}$ и a — любая точка из круга

$$|a - a_0| < \inf_{z \in K} |a_0 - z|;$$

имеем

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a_0 - a}{a_0 - z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_0 - a)^n}{(a_0 - z)^{n+1}},$$

причем ряд сходится равномерно на K, а так как $\frac{1}{a_0 - z}$ и, значит, $\frac{1}{(a_0 - z)^n}$ приближаются на K полиномами, то частные суммы этого ряда — тоже, т. е. $a \in \mathscr{E}$.

Таким образом, $\mathscr{E}$ является непустым и одновременно замкнутым и открытым подмножеством связного множества Δ; по теореме 3 п. 4 $\mathscr{E} = \Delta$ ▶

Замечание. По существу тем же методом доказывается, что любую функцию f, голоморфную на открытом (не обязательно связном) множестве D со связным дополнением, можно приблизить полиномами равномерно на каждом $K \Subset D$.

[1]) Такую область G' можно построить на основании доказанной леммы и односвязности области G.

(Вторая часть доказательства не меняется вовсе; в первой части нужно построить открытое множество G, $K \Subset G \Subset D$, с границей $\gamma = \partial G$, состоящей из конечного числа кусочно гладких кривых, и заметить, что формула (12) распространяется на этот случай.)

С другой стороны, для многосвязных областей задача о приближении голоморфных функций полиномами, вообще говоря, неразрешима. Причину этого мы выясним позже (см. п. 35).

§ 6. Ряды Лорана и особые точки

Ряды Тейлора приспособлены для представления голоморфных функций в кругах. Здесь мы рассмотрим более общие ряды по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$. Такие ряды представляют голоморфные функции в концентрических кольцах

$$V = \{z \in \mathbb{C}:\ r < |z-a| < R\}, \qquad r \geqslant 0,\ R \leqslant \infty.$$

Особенно важны разложения в кольцах с нулевым внутренним радиусом, т. е. проколотых окрестностях. Эти разложения позволяют изучать функции в окрестности точек, где они теряют голоморфность (особых точек).

23. Ряды Лорана. Теорема 1 (Лоран). *Любую функцию f, голоморфную в кольце $V = \{r < |z-a| < R\}$, можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=\rho\}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{2}$$

где $r < \rho < R$.

◀ Фиксируем произвольную точку $z \in V$ и построим кольцо $V' = \{\zeta:\ r' < |\zeta - a| < R'\}$ такое, что $z \in V' \Subset V$. По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3}$$

где окружности $\Gamma' = \{|\zeta - a| = R'\}$ и $\gamma' = \{|\zeta - a| = r'\}$ ориентированы против часовой стрелки.

Для всех $\zeta \in \Gamma'$ имеем $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = q < 1$, поэтому геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

сходится равномерно по ζ на Γ'. Умножая ее на ограниченную функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ (что не нарушает равномерной сходимости) и интегрируя почленно вдоль Γ', получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{4}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{5}$$

Второй интеграл в формуле (3) придется разлагать иначе. При всех $\zeta \in \gamma'$ имеем $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = q_1 < 1$, поэтому мы получаем равномерно сходящуюся на γ' геометрическую прогрессию так:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Снова умножая ее на ограниченную функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегрируя почленно вдоль γ', получаем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}, \tag{6}$$

где

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{7}$$

Заменим теперь в формулах (6) и (7) индекс n, пробегающий значения 1, 2, ..., индексом $-n$, пробегающим значения

$-1, -2, \ldots$ (это ничего не меняет), и обозначим [1])

$$c_n = d_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} f(\zeta)(\zeta - a)^{-n-1}\,d\zeta \qquad (n = -1, -2, \ldots); \quad (8)$$

тогда разложение (6) примет вид

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \quad (6')$$

Теперь подставим (4) и (6′) в (3); получим нужное разложение (1):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где ряд определяется как объединение рядов (4) и (6′). Остается заметить, что по теореме об инвариантности интеграла в формулах (5) и (8) окружности Γ' и γ' можно заменить любой окружностью $\{|\zeta - a| = \rho\}$, где $r < \rho < R$, и тогда эти формулы примут вид (2) ▶

Определение. Ряд (1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2), называется *рядом Лорана* функции f в кольце V. Совокупность членов этого ряда с неотрицательными степенями называется его *правильной частью*, а совокупность членов с отрицательными степенями — *главной частью* (естественность названий выяснится в следующем пункте).

Рассмотрим основные свойства рядов по целым степеням $z - a$. Как и выше, мы определим такой ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (9)$$

как объединение рядов

$$(\Sigma_1): \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{и} \quad (\Sigma_2): \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \quad (10)$$

Ряд (Σ_1) представляет обычный степенной ряд; его областью сходимости является круг $\{|z - a| < R\}$, где число R определяется по формуле Коши — Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (11)$$

[1]) Заметьте, что c с отрицательными индексами до сих пор не употреблялись.

Ряд (Σ_2) представляет степенной ряд относительно переменного $Z=\frac{1}{z-a}$:

$$(\Sigma_2):\ \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}Z^n. \tag{12}$$

Поэтому его областью сходимости является внешность круга $\{|z-a|>r\}$, где по формуле Коши — Адамара, примененной к ряду (12),

$$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}. \tag{13}$$

Число R не обязано быть бо́льшим r, поэтому область сходимости ряда (9) может быть пустой. Однако если $r<R$, то областью сходимости ряда (9) будет кольцо $V=\{r<|z-a|<R\}$. Заметим, что множество точек сходимости ряда (9) может отличаться от V на некоторую совокупность точек, принадлежащих ∂V.

По теореме Абеля ряд (9) сходится равномерно на любом компактном подмножестве кольца V, поэтому по теореме Вейерштрасса его сумма голоморфна в V.

Из этих замечаний сразу вытекает теорема единственности разложения функции в данном кольце в ряд по положительным и отрицательным степеням:

Теорема 2. *Если функция f в кольце $V=\{r<|z-a|<R\}$ представима рядом вида* (1), *то коэффициенты этого ряда определяются по формулам* (2).

◀ Возьмем окружность $\gamma=\{|z-a|=\rho\}$, $r<\rho<R$. Ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k=f(z)$$

сходится на ней равномерно, и это свойство сохранится после умножения обеих частей на произвольную степень $(z-a)^{-n-1}$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^{k-n-1}=\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}.$$

Проинтегрируем полученный ряд почленно вдоль γ:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\int_{\gamma}(z-a)^{k-n-1}\,dz=\int_{\gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

и воспользуемся тем, что по свойству ортогональности степеней (п. 14) все интегралы в левой части равны 0, кроме одного, для

которого $k=n$ и который равен $2\pi i$. Мы получим

$$2\pi i c_n = \int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

а это совпадает с (2) ▶

Теорему 2 можно сформулировать так: всякий сходящийся ряд по положительным и отрицательным степеням $z-a$ является рядом Лорана своей суммы.

Формулы (2) для коэффициентов ряда Лорана на практике применяются сравнительно редко, ибо они требуют вычисления интегралов. На основании доказанной теоремы единственности для получения лорановских разложений можно использовать любой законный прием: все такие приемы приведут к одному нужному результату

Пример. Функция

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

голоморфна в кольцах $V_1=\{0<|z|<1\}$, $V_2=\{1<|z|<2\}$ и $V_3=\{2<|z|<\infty\}$. Для получения лорановских разложений представим эту функцию в виде

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

В кольце V_1 слагаемые представляются такими геометрическими прогрессиями:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (\text{сходится при } |z|<2), \\ &-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad\qquad (\text{сходится при } |z|<1). \end{aligned} \tag{14}$$

Поэтому в V_1 функция f представляется рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,$$

который содержит лишь положительные степени (рядом Тейлора).

В кольце V_2 первое разложение (14) продолжает сходиться, а второе нужно заменить разложением

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n \quad (\text{сходится при } |z|>1). \tag{15}$$

В этом кольце, следовательно, f представляется рядом Лорана

$$f(z) = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

В кольце V_3 разложение (15) продолжает сходиться, а первое разложение (14) нужно заменить таким:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (\text{сходится при } |z|>2).$$

Следовательно, в V_3

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right)z^n.$$

Отметим, что коэффициенты ряда Лорана определяются по формулам (2), которые при $n \geqslant 0$ совпадают с интегральными формулами для коэффициентов ряда Тейлора[1]). Повторяя в точности выкладки, проведенные в п. 19 при выводе неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора, мы получим

Неравенства Коши (для коэффициентов ряда Лорана). *Пусть функция f голоморфна в кольце $V=\{r<|z-a|<R\}$ и на окружности $\gamma_\rho=\{|z-a|=\rho\}$, $r<\rho<R$, ее модуль не превосходит постоянной M. Тогда коэффициенты ряда Лорана функции f в кольце V удовлетворяют неравенствам*

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{16}$$

В заключение отметим связь между рядами Лорана и рядами Фурье. *Ряд Фурье* функции φ, интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]\subset\mathbb{R}$, определяется как ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, \tag{17}$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt,\quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt \quad (n=0,\ 1,\ \ldots) \tag{18}$$

---

[1]) Однако коэффициенты ряда Лорана нельзя представить по дифференциальной формуле $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ хотя бы потому, что f, вообще говоря, не определена при $z=a$.

(мы считаем $b_0=0$). Такой ряд можно переписать в комплексной форме. Для этого воспользуемся формулами Эйлера

$$\cos nt=\frac{e^{int}+e^{-int}}{2},\qquad \sin nt=\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}$$

и, подставив их в (17), найдем

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{int}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-int}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{int},$$

где положено

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,e^{-int}\,dt\qquad (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$c_n=\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,e^{-int}\,dt\qquad (n=-1,\ -2,\ \ldots).$$

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{int} \tag{19}$$

с коэффициентами

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,e^{-int}\,dt \tag{20}$$

и представляет собой ряд Фурье функции φ, записанный в комплексной форме.

Положим теперь $e^{it}=z$ и $\varphi(t)=f(e^{it})=f(z)$; тогда ряд (19) примет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n, \tag{21}$$

а его коэффициенты

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{int})\,e^{-int}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}f(z)\frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{22}$$

Таким образом, *ряд Фурье функции* $\varphi(t)$, $t\in[0,2\pi]$, *записанный в комплексной форме, является рядом Лорана функции* $f(z)=\varphi(t)$, *где* $z=e^{it}$, *на единичной окружности* $\{|z|=1\}$.

Очевидно, что и обратно, ряд Лорана функции $f(z)$ на единичной окружности является рядом Фурье функции $f(e^{it})=\varphi(t)$ на отрезке $[0,2\pi]$.

Отметим, что, вообще говоря, даже в случае сходимости ряда Фурье к функции φ в каждой точке отрезка $[0, 2\pi]$ для соответствующего ряда Лорана может получиться $R=r=1$, так что область сходимости этого ряда Лорана окажется пустой. Лишь при весьма ограничительных условиях, наложенных на функцию φ, соответствующий ряд имеет непустую область сходимости.

Пример. Пусть

$$\varphi(t)=\frac{a\sin t}{1-2a\cos t+a^2} \qquad (|a|<1).$$

Положив $e^{it}=z$, найдем соответствующую функцию

$$f(z)=\frac{1-z^2}{2i\left\{z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right\}}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-az}-\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right);$$

она голоморфна в кольце $\left\{|a|<|z|<\frac{1}{|a|}\right\}$. Как в предыдущем примере, получим ее лорановское разложение в этом кольце

$$f(z)=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right).$$

Заменяя здесь снова $z=e^{it}$, получим разложение Фурье функции φ:

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin nt.$$

24. Изолированные особые точки. Здесь мы начинаем изучение точек, в которых нарушается голоморфность функций. Рассмотрим сначала простейший тип таких точек.

Определение 1. Точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой функции* f, если существует такая проколотая окрестность этой точки (т. е. множество $\{0<|z-a|<r\}$, если точка a конечна, или множество $\{R<|z|<\infty\}$, если $a=\infty$), в которой функция f голоморфна.

В зависимости от поведения f при приближении к такой точке различают три типа особых точек.

Определение 2. Изолированная особая точка a функции f называется

(I) *устранимой точкой*, если существует конечный

$$\lim_{z\to a}f(z)=A;$$

(II) *полюсом*, если существует

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty;$$

(III) *существенно особой точкой*, если f не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Примеры.

1. Все три типа изолированных особых точек реализуются. Например, функции z и $\frac{\sin z}{z}$ имеют $z=0$ устранимой особой точкой (для второй из них это видно из того, что при $z \neq 0$ справедливо разложение

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots,$$

из которого следует, что существует $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$). Функции $\frac{1}{z^n}$, где n — целое положительное число, имеют полюс в точке $z=0$. Функция $e^{\frac{1}{z}}$ имеет $z=0$ своей существенно особой точкой, ибо, например, при стремлении $z=x$ к нулю по действительной оси пределы справа и слева различны (предел справа равен бесконечности, а слева — нулю); при стремлении $z=iy$ к нулю по мнимой оси функция $e^{\frac{1}{z}} = \cos\frac{1}{y} - i\sin\frac{1}{y}$ вообще не имеет предела.

Могут, конечно, существовать и неизолированные особые точки. Например, функция $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$ имеет полюсы в точках $z = \frac{1}{n}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, следовательно, $z=0$ является для нее неизолированной особой точкой — предельной точкой полюсов.

2. Более сложный пример особых точек доставляет функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots. \tag{1}$$

По формуле Коши — Адамара ряд (1) сходится в круге $\{|z|<1\}$, и, следовательно, f голоморфна в этом круге. При $z \to 1$ по направлению действительной оси она стремится к бесконечности [1]), следовательно, точка $z=1$ является для нее особой. Но

$$f(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + \ldots = f(z) - z^2,$$

следовательно, $f(z) = z^2 + f(z^2)$ стремится к бесконечности и когда $z \to -1$ по радиусу круга. Аналогично $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$, следовательно, $f \to \infty$ и когда $z \to \pm i$ по радиусам круга. Вообще

$$f(z) = z^2 + \ldots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

---

[1]) Это утверждение не следует из расходимости ряда (1) при $z=1$ (вспомните замечание в конце п. 14) и требует особого доказательства: при $z=x$, $0<x<1$, имеем $f(x) > \sum\limits_{n=0}^{N} x^{2^n}$, где N — произвольное натуральное число; предел при $x \to 1$ суммы в правой части равен $N+1$, следовательно, найдется $\delta>0$ такое, что $f(x)>N$ при $1-\delta<x<1$, следовательно, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \infty$.

для любого натурального n, поэтому $f \to \infty$, когда z стремится по радиусу к любой «двоичной» точке $z = e^{k\frac{2\pi i}{2^n}}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ окружности. Так как множество «двоичных» точек всюду плотно на окружности $\{|z|=1\}$, то каждая точка этой окружности является особой для f. Таким образом, f имеет целую линию, составленную из неизолированных особых точек (*особую линию*).

Характер изолированной особой точки $z=a$ тесно связан с характером лорановского разложения функции в проколотой окрестности этой точки (мы будем коротко называть его разложением в окрестности a). Для конечных точек a эта связь выражается следующими тремя теоремами.

Теорема 1. *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции f является устранимой в том и только том случае, если лорановское разложение f в окрестности a не содержит главной части*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2}$$

◀ Необходимость. Пусть a — устранимая точка; тогда существует конечный $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A$ и, следовательно, f ограничена (пусть $|f| \leqslant M$) в некоторой проколотой окрестности $\{0 < |z-a| < R\}$ точки a. Возьмем любое ρ, $0 < \rho < R$, и воспользуемся неравенствами Коши

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Если $n<0$, то правая часть стремится к нулю при $\rho \to 0$, левая же часть от ρ не зависит. Следовательно, $c_n = 0$ при $n<0$, и главная часть ряда Лорана отсутствует.

Достаточность. Пусть в проколотой окрестности точки a функция f представляется лорановским разложением (2) без главной части. Это разложение является тейлоровским, и, следовательно, существует и конечен

$$\lim_{z \to a} f(z) = c_0.$$

Поэтому a является устранимой точкой ▶

Замечание. Теми же рассуждениями доказывается и

Теорема 1′. *Изолированная особая точка a функции f в том и только том случае является устранимой, если f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a.*

Продолжив функцию f в ее устранимую точку a по непрерывности, т. е. положив $f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z)$, мы получим функцию,

голоморфную в точке a (т. е. устраним особенность). Этим и оправдывается термин «устранимая точка». В дальнейшем мы будем считать такие точки правильными, а не особыми точками функции.

Теорема 2. *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции f является полюсом в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения f в окрестности точки a содержит лишь конечное (и положительное) число отличных от нуля членов*:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad N > 0. \tag{3}$$

◀ Необходимость. Пусть a — полюс; так как $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, то существует проколотая окрестность точки a, в которой f голоморфна и отлична от нуля. В этой окрестности голоморфна функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, причем существует $\lim\limits_{z \to a} \varphi(z) = 0$. Следовательно, a является устранимой точкой (нулем) функции φ и в нашей окрестности справедливо разложение

$$\varphi(z) = b_N (z-a)^N + b_{N+1}(z-a)^{N+1} + \ldots \qquad (b_N \neq 0).$$

Но тогда в той же окрестности мы имеем

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \ldots}, \tag{4}$$

причем второй множитель является функцией, голоморфной в точке a, и, значит, допускает тейлоровское разложение

$$\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \ldots} = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \ldots \qquad \left(c_{-N} = \frac{1}{b_N} \neq 0\right).$$

Подставляя это разложение в (4), найдем

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Это — лорановское разложение f в проколотой окрестности точки a, и мы видим, что его главная часть содержит конечное число членов.

Достаточность. Пусть f в проколотой окрестности точки a представляется лорановским разложением (3), главная часть которого содержит конечное число членов; пусть еще $c_{-N} \neq 0$. Тогда f голоморфна в этой окрестности, так же как и

функция $\varphi(z)=(z-a)^N f(z)$. Последняя в нашей окрестности представляется разложением

$$\varphi(z)=c_{-N}+c_{-N+1}(z-a)+\ldots,$$

из которого видно, что a является устранимой точкой и существует $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=c_{-N}\neq 0$. Но тогда функция $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^N}$ стремится к бесконечности при $z\to a$, т. е. a является полюсом f ▶

Отметим еще один простой факт о связи полюсов с нулями.

Теорема 2′. *Точка a является полюсом функции f в том и только том случае, если функция $\varphi=\dfrac{1}{f}$, $\varphi\not\equiv 0$, голоморфна в окрестности a и $\varphi(a)=0$.*

◀ Необходимость условия доказана при доказательстве теоремы 2. Докажем его достаточность. Если $\varphi\not\equiv 0$ голоморфна в точке a и $\varphi(a)=0$, то по теореме единственности (п. 21) существует проколотая окрестность этой точки, в которой $\varphi\neq 0$. В этой окрестности функция $f=\dfrac{1}{\varphi}$ голоморфна, следовательно, a является изолированной особой точкой f. Но $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$, следовательно, a является полюсом f ▶

Установленная связь позволяет сформулировать

Определение 3. *Порядком полюса a* функции f называется порядок этой точки как нуля функции $\varphi=\dfrac{1}{f}$.

Из доказательства теоремы 2 видно, что порядок полюса совпадает с номером N старшего члена главной части лорановского разложения функции в проколотой окрестности полюса.

Теорема 3. *Изолированная особая точка a функции f является существенно особой в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения f в окрестности точки a содержит бесконечно много отличных от нуля членов.*

◀ Теорема, по существу, уже содержится в теоремах 1 и 2 (если главная часть содержит бесконечное число членов, то a не может быть ни устранимой точкой, ни полюсом; если a — существенно особая точка, то главная часть не может ни отсутствовать, ни содержать конечное число членов) ▶

Поведение функции в окрестности существенно особой точки характеризует следующая интересная

Теорема 3′ (Ю. В. Сохоцкий). *Если a является существенно особой точкой функции f, то для любого числа*

$A \in \overline{\mathbb{C}}$ можно найти последовательность точек $z_n \to a$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A. \tag{5}$$

◀ Пусть $A=\infty$. Так как f по теореме 1′ не может быть ограниченной в проколотой окрестности $\{0<|z-a|<r\}$, то в этой окрестности найдется точка z_1, в которой $|f(z_1)|>1$. Точно так же в $\left\{0<|z-a|<\frac{|z_1-a|}{2}\right\}$ найдется точка z_2, в которой $|f(z_2)|>2$, и т. д., в $\left\{0<|z-a|<\frac{|z_1-a|}{n}\right\}$ найдется точка z_n, в которой $|f(z_n)|>n$. Очевидно, $z_n \to a$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty.$$

Пусть теперь $A \neq \infty$. Либо A-точки функции f имеют a своей предельной точкой, и тогда из них можно выбрать последовательность $z_n \to a$, на которой $f(z_n)=A$, либо существует проколотая окрестность $\{0<|z-a|<r'\}$, в которой $f(z)\neq A$. В этой окрестности голоморфна функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A},$$

для которой a также является существенно особой точкой (ибо $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$ и если бы φ при $z \to a$ стремилась к конечному или бесконечному пределу, то f — также). По доказанному существует последовательность $z_n \to a$, по которой $\varphi(z_n) \to \infty$; но по этой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(z_n)} = A \ ▶$$

Совокупность предельных значений функции f по различным последовательностям точек $z_n \to a$ называют *множеством неопределенности* функции f в точке a. Если a является устранимой точкой или полюсом функции f, то ее множество неопределенности в этой точке состоит из одной точки (конечной или бесконечной). Теорема Сохоцкого утверждает, что для существенно особой точки реализуется другой крайний случай: множество неопределенности в такой точке заполняет всю замкнутую плоскость $\overline{\mathbb{C}}$.

Несколько слов об изолированных особых точках в бесконечности. Классификация и теоремы 1′—3′ переносятся на случай $a=\infty$ автоматически. Однако теоремы 1—3, связанные с характером лорановских разложений, нуждаются в измене-

ниях. Дело в том, что в конечных точках характер особенности определяют главные части лорановских разложений, содержащие отрицательные степени $z-a$, которые имеют особенность в этих точках (отсюда и термин «главная часть»). В бесконечности же отрицательные степени правильны и особенность определяется совокупностью положительных степеней. Поэтому естественно назвать главной частью лорановского разложения функции в проколотой окрестности бесконечной точки совокупность членов этого разложения с положительными степенями. После такого изменения теоремы 1—3 будут справедливыми и для случая $a=\infty$.

Этот результат сразу получается при помощи замены переменного $z=\frac{1}{w}$: если обозначить

$$f(z)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\varphi(w),$$

то, очевидно,

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{w\to 0}\varphi(w),$$

и поэтому φ имеет в точке $w=0$ ту же особенность, что f в точке $z=\infty$. Например, в случае полюса φ имеет в $\{0<|w|<r\}$ разложение

$$\varphi(w)=\frac{b_{-N}}{w^N}+\ \dots\ +\frac{b_{-1}}{w}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \qquad (b_{-N}\neq 0);$$

заменяя здесь $w=\frac{1}{z}$, получим разложение f в кольце $\{R<|z|<\infty\}$, $R=\frac{1}{r}$:

$$f(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n z^n+c_0+c_1 z+\ \dots\ +c_N z^N,$$

где $c_n=b_{-n}$, $c_N\neq 0$. Его главная часть содержит конечное число членов. Аналогично рассматриваются случаи устранимой и существенно особой точек.

В заключение приведем классификацию простейших голоморфных функций по их особым точкам. Согласно теореме Лиувилля функции, совсем не имеющие особенностей (т. е. голоморфные в $\overline{\mathbb{C}}$), являются константами. Следующий по простоте класс составляют целые функции.

Определение 4. *Целой* называется функция, голоморфная во всей плоскости $\mathbb{C}$, т. е. не имеющая конечных особых точек.

Точка $a=\infty$ является, следовательно, изолированной особой точкой целой функции f. Если это — устранимая точка, то $f\equiv\text{const}$. Если это — полюс, то главная часть лорановского разложения f в окрестности бесконечности представляет собой полином $g(z)=c_1z+\ldots+c_Nz^N$. Вычитая из f эту главную часть, получим также целую функцию, $f-g$, но уже с устранимой точкой в бесконечности. Она является константой, и следовательно, *целая функция с полюсом в бесконечности непременно является полиномом.*

Целые функции с существенной особенностью в бесконечности называются *целыми трансцендентными* функциями (таковы, например, функции e^z, $\sin z$, $\cos z$).

Определение 5. Функция, не имеющая в открытой плоскости $\mathbb{C}$ других особенностей, кроме полюсов, называется *мероморфной.*

Целые функции составляют подкласс класса мероморфных функций (они вовсе не имеют особенностей в $\mathbb{C}$). Так как каждый полюс — изолированная особая точка, то мероморфная функция не может иметь в $\mathbb{C}$ более чем счетное множество полюсов. В самом деле, в каждом круге $\{|z|<n\}$, $n=1, 2, \ldots$, полюсов может быть лишь конечное число (иначе существовала бы их конечная предельная точка, которая является неизолированной особой точкой функции, а не полюсом) и все полюсы можно пересчитать. Примерами мероморфных функций с бесконечным числом полюсов являются $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$.

Теорема 4. *Если мероморфная функция f в бесконечности имеет устранимую точку или полюс (т. е. если она в $\overline{\mathbb{C}}$ не имеет других особенностей, кроме полюсов), то она является рациональной функцией.*

◀ Число всех полюсов функции f конечно, ибо в противном случае в силу компактности $\overline{\mathbb{C}}$ существовала бы предельная точка полюсов, которая является неизолированной особой точкой, а не полюсом. Обозначим через a_ν $(\nu=1, \ldots, n)$ конечные полюсы f и через

$$g_\nu(z)=\frac{c_{-N_\nu}^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^{N_\nu}}+\ldots+\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{z-a_\nu} \tag{6}$$

главную часть лорановского разложения f в окрестности полюса a_ν. Обозначим еще

$$g(z)=c_1z+\ldots+c_Nz^N \tag{7}$$

главную часть лорановского разложения f в окрестности $a=\infty$; если $a=\infty$ является устранимой точкой f, положим $g\equiv 0$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(z);$$

она имеет все точки $z \in \bar{\mathbb{C}}$ правильными, и по теореме Лиувилля $\varphi(z) \equiv c_0$. Таким образом,

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(z), \tag{8}$$

т. е. является рациональной функцией ▶

Замечание. Формула (8) представляет собой разложение рациональной функции f на целую часть и простейшие дроби. Наше рассуждение дает простое доказательство существования такого разложения.

Иногда мы будем употреблять термин «мероморфная функция» в более общем смысле. Именно, будем говорить, что функция f *мероморфна в области* D, если она не имеет в D других особенностей, кроме полюсов. И такая функция не может иметь более чем счетное число полюсов. В самом деле, мы построим компактное исчерпывание $\{G_n\}$ области D (см. лемму в п. 22) и увидим, что в каждой G_n функция f может иметь лишь конечное число полюсов. Если число полюсов функции f, мероморфной области D, бесконечно, то предельные точки множества полюсов принадлежат границе ∂D.

25. Вычеты. Это звучит парадоксально, но наиболее интересными при изучении голоморфных функций являются точки, в которых функции перестают быть голоморфными — их особые точки. В дальнейшем мы будем иметь много фактов, убеждающих в том, что в особых точках и главных частях лорановских разложений в их окрестностях содержится основная информация о голоморфных функциях [1]).

Мы проиллюстрируем это утверждение задачей о вычислении интегралов от голоморфных функций. Пусть функция f голоморфна в области D всюду, за исключением изолированного и, следовательно, не более чем счетного множества особых точек. Пусть область $G \Subset D$ и граница ∂G состоит из конечного числа непрерывных кривых и не содержит особых точек; особые точки, попавшие в G, мы обозначим $a_1, \ldots, a_n$ (их

[1]) Это утверждение допускает физическую интерпретацию. Если трактовать голоморфную функцию как комплексный потенциал векторного поля, скажем поля скоростей течения жидкости (см. п. 7), то особые точки будут интерпретироваться как источники, стоки, вихри и другие элементы, определяющие это поле. Об этом см. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, цит. на стр. 42.

конечное число). Построим окружности $\gamma_\nu = \{|z - a_\nu| = r\}$ столь малого радиуса r, что круги $\overline{U}_\nu$, ими ограниченные, не пересекаются друг с другом и содержатся в G. Пусть γ_ν ориентированы против часовой стрелки (рис. 38). Обозначим область $G \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} \overline{U}_\nu$ через G_r; функция f голоморфна в $\overline{G}_r$, следовательно, по интегральной теореме Коши для многосвязных областей

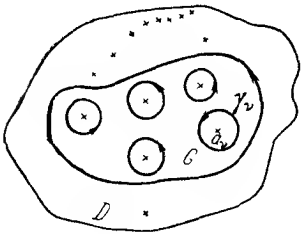


Рис. 38.

$$\int_{\partial G_r} f\,dz = 0. \tag{1}$$

Но ориентированная граница ∂G_r состоит из ∂G и ориентированных отрицательно окружностей γ_ν^- ($\nu = 1, \ldots, n$), и по свойствам интегралов мы получаем

$$\int_{\partial G} f\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} f\,dz. \tag{2}$$

Таким образом, вычисление интеграла от голоморфной функции по границе области сводится к вычислению ее интегралов по сколь угодно малым окружностям с центрами в особых точках функции.

Определение 1. Интеграл от функции f по достаточно малой окружности $\gamma_r = \{|z - a| = r\}$ с центром в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ этой функции, деленный на $2\pi i$, называется *вычетом* f в точке a и обозначается символом

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f\,dz. \tag{3}$$

По теореме о неизменности интеграла при гомотопной деформации контура вычет не зависит от величины r (при r достаточно малых) и определяется локальным поведением f в ее особой точке.

Доказанное выше соотношение (2) выражает так называемую теорему Коши о вычетах.

Теорема 1. *Пусть функция f голоморфна в области D всюду, за исключением изолированного множества особых точек, и область $G \Subset D$, а ее граница ∂G не содержит особых точек; тогда*

$$\int_{\partial G} f\,dz = 2\pi i \sum_{(G)} \operatorname*{res}_{a_\nu} f, \tag{4}$$

где сумма распространяется на все особые точки a_ν функции f, принадлежащие G.

Эта теорема имеет большое принципиальное значение, ибо она сводит вычисление глобальной величины, какой является интеграл от голоморфной функции по границе области, к вычислению величин локальных — вычетов функции в ее особых точках.

Как мы сейчас увидим, вычеты функции в ее особых точках полностью определяются главными частями лорановских разложений в окрестностях этих точек. Тем самым будет установлено, что в задаче о вычислении интегралов от голоморфной функции достаточно иметь информацию лишь об ее особых точках и главных частях в них.

Теорема 2. *Вычет функции f в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту при минус первой степени $z-a$ в ее лорановском разложении в окрестности a:*

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}. \tag{5}$$

◀ В проколотой окрестности точки a функция f представляется рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причем на окружности $\gamma_r = \{|z-a| = r\}$ при достаточно малых r этот ряд сходится равномерно. Интегрируя ряд почленно вдоль γ_r и пользуясь ортогональностью степеней (п. 14), мы найдем

$$\int_{\gamma_r} f\,dz = c_{-1} \cdot 2\pi i.$$

Вспоминая определение вычета, получим (5) ▶

Следствие. *В устранимой точке $a \in \mathbb{C}$ вычет функции равен нулю.*

Приведем формулы для вычисления вычета функции в полюсе. Пусть сначала a — полюс первого порядка. Лорановское разложение функции в его окрестности имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Отсюда сразу получается формула для вычисления вычета в полюсе первого порядка:

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \tag{6}$$

Особенно удобна для вычислений небольшая модификация этой формулы. Пусть в окрестности точки a

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где φ и ψ голоморфны в a, причем $\varphi(a)\neq 0$ и $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$ (отсюда следует, что a — полюс первого порядка функции f). Тогда по формуле (6)

$$c_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}},$$

т. е.

$$c_{-1}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{6'}$$

Пусть теперь f имеет в точке a полюс n-го порядка; тогда в проколотой окрестности a

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k.$$

Умножим обе части этого разложения на $(z-a)^n$ для устранения отрицательных степеней в правой части, затем продифференцируем $n-1$ раз (чтобы выделить справа c_{-1}) и перейдем к пределу при $z\to a$. Мы получим формулу для вычисления вычета в полюсе n-го порядка:

$$c_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}. \tag{7}$$

Для вычисления вычетов в существенно особых точках аналогичных формул не существует, и надо находить главные части лорановского разложения.

Несколько слов о вычете в бесконечности.

Определение 2. Пусть функция f имеет ∞ своей изолированной особой точкой; ее *вычетом в бесконечности* называется величина

$$\operatorname*{res}_{\infty} f=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R^-} f\,dz, \tag{8}$$

где γ_R^- — окружность $\{|z|=R\}$ достаточно большого радиуса, проходимая по часовой стрелке.

Ориентация γ_R^- выбрана так, чтобы во время ее обхода окрестность бесконечной точки $\{R<|z|<\infty\}$ оставалась слева. Напишем разложение Лорана функции f в этой окрестности:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Интегрируя его почленно вдоль γ_R^- и пользуясь ортогональностью степеней, мы найдем

$$\operatorname*{res}_{\infty} f=-c_{-1}. \tag{9}$$

Члены с отрицательными степенями входят в правильную, а не в главную часть лорановского разложения в бесконечности. Поэтому, в отличие от конечных точек, вычет в бесконечности может быть не равным нулю и в том случае, когда $z=\infty$ является правильной точкой функции.

Приведем еще простую теорему о полной сумме вычетов.

Теорема 3. *Пусть функция f голоморфна всюду в плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа точек a_ν $(\nu=1, \ldots, n)$; тогда сумма ее вычетов во всех конечных особых точках и вычета в бесконечности равна нулю*:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_\nu} f+\operatorname*{res}_{\infty} f=0. \tag{10}$$

◀ Построим окружность $\gamma_R=\{|z|=R\}$ столь большого радиуса, что она содержит внутри все конечные особые точки a_ν; пусть γ_R ориентирована против часовой стрелки. По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f\,dz=\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_\nu} f;$$

по теореме о гомотопии (п. 16) величина в левой части равенства не меняется при дальнейшем увеличении R; следовательно, эта величина равна вычету f в бесконечности, взятому со знаком минус (учтите направление обхода). Таким образом, последнее равенство равносильно (10) ▶

Пример. При вычислении интеграла

$$I=\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2}$$

нет нужды вычислять вычеты подинтегральной функции во всех ее восьми полюсах второго порядка, лежащих внутри окружности $\{|z|=2\}$. К этой функции

применима теорема о полной сумме вычетов, по которой

$$\sum_{\nu=1}^{8} \operatorname*{res}_{a_\nu} \frac{1}{(z^8+1)^2} + \operatorname*{res}_{\infty} \frac{1}{(z^8+1)^2} = 0.$$

Но функция имеет в бесконечности нуль шестнадцатого порядка, поэтому ее лорановское разложение в окрестности $z=\infty$ содержит лишь отрицательные степени, начиная с z^{-16}. Поэтому ее вычет в бесконечности равен 0, следовательно, равна нулю и сумма вычетов в конечных особых точках, т. е. $I=0$.

В заключение приведем пример применения теоремы Коши о вычетах к вычислению несобственных интегралов от функций действительного переменного. Вычислим интеграл вдоль действительной оси

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, dt, \qquad (11)$$

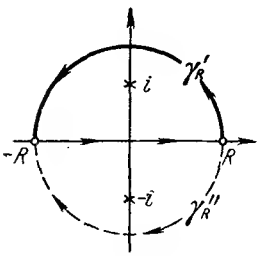


Рис. 39.

где t — действительное число (он абсолютно сходится, ибо мажорируется сходящимся интегралом от функции $\frac{1}{1+x^2}$).

Методика применения вычетов такова. Продолжаем подинтегральную функцию в комплексную плоскость

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

затем выбираем замкнутый контур так, чтобы он содержал отрезок $[-R, R]$ прямой интегрирования и какую-либо дугу, соединяющую концы отрезка. К этому замкнутому контуру применяется теорема Коши о вычетах, а затем делается предельный переход при $R \to \infty$. Если при этом удастся вычислить предел интеграла по дополнительной дуге, то задача будет решена.

Пусть $z=x+iy$; учитывая, что $|e^{izt}| = e^{-yt}$, мы будем различать два случая: $t \geqslant 0$ и $t<0$. В первом случае мы замкнем отрезок $[-R, R]$ верхней полуокружностью γ_R', проходимой против часовой стрелки (рис. 39). При $R>1$ внутри образовавшегося контура лежит один полюс f первого порядка $z=i$, вычет в котором легко находится по формуле (6′):

$$\operatorname*{res}_{i} \frac{e^{izt}}{1+z^2} = \frac{e^{-t}}{2i}.$$

По теореме Коши о вычетах имеем, следовательно,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R'} f(z)\,dz = \pi e^{-t}. \tag{12'}$$

Так как при $t \geqslant 0$ на γ_R' имеем $|e^{itz}| = e^{-yt} \leqslant 1$ и $|z^2+1| \geqslant R^2-1$, то для интеграла по γ_R' справедлива оценка

$$\left| \int_{\gamma_R'} \frac{e^{izt}}{1+z^2}\,dz \right| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-1}, \tag{13}$$

из которой видно, что этот интеграл стремится к нулю при $R \to \infty$. Поэтому, переходя в (12') к пределу при $R \to \infty$, мы получаем при $t \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \pi e^{-t}. \tag{14'}$$

При $t<0$ оценка (13) несправедлива, ибо $|e^{izt}| = e^{-yt}$ сильно возрастает при $y \to +\infty$. Поэтому мы заменим дугу γ_R' дугой γ_R'' нижней полуокружности (рис. 39). Пусть она проходится по часовой стрелке, тогда по теореме Коши о вычетах при $R>1$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R''} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{-i} f = \pi e^{t}. \tag{12''}$$

Так как при $t<0$ на γ_R'' имеем $|e^{izt}| = e^{-yt} \leqslant 1$ и $|z^2+1| \geqslant R^2-1$, то интеграл от f по γ_R'' также стремится к нулю при $R \to \infty$, и из (12'') в пределе получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \pi e^{t}. \tag{14''}$$

Объединяя формулы (14') и (14''), получаем окончательный результат:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|t|}. \tag{15}$$

В дальнейшем мы не раз будем пользоваться вычетами для вычисления различных интегралов. Приведем в заключение лемму, полезную при таких вычислениях.

Лемма (Жордан). *Пусть функция f голоморфна в $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ всюду, за исключением изолированного множества особых точек, и $M(R)=\max|f(z)|$ на полуокружности $\gamma_R=\{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ стремится к нулю при $R\to\infty$ (или по последовательности $R_n\to\infty$ такой, что γ_{R_n} не содержат особых точек f). Тогда для любого $\lambda>0$*

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)\, e^{i\lambda z}\, dz \tag{16}$$

стремится к нулю при $R\to\infty$ (или по соответствующей последовательности $R_n\to\infty$).

(Смысл леммы состоит в том, что $M(R)$ может стремиться к нулю сколь угодно медленно, так что интеграл от f по γ_R не обязан стремиться к нулю; умножение на экспоненту $e^{i\lambda z}$ с $\lambda>0$ убыстряет стремление к нулю.)

◀ Обозначим через $\gamma_R'=\left\{z=\operatorname{Re}^{i\varphi}\colon\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$ правую половину γ_R. В силу выпуклости синуса при $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ имеем $\sin\varphi\geqslant\frac{2}{\pi}\varphi$, и, значит, на γ_R' справедлива оценка $|e^{i\lambda z}|=e^{-\lambda R\sin\varphi}\leqslant e^{-\frac{2\lambda R\varphi}{\pi}}$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{\gamma_R'} f(z)\, e^{i\lambda z}\, dz\right|\leqslant M(R)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R\varphi}{\pi}} R\, d\varphi = M(R)\,\frac{\pi}{2\lambda}\,(1-e^{-\lambda R}),$$

и интеграл по γ_R' стремится к нулю при $R\to\infty$. Оценка для $\gamma_R''=\gamma_R\setminus\gamma_R'$ проводится аналогично ▶

Как видно из доказательства, условие голоморфности f в этой теореме не существенно.

ЗАДАЧИ

1. Интегралом типа Коши называется интеграл вида

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

где γ — гладкая (или спрямляемая) кривая, а f — непрерывная (или суммируемая) на γ функция. Доказать, что F является функцией, голоморфной в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\gamma$ и равной нулю в бесконечности.

2. Пусть γ — гладкая замкнутая жорданова кривая, D — область такая, что $\gamma=\partial D$ и $f\in C^1(\gamma)$. Показать, что при переходе через γ интеграл типа Коши испытывает скачок, равный значению f в точке перехода. Точнее: если $\zeta_0\in\gamma$, а $z\to\zeta_0$, оставаясь соответственно внутри D или вне D, то $F(z)$ имеет предельные значения $F^+(\zeta_0)$ и $F^-(\zeta_0)$, причем

$$F^+(\zeta_0)-F^-(\zeta_0)=f(\zeta_0)$$

(формула Ю. В. Сохоцкого). [Указание: представить $F(z)$ в виде

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{f(\zeta_0)}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right].$$

3. В предположениях предыдущей задачи доказать, что каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы интеграл типа Коши был интегралом Коши:

а) $\displaystyle\int_\gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=0$ для всех $z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}$;

б) $\displaystyle\int_\gamma\zeta^n f(\zeta)\,d\zeta=0$ для всех $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

4. Доказать, что интеграл

$$F(z)=-\frac{1}{\pi}\int\int_D\frac{f(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta-z},\qquad(*)$$

где $\zeta=\xi+i\eta$, D — компактная область, а f — гладкая в D ограниченная функция, а) является голоморфной в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}$ функцией, равной нулю в бесконечности, б) в любой точке $z\in D$ имеем

$$\frac{\partial F}{\partial\bar z}=f(z).$$

[Решение. Утверждение а) проверяется непосредственно. Для доказательства б) предположим сначала, что $f\in C^1(D)$ и что $f=0$ в окрестности ∂D. Продолжим f на всю плоскость, считая ее равной нулю вне D, и будем считать, что в (*) интегрирование распространяется на всю плоскость. Заменой переменного $\zeta\to\zeta+z$ получим, что

$$F(z)=-\frac{1}{\pi}\int\int\frac{f(z+\zeta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta}.$$

В принятых условиях законно дифференцирование под знаком интеграла, поэтому в любой точке $z\in D$ существует

$$\frac{\partial F}{\partial\bar z}=-\frac{1}{\pi}\int\int\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\xi}\,d\xi\,d\eta}{\zeta-z}$$

(мы вернулись к прежнему переменному интегрирования). Возьмем теперь область $G\Subset D$ так, чтобы всюду на ∂G было $f=0$, тогда по формуле Коши —

Грина из п. 18 получим, что интеграл в правой части равен $f(z)$, — в дополнительных условиях утверждение доказано. В общем случае нужно воспользоваться тем, что любую гладкую в D функцию можно приблизить равномерно на любом компакте из D функциями, удовлетворяющими нашим дополнительным условиям.]

5. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ голоморфна в замкнутом круге $\bar{U}=\{|z|\leqslant R\}$ и $a_0\neq 0$. Доказать, что тогда f отлична от нуля в круге $\left\{|z|<\frac{|a_0|R}{|a_0|+M}\right\}$, где $M=\max\limits_{z\in\partial U}|f(z)|$.

6. Доказать, что степенной ряд не может сходиться ни в одной граничной точке круга сходимости, если там имеется хотя бы один полюс разлагаемой в ряд функции.

7. Доказать, что любая целая функция f, не принимающая значений из правой полуплоскости, постоянна.

8. Вывести теорему Сохоцкого для целых функций из теоремы Лиувилля.

9. Пусть a является существенно особой точкой функции f; чем может служить a для функции $\frac{1}{f}$? (Ответ: предельной точкой полюсов или существенно особой точкой.)

10. Доказать теорему Сохоцкого для предельной точки полюсов.

11. Пусть f голоморфна в круге $|z|<1$ и ряд

$$f(z)+f'(z)+f''(z)+\ldots$$

сходится в точке $z=0$. Покажите, что f можно продолжить до целой функции, причем указанный ряд сходится равномерно на всяком компактном подмножестве плоскости $\mathbb{C}$.

12. Если f голоморфна и равномерно ограничена в правой полуплоскости и если $f(n)=0$ для любого целого $n>0$, то $f\equiv 0$.

13 (В. И. Гаврилов). Если $f(z)=z+\sum_{n\geqslant 2} a_n z^n$ голоморфна и однолистна в $\{|z|<1\}$ и $|a_n|\leqslant n$ для всех n, то f и все $f_n(z)=z+\sum_{k=2}^{n} a_k z^k$ однолистны в круге $\{|z|<\tau\}$, где τ — действительный корень уравнения

$$2(1-\tau)^3-(1+\tau)=0.$$

Оценка τ достигается для

$$f_0(z)=2z-\frac{z}{(1-z)^2}=z-2z^2-3z^3-\ldots.$$

[Указание: воспользоваться тем, что

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right|\geqslant 1-\sum_{n\geqslant 2} n^2 r^{n-1}=2-\frac{1+r}{(1-r)^3} \quad \text{при} \quad |z_1|,\ |z_2|\leqslant r.$$

Заметим, что знаменитая гипотеза Бибербаха, по которой для функций $f(z)=z+\sum_{n\geqslant 2} a_n z^n$, голоморфных в $\{|z|<1\}$ и однолистных там, $|a_n|\leqslant n$ для всех n, до сих пор не доказана и не опровергнута.]

ГЛАВА III

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрим еще одно из самых основных понятий комплексного анализа — понятие аналитического продолжения. Оно позволит нам, в частности, ввести так называемые многозначные аналитические функции.

Самые простые задачи приводят к необходимости рассматривать многозначные решения. Например, уравнение $z=w^2$ при любом фиксированном $z\neq 0$ имеет два решения, отличающиеся знаком. Совокупность этих решений — мы обозначим ее $\sqrt{z}$ — нельзя рассматривать как функцию от z, ибо функция по определению однозначна. Попытка отказаться от условия однозначности в определении функции сразу привела бы к значительным неудобствам. В самом деле, какой смысл, например, надо вложить в сумму $\sqrt{z}+\sqrt{z}$, если каждое слагаемое принимает два значения? Самые простые действия анализа с такими «многозначными функциями» оказались бы весьма затрудненными [1]). Понятие аналитического продолжения позволяет снять такого рода затруднения.

§ 7. Понятие аналитического продолжения

26. Элементы аналитических функций. Мы начнем с изучения понятия аналитического продолжения, оставаясь в рамках теории однозначных (голоморфных) функций. С этой точки зрения под *аналитическим продолжением* функции f_0, заданной первоначально на некотором множестве $M\subset\mathbb{C}$, мы будем понимать доопределение ее до функции f, заданной в некоторой области $D\supset M$, такое, что f голоморфна в D, а ее сужение на множество M совпадает с f_0:

$$f|_M=f_0.$$

---

[1]) Если складывать $\sqrt{z}+\sqrt{z}$ как совокупности, то эта сумма будет уже трехзначной (ее значения: $2\omega_1$, $-2\omega_1$ и 0, где ω_1 — одно из двух значений $\sqrt{z}$). Складывать лишь значения с «одинаковым» знаком? Но это в комплексном анализе совсем бессмысленно: пусть $\sqrt{z_1}=\pm(1+i)$, а $\sqrt{z_2}=\pm(1-i)$; какие знаки слагаемых в сумме $\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}$ одинаковы?

Такую задачу можно решать самыми различными способами. В первой главе, например, мы аналитически продолжали функции e^x, $\sin x$ и другие, заданные на действительной оси $\mathbb{R}$, на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Функция $\dfrac{\sin z}{z}$ задана в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (она не определена при $z=0$); написав ее разложение в ряд по степеням z:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots,$$

мы при его помощи получим продолжение этой функции на всю плоскость $\mathbb{C}$ (такое продолжение равносильно доопределению в точке $z=0$ по непрерывности).

Напротив, сумма ряда

$$f_0(z) = 1 + z + z^2 + \ldots$$

определена (и голоморфна) лишь в круге $\{|z|<1\}$, ибо при $|z|\geqslant 1$ ряд расходится. Однако просуммировав эту геометрическую прогрессию, мы найдем, что $f_0(z) = \dfrac{1}{1-z}$, и полученная формула дает аналитическое продолжение функции f_0 в область $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Рассмотрим менее тривиальный пример. *Гамма-функция* Эйлера при $\operatorname{Re} z>0$ определяется интегралом по положительной полуоси

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{1}$$

где под t^{z-1} для $t>0$ понимается $e^{(z-1)\ln t}$. Функции

$$F_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

— целые, ибо интеграл можно дифференцировать по параметру в любой точке плоскости. Так как на любом компактном подмножестве правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} z>0\}$ последовательность $\{F_n\}$ равномерно по z сходится к $\Gamma(z)$, то по теореме Вейерштрасса гамма-функция голоморфна в правой полуплоскости.

Если $x=\operatorname{Re} z\leqslant 0$, то интеграл (1) перестает сходиться из-за того, что подинтегральная функция слишком быстро возрастает при $t\to 0$ (у нас $|t^{z-1}| = e^{\operatorname{Re}(z-1)\ln t} = t^{x-1}$, а $e^{-t}\to 1$ при $t\to 0$). Мы улучшим сходимость при $t=0$, если вычтем из e^{-t} начальные члены ее тейлоровского разложения в нуле и тем самым получим множитель, стремящийся к нулю при $t\to 0$. При $\operatorname{Re} z>0$ мы получим на этом пути

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^k\right) t^{z-1}\, dt + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

или, вычисляя элементарные интегралы,

$$\Gamma(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k}=$$

$$=\int_0^1\left(e^{-t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}t^k\right)t^{z-1}\,dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt. \qquad (2)$$

В этом равенстве второй интеграл справа — целая функция (см. выше), первый интеграл сходится равномерно по z на любом компактном подмножестве полуплоскости $\{\operatorname{Re} z>-(n+1)\}$ $\left(\text{ибо } e^{-t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}t^k=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^k \text{ стремится к нулю при } t\to 0\right.$ со скоростью t^{n+1}) и, значит, представляет собой функцию, голоморфную в этой полуплоскости.

Таким образом, равенство (2) позволяет аналитически продолжить разность $\Gamma(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)}{k!}\frac{1}{z+k}$ в полуплоскость $\{\operatorname{Re} z>-(n+1)\}$, а сама $\Gamma(z)$ оказывается продолженной до функции, мероморфной в этой полуплоскости. Так как в качестве n можно взять любое натуральное число, мы получаем мероморфное продолжение гамма-функции на всю плоскость. Мы видим также, что продолженная функция имеет в нуле и отрицательных целых точках полюсы первого порядка, причем вычет в полюсе $z=-k$ равен $\frac{(-1)^k}{k!}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. На рис. 40 приведена поверхность модуля гамма-функции, на которой нанесены также линии равного модуля и аргумента.

Метод улучшения сходимости, который здесь продемонстрирован, называется *методом Коши*; в гл. V мы еще раз будем им пользоваться (см. п. 42). Заметим, что мероморфное продолжение гамма-функции в левую полуплоскость можно осуществить также, пользуясь функциональным уравнением

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),$$

которому удовлетворяет эта функция при $\operatorname{Re} z>0$. В самом деле, при $\operatorname{Re} z>0$ мы можем написать

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

а потом заметить, что правая часть этого равенства определена при $\operatorname{Re} z>-1$, $z\neq 0$. Повторяя этот прием достаточное число

раз, мы продолжим гамма-функцию в любую точку $z \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Конечно, задача аналитического продолжения не всегда разрешима. Вспомним пример из п. 24: функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

голоморфна в единичном круге $U = \{|z| < 1\}$, но окружность $\{|z| = 1\}$ является ее особой линией, и поэтому аналитическое продолжение f ни в какую область, строго содержащую U, невозможно.

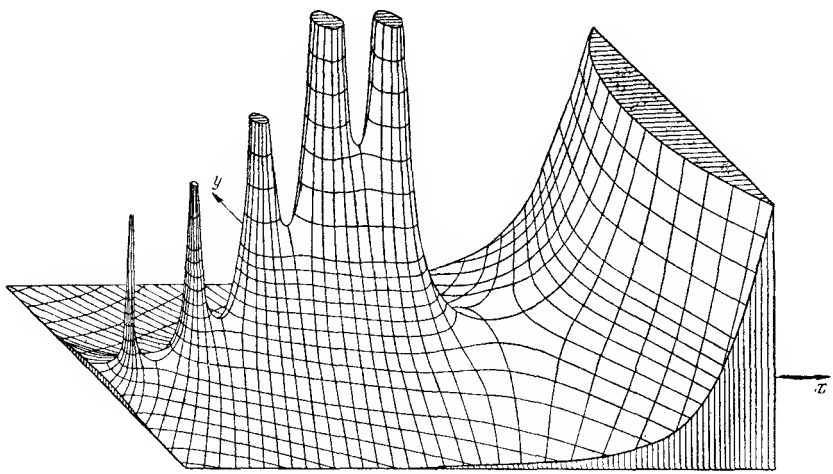


Рис. 40.

Если функция f (как в этом примере) голоморфна в некоторой области D и не продолжается аналитически ни в какую область, строго содержащую D, то мы будем называть D *областью голоморфности функции* f. В п. 43 мы докажем, что каждая область $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ является областью голоморфности некоторой функции.

Сейчас мы рассмотрим пример, который заставит нас расширить принятое понятие аналитического продолжения. Пусть область D представляет собой плоскость $\mathbb{C}$, разрезанную вдоль отрицательной полуоси: $D = \{z = re^{i\varphi}: -\pi < \varphi < \pi, r > 0\}$. В этой области определена функция

$$w = f_0(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}, \qquad -\pi < \varphi < \pi, \tag{3}$$

взаимно однозначно отображающая D на правую полуплоскость $D^*=\left\{w=\rho e^{i\psi}: -\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2},\ \rho>0\right\}$. Мы имеем $w^2=re^{i\varphi}=z$ (так что $f_0(z)=\sqrt{z}$) и в силу того, что отображение $f_0: D\to D^*$ взаимно однозначно, можем воспользоваться правилом дифференцирования обратных функций [1]), по которому в каждой точке $z\in D$ существует

$$f_0'(z)=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{2w}=\frac{1}{2f_0(z)}.$$

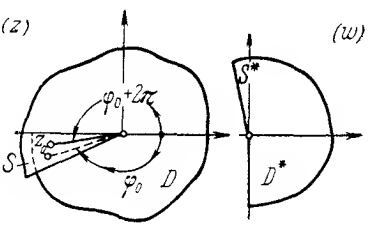


Рис. 41.

Таким образом, функция f_0 голоморфна в D.

Рассмотрим теперь сектор $S=\{\pi\leqslant\varphi<\pi+\delta\}$, где $\delta>0$ (рис. 41). Функция f_0 непосредственно формулой (3) продолжается в этот сектор. Так как при этом S взаимно однозначно отображается на сектор $S^*=\left\{\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi+\delta}{2}\right\}$ плоскости w, то по тем же соображениям, что и выше, продолженная функция

$$f(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}},\qquad \pi\leqslant\varphi<\pi+\delta, \tag{4}$$

голоморфна в S. Однако f нельзя рассматривать как аналитическое продолжение f_0 из D в область $D\cup S=\{-\pi<\varphi<\pi+\delta\}$ по той причине, что f не является функцией в этой области, ибо она неоднозначна в $D\cup S$. В самом деле, любой точке z_0 из пересечения $D\cap S$ она сопоставляет два значения w: если считать, что $z_0\in D$, то z_0 нужно сопоставить значение

---

[1]) В самом деле, в силу однолистности отображения $z\to w$ при $\Delta z\neq 0$ имеем $\Delta w\neq 0$ и, следовательно,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{1}{\frac{\Delta z}{\Delta w}}. \tag{*}$$

В силу непрерывности этого отображения $\Delta w\to 0$ при $\Delta z\to 0$, и если существует $\lim\limits_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta w}=\frac{dz}{dw}\neq 0$, то, переходя в (*) к пределу при $\Delta z\to 0$, получим, что существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$, равный

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}.$$

$f_0(z_0) = \sqrt{r_0}\, e^{i\frac{\varphi_0}{2}}$, где $-\pi<\varphi_0<-\pi+\delta$; если же считать $z_0 \in S$, то этой точке надо приписать аргумент $\varphi=\varphi_0+2\pi$ $(\pi<\varphi<\pi+\delta)$ и, следовательно, значение функции

$$f(z_0) = \sqrt{r_0}\, e^{i\frac{\varphi_0+2\pi}{2}} = -f_0(z_0) \tag{5}$$

(в обоих случаях у нас $r_0=|z_0|$).

Между тем если рассматривать f_0 только в верхней половине области D, т. е. верхней полуплоскости $D^+=\{0<\varphi<\pi\}$, то функция

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}, \qquad 0<\varphi<\pi+\delta, \tag{6}$$

будет аналитическим продолжением f_0, ибо она голоморфна в $D^+\cup S$ и $f|_{D^+}=f_0$. Возникает настоятельная потребность обобщить понятие аналитического продолжения так, чтобы оно содержало и рассмотренное выше продолжение f_0 из D в $D\cup S$, но не требовало введения многозначных функций.

Заметим, что при аналитическом продолжении однозначность нарушается в тот момент, когда расширяющаяся область определения функции начинает «налезать» на себя, покрывать еще раз некоторую свою часть (подобно тому, как в нашем примере сектор S покрывает часть области D, см. рис. 41). Из этого наблюдения в теории функций возникла идея (восходящая еще к Б. Риману и К. Вейерштрассу) относить появляющиеся при продолжении новые значения функции не к старой области, где функция уже определена, а к новой области, покрывающей старую.

Так, в нашем примере значения f в пересечении $D\cap S$, где уже определена функция f_0, мы будем относить не к области D, а к сектору S (точнее, к $\overset{\circ}{S}$, ибо S содержит граничный луч $\{\varphi=\pi\}$ и не является областью). Таким образом, на пересечении $D\cap S$ мы будем рассматривать два объекта: 1) часть области D — сектор $D_0=\{-\pi<\varphi<-\pi+\delta\}$ — с голоморфной в ней функцией f_0 и 2) сектор $\overset{\circ}{S}=\{\pi<\varphi<\pi+\delta\}$ с голоморфной в нем функцией f. Хотя области D_0 и $\overset{\circ}{S}$ геометрически совпадают, но функции f и f_0, им отнесенные, различны (они, очевидно, отличаются знаком), поэтому эти объекты следует считать различными.

Итак, идея заключается в том, что вместо функции рассматривается новый объект — пара, составленная из области и заданной в ней функции. Переходим к точным определениям.

Определение 1. *Аналитическим элементом* или, короче, *элементом* называется совокупность $\mathcal{F}=(D, f)$ области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфной в этой области функции f.

Определение 2. Говорят, что два элемента $\mathcal{F}_1=(D_1, f_1)$ и $\mathcal{F}_2=(D_2, f_2)$, области которых имеют непустое пересечение $D_1\cap D_2$, являются *непосредственным аналитическим продолжением друг друга через область* Δ — связную компоненту $D_1\cap D_2$ — если всюду в Δ

$$f_1(z)\equiv f_2(z) \qquad (7)$$

(при этом значения f_1 и f_2 в других компонентах пересечения $D_1\cap D_2$ не обязаны совпадать, см. рис. 42).

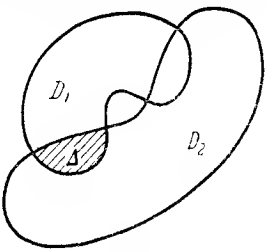


Рис. 42.

Так, в рассмотренном выше примере элемент $\mathcal{F}_0$, который состоит из области $D=\{-\pi<\varphi<\pi\}$ и голоморфной в ней функции f_0, определенной равенством (3), и элемент $\mathcal{F}_1$, состоящий из области $D_1=\left\{\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}\right\}$ (левой полуплоскости) и голоморфной в ней функции $f_1(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$, составляют непосредственное аналитическое продолжение друг друга через второй квадрант $\Delta=\left\{\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$, но не через третий квадрант $\Delta'=\left\{\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}\right\}$, ибо в Δ' значения f_0 и f_1 различны (рис. 43).

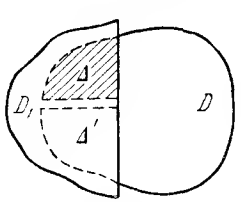


Рис. 43.

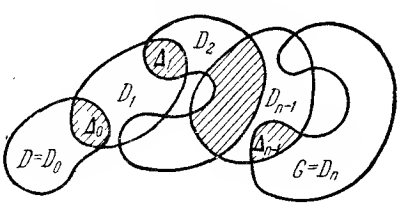


Рис. 44.

Определение 3. Говорят, что элементы $\mathcal{F}=(D, f)$ и $\mathcal{G}=(G, g)$ являются *аналитическим продолжением*[1]) друг друга через области Δ_ν ($\nu=0, \ldots, n-1$), если существует такая цепочка элементов $\mathcal{F}_\nu=(D_\nu, f_\nu)$, $\nu=0, \ldots, n$, что: 1) $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_n=\mathcal{G}$; 2) области D_ν и $D_{\nu+1}$ имеют непустое пересечение и Δ_ν является одной из его компонент ($\nu=0, \ldots, n-1$); элемент $\mathcal{F}_{\nu+1}$ является непосредственным аналитическим продолжением $\mathcal{F}_\nu$ ($\nu=0, \ldots, n-1$) через Δ_ν (рис. 44).

[1]) Уже без слова «непосредственное».

Пример. Пусть D — верхняя полуплоскость $\{\operatorname{Im} z>0\}$ и в ней заданы две функции

$$w=f(z)=\sqrt[3]{r}\,e^{i\frac{\varphi}{3}}, \qquad 0<\varphi<\pi,$$

$$w=g(z)=\sqrt[3]{r}\,e^{i\frac{\varphi}{3}}, \qquad 2\pi<\varphi<3\pi$$

($z=re^{i\varphi}$). Они взаимно однозначно и непрерывно отображают D соответственно на секторы $D^*=\left\{0<\psi<\frac{\pi}{3}\right\}$ и $G^*=\left\{\frac{2\pi}{3}<\psi<\pi\right\}$ (мы полагаем $\psi=\arg w$). Обе функции обращают функцию $w^3=z$ (так что их можно считать значениями $\sqrt[3]{z}$) и, по правилу дифференцирования обратных функций, голоморфны в D. Таким образом, пары $\mathscr{F}=(D, f)$ и $\mathscr{G}=(D, g)$ являются аналитическими элементами.

Они являются аналитическим продолжением друг друга. В самом деле, рассмотрим, например, области $D_1=\{0<\varphi<2\pi\}$ и $D_2=\{\pi<\varphi<3\pi\}$ и в них соответственно голоморфные функции $f_1(z)=\sqrt[3]{r}\,e^{i\frac{\varphi}{3}}$ $(0<\varphi<2\pi)$ и $f_2(z)=\sqrt[3]{r}\,e^{i\frac{\varphi}{3}}$ $(\pi<\varphi<3\pi)$; элементы $\mathscr{F}$, (D_1, f_1), (D_2, f_2), $\mathscr{G}$ образуют цепочку, которая удовлетворяет всем условиям, принятым в определении 3.

27. Продолжение вдоль пути. Для простоты дальнейших рассуждений мы несколько конкретизируем понятие элемента.

Определение 1. *Каноническим элементом* с центром в точке $a\in\overline{\mathbb{C}}$ называется пара $\mathscr{F}_a=(U_a, f_a)$, где f_a — сумма сходящегося степенного ряда с центром в a и U_a — круг сходимости этого ряда. Мы будем называть U_a *кругом сходимости элемента* $\mathscr{F}_a$ и обозначать через R_a радиус этого круга, если $a\neq\infty$, или радиус его дополнения, если $a=\infty$.

Если $a\in\mathbb{C}$, то круг сходимости элемента $\mathscr{F}_a$ имеет вид $U_a=\{z:|z-a|<R_a\}$, где $R_a\leqslant\infty$, а функция

$$f_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n; \tag{1}$$

если же $a=\infty$, то $U_a=\{z:|z|>R_a\}$, где $R_a\geqslant 0$, и

$$f_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}. \tag{2}$$

Определения непосредственного аналитического продолжения и аналитического продолжения для канонических элементов несколько упрощаются, ибо их области (круги) пересекаются по связным множествам и поэтому не надо оговаривать, через какие компоненты пересечений Δ_ν производится продолжение.

Если канонический элемент $\mathscr{F}_b=(U_b, f_b)$ является непосредственным аналитическим продолжением элемента $\mathscr{F}_a=(U_a, f_a)$ и, кроме того, $b\in U_a$ (рис. 45), то такое продолжение сводится просто к переразложению суммы степенного ряда f_a в ряд по степеням $z-b$:

$$f_b(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_a^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n. \qquad (3)$$

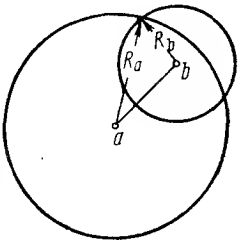


Рис. 45.

Заметим еще, что если два канонических элемента $\mathscr{F}_a$ и $\mathscr{F}_b$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга, то их круги сходимости U_a и U_b не могут компактно принадлежать один другому (если, например, $U_b\Subset U_a$, то f_b голоморфна в большем, чем U_b, круге с центром b и, следовательно, U_b не может быть кругом сходимости). Поэтому окружности ∂U_a и ∂U_b должны иметь хотя бы одну общую точку, и из треугольника, изображенного на рис. 45 (только теперь не обязательно $b\in U_a$), мы заключаем, что

$$|R_a-R_b|\leqslant|b-a|. \qquad (4)$$

Теперь мы займемся понятием аналитического продолжения вдоль пути. Без ограничения общности будем предполагать, что для всех рассматриваемых здесь путей параметр меняется на отрезке $J=[0, 1]$.

Определение 2. Говорят, что канонический элемент $\mathscr{F}_0=(U_0, f_0)$ *продолжаем вдоль пути* γ: $z=z(t)$, $t\in J$, с началом в центре $a=z(0)$ этого элемента, если существует семейство элементов

$$\mathscr{F}_t=(U_t, f_t), \qquad t\in J, \qquad (5)$$

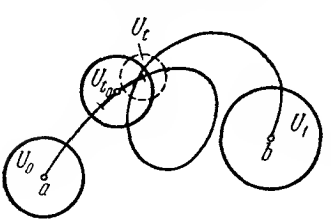


Рис. 46.

с центрами $a_t=z(t)$ и ненулевыми радиусами сходимости, удовлетворяющее следующему условию. Если $u(t_0)\subset J$ обозначает такую связную окрестность точки $t_0\in J$, что $z(t)\in U_{t_0}$ для всех $t\in u(t_0)$ (эта окрестность существует в силу непрерывности пути), то для любого $t\in u(t_0)$ элемент $\mathscr{F}_t$ является непосредственным аналитическим продолжением $\mathscr{F}_{t_0}$ (рис. 46).

Если элемент $\mathscr{F}_0$ продолжаем вдоль γ, то говорят, что элемент $\mathscr{F}_1$ семейства (5) (с центром в конце $b=z(1)$ пути) получается из $\mathscr{F}_0$ *аналитическим продолжением вдоль пути* γ.

Прежде всего докажем единственность продолжения вдоль пути. Для этого условимся считать два канонических элемента $\mathscr{F}=(U, f)$ и $\mathscr{G}=(V, g)$ *равными* ($\mathscr{F}=\mathscr{G}$), если $U=V$ и в этом круге $f\equiv g$.

Теорема 1. *Если канонический элемент $\mathscr{F}_0$ продолжаем вдоль пути γ, то в результате его аналитического продолжения вдоль этого пути получается вполне определенный элемент, не зависящий от выбора семейства, осуществляющего продолжение.*

◀ Пусть γ задается уравнением $z=z(t)$, $t\in J$, а элементы $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{G}_1$ получаются продолжением $\mathscr{F}_0$ вдоль γ: первый при помощи семейства элементов $\mathscr{F}_t$, а второй — семейства $\mathscr{G}_t$ ($\mathscr{F}_0=\mathscr{G}_0$, $t\in J$). Рассмотрим множество

$$\mathscr{E}=\{t\in J:\ \mathscr{F}_t=\mathscr{G}_t\};$$

оно непусто, ибо содержит точку $t=0$.

Это множество открыто (в топологии J). В самом деле, пусть $t_0\in\mathscr{E}$, т. е. $\mathscr{F}_{t_0}=\mathscr{G}_{t_0}$; в силу непрерывности пути γ найдется окрестность $u(t_0)\subset J$ такая, что для всех $t\in u(t_0)$ точка $z(t)$ принадлежит общему кругу сходимости элементов $\mathscr{F}_{t_0}$ и $\mathscr{G}_{t_0}$. По определению 2 для всех $t\in u(t_0)$ и $\mathscr{F}_t$ и $\mathscr{G}_t$ получаются непосредственным аналитическим продолжением равных элементов $\mathscr{F}_{t_0}=\mathscr{G}_{t_0}$ и, следовательно, совпадают (см. формулу (3)). Поэтому $u(t_0)\subset\mathscr{E}$.

Но $\mathscr{E}$ в то же время и замкнуто. В самом деле, пусть $t_0\in J$ — предельная точка $\mathscr{E}$ и $u(t_0)$ — такая окрестность, что для всех $t\in u(t_0)$ точки $z(t)$ принадлежат меньшему из кругов сходимости элементов $\mathscr{F}_{t_0}$ и $\mathscr{G}_{t_0}$ (обозначим его через W). В $u(t_0)$ найдется точка $t_1\in\mathscr{E}$ и в ней $\mathscr{F}_{t_1}=\mathscr{G}_{t_1}$. Так как $z(t_1)\in W$, то $\mathscr{F}_{t_0}$ и $\mathscr{G}_{t_0}$ являются непосредственными аналитическими продолжениями равных элементов $\mathscr{F}_{t_1}$ и $\mathscr{G}_{t_1}$. Поэтому $f_{t_0}\equiv g_{t_0}$ в пересечении W с кругом сходимости $\mathscr{F}_{t_1}$ и $\mathscr{G}_{t_1}$, но тогда по теореме единственности п. 21 $f_{t_0}\equiv g_{t_0}$ всюду в W и, следовательно, $\mathscr{F}_{t_0}=\mathscr{G}_{t_0}$, т. е. $t_0\in\mathscr{E}$.

Итак, непустое подмножество $\mathscr{E}\subset J$ является одновременно открытым и замкнутым. Отсюда следует (п. 4), что $\mathscr{E}\equiv J$ и, в частности, что $\mathscr{F}_1=\mathscr{G}_1$ ▶

Теперь мы хотим доказать, что продолжение вдоль пути всегда можно осуществить в конечное число приемов, т. е. как аналитическое продолжение в смысле предыдущего пункта.

Лемма. *Радиус $R(t)$ элемента $\mathscr{F}_t$ из семейства* (5), *осуществляющего аналитическое продолжение вдоль пути γ, является непрерывной функцией от t на отрезке J, если круги сходимости всех $\mathscr{F}_t$ компактны.*

◁ Для любого $t_0 \in J$ найдем окрестность $u(t_0)$ такую, что при $t \in u(t_0)$ элемент $\mathscr{F}_t$ является непосредственным продолжением $\mathscr{F}_{t_0}$ (см. определение 2). Из неравенства (4) получаем тогда, что

$$|R(t) - R(t_0)| \leqslant |z(t) - z(t_0)|.$$

Это неравенство доказывает непрерывность R в точке t_0 ▷

Теорема 2. *Если элемент $\mathscr{G}$ получается из $\mathscr{F}$ аналитическим продолжением вдоль пути γ, то $\mathscr{G}$ является аналитическим продолжением $\mathscr{F}$ в смысле* п. 26.

◁ Пусть $\mathscr{F}_t$, $t \in J$, — семейство элементов, осуществляющих продолжение вдоль γ. По лемме радиус $R(t)$ элемента $\mathscr{F}_t$ непрерывен на J, следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $R(t) \geqslant \varepsilon$ для всех $t \in J$. В силу равномерной непрерывности функции $z(t)$ на J можно выбрать конечное число точек t_ν: $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ так, чтобы точки $z_\nu = z(t_\nu)$ для $\nu = 1, \ldots, n$ удовлетворяли неравенству $|z_\nu - z_{\nu-1}| < \varepsilon$. По определению 2 отсюда следует, что элемент $\mathscr{F}^{(\nu)} = \mathscr{F}_{t_\nu}$ является непосредственным аналитическим продолжением элемента $\mathscr{F}^{(\nu-1)} = \mathscr{F}_{t_{\nu-1}}$ ($\nu = 1, \ldots, n$). Но $\mathscr{F}^{(0)} = \mathscr{F}$, а $\mathscr{F}^{(n)} = \mathscr{G}$, следовательно, $\mathscr{G}$ является аналитическим продолжением элемента $\mathscr{F}$ ▷

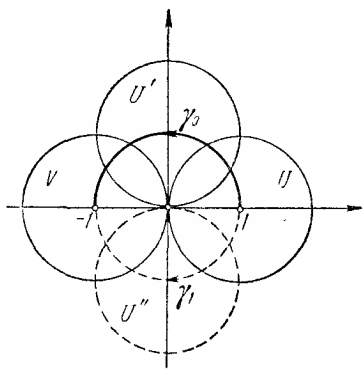


Рис. 47.

Пример. Рассмотрим в круге $U = \{|z - 1| < 1\}$ функцию

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \qquad \left(z = re^{i\varphi},\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right). \tag{6}$$

Как мы видели в предыдущем пункте, в каждой точке $z \in U$ существует $f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$, следовательно, f голоморфна в U и $f'(z) \to \infty$ при $z \to 0$. Отсюда видно, что пара $\mathscr{F} = (U, f)$ составляет канонический элемент.

Чтобы получить аналитическое продолжение $\mathscr{F}$ вдоль пути γ_0: $z = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (верхняя полуокружность $\{|z| = 1\}$, рис. 47), нет необходимости, как сказано в определении, получать тейлоровское разложение f в круге U и затем переразлагать его по степеням $z - e^{it}$ при всевозможных $t \in [0, \pi]$. По теоремам 1

и 2 достаточно рассмотреть круг $U'=\{|z-i|<1\}$ и построить аналитическое продолжение $\mathscr{F}$ по цепочке кругов U, U', V, где $V=\{|z+1|<1\}$. Но такое продолжение можно осуществить, как в п. 26, непосредственно по формуле (6), расширяя область изменения φ в этой формуле: для U' — на отрезок $[0, \pi]$ и для V — на отрезок $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. В круге V мы получим голоморфную функцию

$$g_0(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}} \qquad \left(\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}\right), \tag{7}$$

и пара $\mathscr{G}^0=(V, g_0)$ составляет элемент, который и является искомым продолжением $\mathscr{F}$ вдоль пути γ_0. В частности, на отрицательном диаметре круга V имеем $\varphi=\pi$, следовательно,

$$g_0(z)=\sqrt{-x}\,e^{i\frac{\pi}{2}}=i\sqrt{-x}, \tag{8}$$

где $-x=|z|>0$.

Аналогично при помощи цепочки кругов U, U'', V, где $U''=\{|z+i|<1\}$, осуществляется аналитическое продолжение $\mathscr{F}$ вдоль пути γ_1: $z=e^{it}$, $0\geqslant t\geqslant -\pi$ (см. рис. 47). Это продолжение заключается в том, что мы последовательно заменяем в формуле (6) область изменения φ отрезками $[-\pi, 0]$ и $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$. В результате мы получаем голоморфную в круге V функцию

$$g_1(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\varphi}{2}} \qquad \left(-\frac{3\pi}{2}<\varphi<-\frac{\pi}{2}\right) \tag{9}$$

и пара $\mathscr{G}^1=(V, g_1)$ составляет элемент, который является продолжением $\mathscr{F}$ вдоль пути γ_1.

Элемент $\mathscr{G}^1$ не равен элементу $\mathscr{G}^0$: хотя круги их сходимости одинаковы, но функции отличаются, ибо, например, на отрицательном диаметре V мы теперь имеем $\varphi=-\pi$ и, следовательно, вместо (8) получаем

$$g_1(z)=\sqrt{-x}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\sqrt{-x}, \tag{10}$$

где опять $-x=|z|>0$. Нетрудно видеть, что $g_1(z)=-g_0(z)$ для всех $z\in V$.

Заметим, что при построении наших продолжений мы не пользовались тейлоровским разложением элемента $\mathscr{F}$. При желании его можно получить, например, из следующих соображений. На положительном диаметре круга U имеем $\varphi=0$, следовательно, $f(z)=\sqrt{x}$, где $z=x>0$. В анализе доказывается,

что эта действительная функция раскладывается в биномиальный ряд

$$\sqrt{x} = \{1 + (x-1)\}^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (x-1)^n, \tag{11}$$

сходящийся на всем диаметре $(0, 2)$ (здесь $n!! = n(n-2)\ldots$ и последний множитель равен 2, если n — четное, и 1, если n — нечетное). По теореме Абеля (п. 19) ряд (11) сходится и для комплексных $x=z$ в круге U и, следовательно, представляет голоморфную в U функцию (п. 20). На диаметре $(0, 2)$ эта функция совпадает с f, а по теореме единственности (п. 21) отсюда следует, что она совпадает с f всюду в U. Таким образом, всюду в U

$$f(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (z-1)^n. \tag{12}$$

Можно написать и тейлоровские разложения функций g_0 и g_1 в круге V; они имеют вид

$$g_0(z) = -g_1(z) = if(-z) = i\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (z+1)^n\right\}. \tag{13}$$

В заключение докажем теорему об инвариантности аналитического продолжения вдоль пути относительно гомотопных деформаций этого пути.

Теорема 3. *Пусть пути* γ_0: $z=z_0(t)$ *и* γ_1: $z=z_1(t)$ *гомотопны, как пути с общими концами, и элемент* $\mathscr{F}$ *продолжаем вдоль любого пути* γ_s: $z=z_s(t)$ $(s\in J)$, *осуществляющего гомотопию* $\gamma_0 \sim \gamma_1$. *Тогда результаты продолжения* $\mathscr{F}$ *вдоль путей* γ_0 *и* γ_1 *совпадают.*

◀ Пусть $z=z(s, t)$: $J\times J \to \mathbb{C}$ — функция, осуществляющая гомотопию $\gamma_0 \sim \gamma_1$ (см. п. 16), так что $z_s(t) = z(s, t)$. Обозначим через $\mathscr{G}^s$ $(s\in J)$ результат аналитического продолжения элемента $\mathscr{F}$ вдоль пути γ_s и рассмотрим множество

$$\mathscr{E} = \{s \in J\colon \mathscr{G}^s = \mathscr{G}^0\}.$$

Оно непусто, ибо содержит точку $s=0$. Пусть $s_0 \in \mathscr{E}$; по лемме существует $\varepsilon > 0$ такое, что радиусы $R(t)$ элементов $\mathscr{G}_t^{s_0}$, осуществляющих продолжение вдоль γ_{s_0}, не меньше ε для всех $t\in J$. В силу равномерной непрерывности функции $z(s, t)$ найдется окрестность $u(s_0) \subset J$ такая, что для всех $s\in u(s_0)$ и всех $t\in J$

$$|z(s, t) - z(s_0, t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

По теореме 2 выберем $t_\nu \in J$ так, чтобы точки $z_\nu^0 = z(s_0, t_\nu)$ для всех $\nu = 1, \ldots, n$ удовлетворяли неравенству

$$|z_\nu^0 - z_{\nu-1}^0| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

и элементы $\mathscr{G}_{\nu-1}^0$ и $\mathscr{G}_\nu^0$ (мы обозначаем $\mathscr{G}_\nu^0 = \mathscr{G}_{t_\nu}^{s_0}$) являлись непосредственными аналитическими продолжениями друг друга.

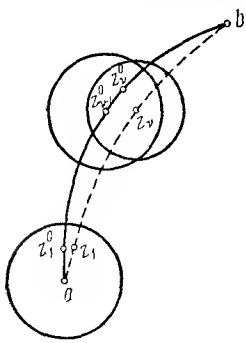


Рис. 48.

Обозначим еще $z_\nu = z(s, t_\nu)$, $\mathscr{G}_\nu = \mathscr{G}_{t_\nu}^{s}$ и заметим, что при $s \in u(s_0)$ в силу (14) и (15) $|z_\nu - z_{\nu-1}^0| < \varepsilon$ для всех $\nu = 1, \ldots, n$ (рис. 48).

Элементы $\mathscr{G}_1^0$ и $\mathscr{G}_1$ являются непосредственными аналитическими продолжениями элемента $\mathscr{F}$ и, следовательно, друг друга $\left(\text{мы пользуемся тем, что у нас } |z_1^0 - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |z_1^0 - z_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Точно так же мы докажем, что и элементы $\mathscr{G}_\nu^0$ и $\mathscr{G}_\nu$ являются аналитическими продолжениями друг друга ($\nu = 1, \ldots, n$). Но элементы $\mathscr{G}_n^0$ и $\mathscr{G}_n$ имеют к тому же общий центр $(z_n^0 = z_n = b)$ и поэтому совпадают. Так как $s_0 \in \mathscr{E}$, то $\mathscr{G}_n^0 = \mathscr{G}_{t_n}^{s_0} = \mathscr{G}^0$, следовательно, и $\mathscr{G}_n = \mathscr{G}^s = \mathscr{G}^0$, т. е. $s \in \mathscr{E}$. Мы доказали, что $u(s_0) \subset \mathscr{E}$ вместе с s_0, т. е. что $\mathscr{E}$ — открытое множество.

Но в то же время $\mathscr{E}$ является и замкнутым множеством. В самом деле, пусть s_0 — предельная точка $\mathscr{E}$; построим окрестность $u(s_0)$ такую же, как выше. В ней найдется точка $s \in \mathscr{E}$, так что продолжение $\mathscr{F}$ вдоль γ_s приводит к элементу $\mathscr{G}^0$. По тем же соображениям, что и выше, продолжения вдоль путей γ_s и γ_{s_0} приводят к равным элементам, следовательно, $\mathscr{G}^{s_0} = \mathscr{G}^0$ и $s_0 \in \mathscr{E}$.

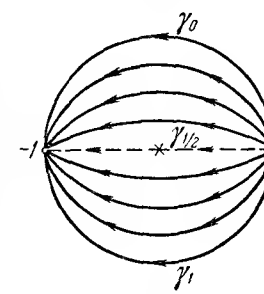


Рис. 49.

Таким образом, $\mathscr{E} = J$ (см. п. 4) и, в частности, $\mathscr{G}^1 = \mathscr{G}^0$ ▶

Замечание. Если хотя бы вдоль одного из путей γ_s, осуществляющих гомотопию $\gamma_0 \sim \gamma_1$, элемент $\mathscr{F}$ непродолжаем, то результаты его продолжения вдоль γ_0 и γ_1 могут оказаться различными. В самом деле, рассмотрим полуокружности γ_0 и γ_1 из разобранного выше примера. Они, очевидно, гомотопны и их

гомотопию можно осуществить при помощи дуг окружностей γ_s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, проходящих через точки ± 1 (рис. 49). Пусть для определенности $\gamma_{1/2}$ обозначает прямолинейный отрезок $[1, -1]$.

Элемент $\mathscr{F} = (U, f)$ из упомянутого примера можно описанным выше приемом аналитически продолжить вдоль любой дуги γ_s, $s \neq \frac{1}{2}$. Продолжение вдоль $\gamma_{1/2}$ невозможно, ибо, как мы видели, $f'(z) \to \infty$ при $z \to 0$, а отрезок $\gamma_{1/2}$ содержит точку $z = 0$. Этого оказывается достаточным для того, чтобы продолжения вдоль γ_0 и γ_1 приводили к различным элементам (см. упомянутый пример).

§ 8. Понятие аналитической функции

Описательно говоря, под аналитической функцией понимается то, что получается из аналитических элементов в результате аналитического продолжения. Здесь мы подробно разберем это понятие.

28. Аналитические функции. Под (аналитическим) элементом мы будем сейчас, как в п. 26, понимать пару $\mathscr{F} = (D, f)$, составленную из области D и голоморфной в D функции f. В различных окрестностях фиксированной точки a голоморфная функция порождает различные элементы. Мы введем понятие эквивалентности элементов с тем, чтобы отвлечься от несущественного различия в выборе окрестностей.

Определение 1. Два элемента $\mathscr{F} = (D, f)$ и $\mathscr{G} = (G, g)$, области которых содержат одну и ту же точку $a \in \overline{\mathbb{C}}$, называются *эквивалентными в точке* a ($\mathscr{F} \sim \mathscr{G}$), если существует окрестность точки a, в которой $f \equiv g$.

Очевидно, что это отношение эквивалентности удовлетворяет обычным аксиомам. По теореме единственности (п. 21) для эквивалентности двух элементов в точке необходимо и достаточно, чтобы функции, принадлежащие этим элементам, совпадали во всей содержащей точку a компоненте пересечения их областей.

Совокупность эквивалентных друг другу в данной точке $a \in \overline{\mathbb{C}}$ элементов называют *ростком аналитической функции* в точке a. Смысл этого понятия состоит в локализации понятия элемента: рассматривая вместо фиксированного элемента класс всех элементов, ему эквивалентных (в том числе и элементов, области которых сколь угодно малы), мы выделяем в понятии ростка то общее, что объединяет эквивалентные элементы. Поэтому росток характеризует локальные свойства функции в рассматриваемой точке.

Очевидно, росток означает нечто большее, чем просто значение функции в рассматриваемой точке. В самом деле, пусть

$a=-\pi^2$ и функция f в правой полуплоскости D определена соотношением

$$f(z)=e^{\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)}, \qquad -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

где $z=re^{i\varphi}$. Продолжая элемент (D, f) в левую полуплоскость G по верхней полуокружности γ_0: $z=e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, мы получим элемент $\mathscr{G}^0$, состоящий из G и функции

$$g_1(z)=e^{\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)}, \qquad \frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}, \tag{2}$$

а продолжение его вдоль полуокружности γ_1: $z=e^{it}$, $0\geqslant t\geqslant-\pi$, приведет к элементу $\mathscr{G}^1$, состоящему из G и функции

$$g_1(z)=e^{\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)}, \qquad -\frac{3\pi}{2}<\varphi<-\frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Элементы $\mathscr{G}^0$ и $\mathscr{G}^1$ различны, поэтому различны и их ростки в точке $a=-\pi^2$. Однако значения функций g_0 и g_1 в рассматриваемой точке совпадают: при подсчете $g_0(a)$ мы полагаем $\varphi=\arg a=\pi$ и, следовательно, $g_0(a)=e^{\pi i}=-1$, а при подсчете $g_1(a)$ считаем $\varphi=-\pi$ и, следовательно, $g_1(a)=e^{-\pi i}=-1$.

К понятию аналитической функции мы придем, если будем рассматривать совокупности (аналитических) элементов (D_α, f_α), где α пробегает произвольное множество индексов A, причем предположим, что каждый из этих элементов получается из любого другого аналитическим продолжением. Голоморфные функции f_α, $\alpha\in A$, принадлежащие элементам, будем называть *ветвями* рассматриваемой аналитической функции.

Для удобства работы с этим понятием мы несколько конкретизируем его, заменив произвольные элементы каноническими и продолжение — продолжением вдоль путей (п. 27). Так мы приходим к следующему определению.

Определение 2. *Аналитической функцией* называется совокупность канонических элементов, которые получаются из одного какого-либо элемента $\mathscr{F}=(U, f)$ аналитическими продолжениями вдоль всех путей, начинающихся в центре a элемента $\mathscr{F}$, вдоль которых такое продолжение возможно.

Очевидно, что это понятие не зависит от выбора начального элемента $\mathscr{F}$. В самом деле, пусть $\mathscr{G}=(V, g)$ — любой элемент, принадлежащий аналитической функции, которая определяется начальным элементом $\mathscr{F}$. Тогда $\mathscr{G}$ получается из $\mathscr{F}$ продолжением вдоль пути γ. Но и $\mathscr{F}$ получается из $\mathscr{G}$ продолжением вдоль пути $\bar{\gamma}$, а любой другой элемент $\mathscr{H}$, который получается

из $\mathscr{F}$ продолжением вдоль пути λ, можно получить и из $\mathscr{G}$ продолжением вдоль пути $\gamma^{-} \cup \lambda$ (определение объединения путей см. в п. 14).

Определение 3. Две аналитические функции, определяемые каноническими элементами, считаются *равными*, если они имеют хотя бы один общий элемент. (По теореме единственности продолжения вдоль пути тогда и все их соответствующие элементы равны друг другу.) Две аналитические функции, определяемые произвольными элементами, считаются *равными* [1]), если какие-либо их элементы эквивалентны друг другу в смысле определения 1 (тогда и все их соответствующие элементы эквивалентны).

Теорема 1. *Объединение кругов сходимости элементов, принадлежащих аналитической функции, образует область.*

◀ Пусть D — это объединение; оно открыто, как объединение открытых множеств (если $z_0 \in D$, то z_0 принадлежит и кругу сходимости U некоторого элемента, а U входит в D). Но D и связно, ибо для любых точек a, $b \in D$ можно найти принадлежащие функции элементы, которые имеют эти точки центрами, а так как эти элементы получаются друг из друга продолжением вдоль некоторого пути γ, соединяющего a и b, то и все точки γ принадлежат D.

Таким образом, D — открытое связное множество, т. е. область ▶

Заметим, что *аналитическая функция не является в этой области функцией в обычном смысле слова.* В самом деле, пусть $\mathscr{F} = (U, f)$, где $U = \{|z-1|<1\}$, и

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

— элемент из примера, рассмотренного в предыдущем пункте. Мы видели, что его можно продолжить в круг $V = \{|z+1|<1\}$ двумя способами, которые приводят к двум различным голоморфным в V функциям g_0 и g_1: $g_1(z) = -g_0(z)$ в V. Таким образом, аналитическая функция с начальным элементом $\mathscr{F}$ каждой точке $z \in V$ ставит в соответствие два различных значения (отличающихся знаком) [2]).

Ниже, в § 9, мы введем вместо плоских областей такие объекты (римановы поверхности), на которых аналитические

---

[1]) Иными словами, две аналитические функции считаются равными, если они имеют общий росток (тогда и все их соответствующие ростки равны друг другу).

[2]) Этот пример показывает, что аналитическая функция может иметь в одной точке различные ростки.

функции можно будет рассматривать как обычные (однозначные) функции.

Правда, в некоторых случаях аналитические функции можно рассматривать как обычные функции и в плоских областях. Например, справедлива такая

Теорема 2 (о монодромии). *Если некоторый элемент $\mathscr{F}=(U, f)$ аналитически продолжаем вдоль любого пути γ, принадлежащего односвязной области D, то определяемая продолжениями $\mathscr{F}$ вдоль таких путей аналитическая функция однозначна в этой области.*

◀ Пусть $\mathscr{F}$ имеет центром точку $a \in D$ и z — произвольная точка этой области. В силу односвязности D любые два пути γ_0 и γ_1, ведущие в D из точки a в z, гомотопны, а по условию элемент $\mathscr{F}$ продолжаем вдоль любого пути, осуществляющего гомотопию. Следовательно, по теореме об инвариантности аналитического продолжения (п. 27) элементы аналитической функции с центром в точке z совпадают. Их значение в точке z мы и сопоставим этой точке. Таким образом, аналитическая функция определяет (однозначную) функцию в области D ▶

Если условие теоремы о монодромии не выполняется (например, если область D неодносвязна или не все элементы продолжаются вдоль всех путей $\gamma \subset D$), то аналитическая функция может сопоставлять точкам $z \in D$ несколько значений (они будут значениями различных ветвей аналитической функции в точке z). Сколько же значений может при этом сопоставляться фиксированной точке? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 3 (Пуанкаре — Вольтерра). *Аналитическая функция может иметь не более чем счетное множество различных элементов с центром в фиксированной точке.*

◀ Пусть аналитическая функция определяется начальным элементом $\mathscr{F}$ с центром a и z — произвольная точка области D, образованной кругами элементов, которые получаются при продолжении $\mathscr{F}$ (теорема 1). По теореме 2 п. 27 любой принадлежащий функции элемент $\mathscr{G}$ с центром в точке z можно получить при помощи конечной цепочки элементов с центрами $a, z_1, \ldots, z_{n-1}, z$, в которой каждый следующий элемент является непосредственным аналитическим продолжением предыдущего.

Без ограничения общности можно считать, что точки z_ν ($\nu=1, \ldots, n-1$) рациональны (т. е. $\operatorname{Re} z_\nu$ и $\operatorname{Im} z_\nu$ — рациональные числа). В самом деле, пусть сначала центры z'_ν элементов $\mathscr{F}'_\nu$ ($\nu=1, \ldots, n-1$) произвольны. В сколь угодно малой окрестности каждой точки z'_ν возьмем рациональную точку z_ν и заменим $\mathscr{F}'_\nu$ его непосредственным аналитическим продолжением $\mathscr{F}_\nu$ с центром в z_ν. Ясно (см. доказательство теоремы 3 из п. 27), что

при достаточно малых $|z'_\nu - z_\nu|$ результат продолжения по новой цепочке будет совпадать со старым.

Остается заметить, что множество возможных непосредственных аналитических продолжений $\mathscr{F}_1$ с рациональными центрами элемента $\mathscr{F}$ счетно, так же как и множества элементов $\mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_{n-1}$. Так как задание $\mathscr{F}_{n-1}$ и точки z однозначно определяет элемент $\mathscr{G}$ (хотя различные $\mathscr{F}_{n-1}$ могут привести к одинаковым $\mathscr{G}$), то множество возможных элементов $\mathscr{G}$ не более чем счетно ▶

Пример аналитической функции, которая сопоставляет точкам области D бесконечное (счетное) множество значений, мы приведем в следующем пункте.

Над аналитическими функциями можно производить обычные для анализа действия, которые определяются как соответствующие действия над их ветвями. Так, *производной* аналитической функции $\{\mathscr{F}_\alpha\}$, $\alpha \in A$, называется аналитическая функция, элементами которой служат пары $\mathscr{F}'_\alpha = (D_\alpha, f'_\alpha)$, $\alpha \in A$, где $(D_\alpha, f_\alpha) = \mathscr{F}_\alpha$. *Суммой* аналитических функций $\{\mathscr{F}_\alpha\}$ и $\{\mathscr{G}_\alpha\}$, определяемых элементами $\mathscr{F}_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$ и $\mathscr{G}_\alpha = (D_\alpha, g_\alpha)$ с одинаковыми областями, называется аналитическая функция с элементами $(D_\alpha, f_\alpha + g_\alpha)$. Аналогично определяются *произведение* и *частное* аналитических функций, однако частное двух аналитических функций будет аналитической функцией лишь в том случае, когда делитель отличен от нуля.

Можно определить также композицию двух аналитических функций $\{\mathscr{F}_\alpha\}$ и $\{\mathscr{G}_\alpha\}$ как аналитическую функцию с элементами $(D_\alpha, g_\alpha \circ f_\alpha)$; при этом предполагается, что $\mathscr{F}_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$, $\mathscr{G}_\alpha = (G_\alpha, g_\alpha)$ и что $f(D_\alpha) \subset G_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Например, под $e^{\{\mathscr{F}_\alpha\}}$ понимается аналитическая функция с элементами (D_α, e^{f_α}).

При желании можно определить действия над аналитическими функциями, не связывая их с рассмотрением областей элементов. Для этого нужно воспользоваться локализацией понятия элементов, перейдя от них к росткам. Напомним, что ростком $\mathbf{f}_a$ аналитической функции в точке a называется класс эквивалентных элементов при следующем понятии эквивалентности: элементы (D_1, f_1) и (D_2, f_2) считаются эквивалентными, если пересечение $D_1 \cap D_2$ содержит точку a и $f_1 \equiv f_2$ в некоторой окрестности этой точки.

Действия над ростками вводятся естественным образом. Именно, под производной $\mathbf{f}'_a$ ростка $\mathbf{f}_a$ понимается класс элементов, эквивалентных (D, f'), где (D, f) — какой-либо представитель класса $\mathbf{f}_a$ (очевидно, $\mathbf{f}'_a$ не зависит от выбора представителя). Аналогично определяются сумма $\mathbf{f}_a + \mathbf{g}_a$ и произведение $\mathbf{f}_a \cdot \mathbf{f}_b$ ростков в данной точке. Совокупность ростков аналитиче-

ских функций в данной точке a составляет, очевидно, коммутативное кольцо.

29. Элементарные функции. Здесь мы рассмотрим важнейшие примеры многозначных аналитических функций.

1. Корень. Под корнем n-й степени (n — натуральное число) из z понимается аналитическая функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \tag{1}$$

определяемая следующим образом. В плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с выброшенной отрицательной полуосью $D_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}_-$ рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}, \qquad -\pi < \varphi < \pi \tag{2}$$

(мы полагаем $z = re^{i\varphi}$). Она непрерывна в D_0 и взаимно однозначно отображает D_0 на сектор $D_0^* = \left\{-\frac{\pi}{n} < \psi < \frac{\pi}{n}\right\}$ плоскости

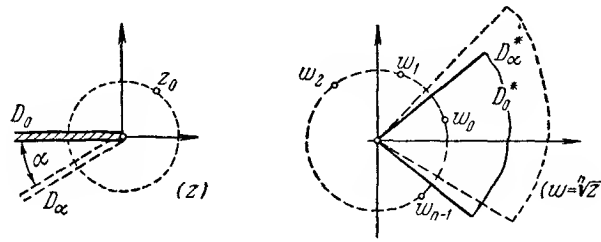


Рис. 50.

комплексного переменного $w = \rho e^{i\psi}$ (рис. 50). Так как $w^n = z$, то по правилу дифференцирования обратной функции для всех $z \in D_0$ существует производная

$$f_0'(z) = \frac{1}{n\{f_0(z)\}^{n-1}} \tag{3}$$

(см. сноску на стр. 141). Поэтому пара $\mathcal{F}_0 = (D_0, f_0)$ представляет собой аналитический элемент. Аналитическую функцию, которая получается при аналитическом продолжении этого элемента, и называют *корнем n-й степени из z*.

Такое продолжение можно описать, например, так. Рассмотрим область $D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ и в ней голоморфную функцию

$$f_\alpha(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}, \qquad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha. \tag{4}$$

Очевидно, что элементы $\mathscr{F}_\alpha=(D_\alpha, f_\alpha)$ при всех $\alpha\in\mathbb{R}$ будут представлять собой аналитическое продолжение элемента (D_0, f_0) (при $|\alpha|<\pi$ — непосредственное). Совокупность этих элементов $\mathscr{F}_\alpha$ и описывает нашу функцию.

Объединением областей этих элементов $D=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} D_\alpha$ служит, очевидно, плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с исключенными точками $z=0$ и $z=\infty$ (это — единственные точки из $\overline{\mathbb{C}}$, которые принадлежат границам всех D_α и не принадлежат ни одной D_α).

Эту же функцию можно определить и при помощи канонических элементов. Примем за начальный, например, элемент $\mathscr{G}_0$ с центром в точке $z=1$, который состоит из круга $U=\{|z-1|<1\}$ и голоморфной в нем функции

$$g_0(z)=\{1+(z-1)\}^{\frac{1}{n}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-k+1\right)(z-1)^k \quad (5)$$

(мы, как и в примере на стр. 149, заметили, что при положительных $z=x$ функция $g_0(x)=\sqrt[n]{x}$, воспользовались биномиальным разложением этой действительной функции и продолжили разложение с отрезка $(0, 2)$ в круг U).

Элемент $\mathscr{G}_0\sim\mathscr{F}_0$, ибо при $z=x\in(0, 2)$ мы имеем $r=x$, $\varphi=0$ и, следовательно, $f_0(x)=g_0(x)=\sqrt[n]{x}$, а так как обе функции f_0 и g_0 голоморфны в U, то по теореме единственности $f_0(z)=g_0(z)$ для всех $z\in U$. По определению 3 предыдущего пункта аналитические функции, определяемые элементами $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{G}_0$, совпадают.

Каждой точке $z_0\in D$ аналитическая функция $w=\sqrt[n]{z}$ относит точно n различных значений. В самом деле, значения всех голоморфных функций, принадлежащих элементам $\mathscr{F}_\alpha$ (ветвей нашей аналитической функции), определяются по формуле

$$w=\sqrt[n]{r_0}\,e^{i\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}}, \quad (6)$$

где $r_0=|z_0|$, φ_0 — одно из возможных значений $\arg z_0$, а k — произвольное целое число. Положив $w_0=\sqrt[n]{r_0}\,e^{i\frac{\varphi_0}{n}}$, мы видим, что все другие значения w отличаются от w_0 множителями $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$, а эти множители (корни n-й степени из 1) получаются из вектора 1 поворотами на угол, кратный $\frac{2\pi}{n}$, т. е. имеют n различ-

ных значений. Таким образом, среди значений (6) имеется лишь n различных значений $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, которые получаются, если положить в (6) $k=0, 1, \ldots, n-1$. Эти значения располагаются в вершинах правильного n-угольника с центром в точке $w=0$, одной из вершин которого служит точка w_0 (см. рис. 50).

В заключение несколько слов о ветвях аналитической функции $\sqrt[n]{z}$. В соответствии с определением п. 28 под ветвью этой функции понимается любой принадлежащий ей элемент (не обязательно из числа элементов $\mathcal{F}_\alpha$). Можно также понимать под ветвью голоморфную функцию, принадлежащую этому элементу.

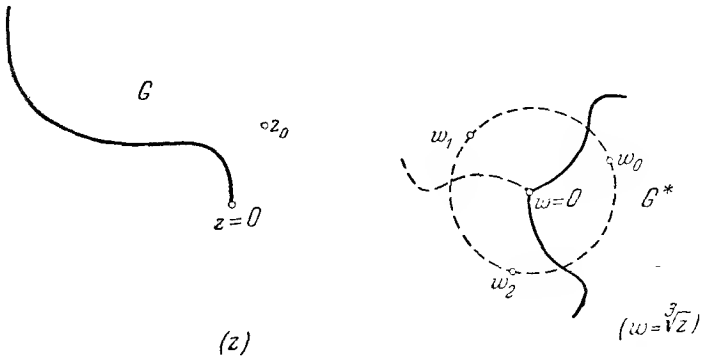


Рис. 51.

По теореме о монодромии (п. 28) ветвь $\sqrt[n]{z}$ можно выделить в любой односвязной области G, не содержащей точек $z=0$ и $z=\infty$. Примером такой области служит плоскость с любым разрезом, соединяющим эти точки (граница области должна быть связной). На рис. 51 изображена одна из таких областей G и ее образ G^* при отображении одной из ветвей $\sqrt[3]{z}$; две другие ветви отображают G соответственно на области $e^{\frac{2\pi i}{3}} G^*$ и $e^{\frac{4\pi i}{3}} G^*$, полученные из G^* поворотом на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

Вообще, *ветвь* $\sqrt[n]{z}$ *можно выделить в любой области, которая не содержит ни одного замкнутого пути, охватывающего точку* $z=0$. В самом деле, при обходе таких и только таких путей величина $\arg z$ меняется на целое кратное 2π, и, следовательно, аналитическое продолжение вдоль них какого-либо элемента может привести к другому элементу. В областях, удовлет-

воряющих указанному условию, можно выделить n различных ветвей нашей аналитической функции. Каждая из таких ветвей отличается от другой множителями $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ и вполне характеризуется указанием области, в которой она определена, и значением в одной из точек этой области. (Например, можно говорить о ветви $\sqrt[3]{z}$, которая определена в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси и которая равна 1 при $z=1$; другие две ветви $\sqrt[3]{z}$ в этой области при $z=1$ принимают соответственно значения $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ и $e^{\frac{4\pi i}{3}}=e^{-\frac{2\pi i}{3}}$.)

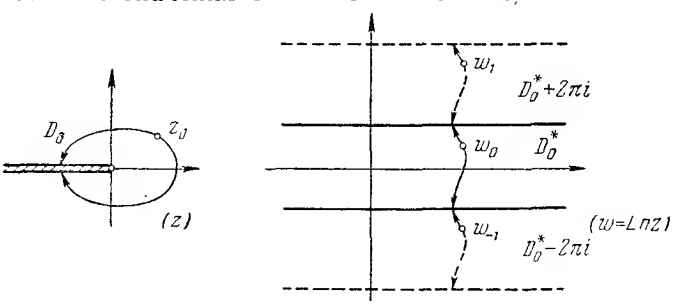


Рис. 52.

Над корнями можно производить действия в том смысле, какой им был придан в конце предыдущего пункта. В частности, можно рассматривать производную

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}}, \tag{7}$$

которая также является аналитической функцией.

2. Логарифм комплексного переменного z

$$w = \operatorname{Ln} z \tag{8}$$

можно определить аналитическим продолжением начального элемента, который состоит из области $D_0=\{-\pi<\varphi<\pi\}$ и заданной в ней функции

$$w = \ln z = \ln r + i\varphi, \qquad -\pi<\varphi<\pi, \tag{9}$$

которая называется *главной ветвью* логарифма (как и выше, мы полагаем $z=re^{i\varphi}$). Функция (9) гомеоморфно отображает D_0 на полосу $D_0^*=\{w\colon -\pi<\operatorname{Im} w<\pi\}$, (рис. 52), а так как из свойств показательной функции (п. 12) следует, что

$e^w = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} = z$, т. е. что функция (9) обратна к показательной, то по правилу дифференцирования обратных функций в каждой точке $z_0 \in D_0$ существует

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{10}$$

Таким образом, элемент $\mathcal{F}_0 = (D_0, \ln z)$ — аналитический.

Аналитическое продолжение элемента $\mathcal{F}_0$ можно, как и выше, определить при помощи семейства элементов $\mathcal{F}_\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$, которые состоят из области $D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ и голоморфной в ней функции $f_\alpha(z) = \ln r + i\varphi$, $-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$. Объединением областей этих элементов по-прежнему служит $\overline{\mathbb{C}}$ с исключенными точками $z = 0$ и $z = \infty$.

Можно определить $\operatorname{Ln} z$ также при помощи канонических элементов. В качестве начального элемента можно принять круг $U = \{|z - 1| < 1\}$ и голоморфную в нем функцию

$$\ln z|_U = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \tag{11}$$

(которая получается аналитическим продолжением в U с диаметра (0, 2) действительной функции $\ln x = \ln\{1 + (x-1)\} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$). Элементы $(D_0, \ln z)$ и $(U, \ln z|_U)$ эквивалентны.

Каждой точке $z_0 \in D = \bigcup D_\alpha$ аналитическая функция $\operatorname{Ln} z$ относит счетное множество значений, которые определяются по формуле

$$w = \ln r_0 + i(\varphi_0 + 2k\pi), \tag{12}$$

где $r_0 = |z_0|$, φ_0 — одно из возможных значений $\operatorname{Arg} z_0$ и k — произвольное целое число. Все они различны и лежат на вертикальной прямой $\operatorname{Re} w = \ln r_0$ на расстоянии, целом кратном 2π, друг от друга (см. рис. 52). Все эти значения считаются логарифмами числа z_0; таким образом, *каждое конечное комплексное число, кроме $z = 0$, имеет бесконечно много логарифмов.*

Ветви аналитической функции $\operatorname{Ln} z$, так же как $\sqrt[n]{z}$, можно выделять в любой области G, которая не содержит ни одного замкнутого пути, охватывающего точку $z = 0$. В самом деле, продолжение вдоль такого и только такого пути может перевести канонический элемент в другой элемент с тем же центром, не равный первому. В каждой области G, удовлетворяющей указанному условию, можно выделить бесконечно много ветвей

$\operatorname{Ln} z$, которые отличаются друг от друга постоянными слагаемыми — целыми кратными $2\pi i$. Поэтому ветви $\operatorname{Ln} z$, как и $\sqrt[n]{z}$, однозначно определяются указанием области, в котором рассматривается ветвь, и ее значения в одной из точек [1]).

Над логарифмом можно производить действия в смысле, указанном в п. 28. В частности, производная логарифма

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z} \tag{13}$$

оказывается функцией, голоморфной в области D (все ветви логарифма имеют одну и ту же производную). Голоморфна и функция

$$e^{\operatorname{Ln} z} \equiv z; \tag{14}$$

в этом смысле можно описательно говорить, что логарифм является функцией, обратной к показательной [2]).

Не так благополучно обстоит дело с алгебраическими действиями над логарифмами. Например, справедливое равенство

$$\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z = 2 \operatorname{Ln} z$$

(в самом деле, в обеих его частях стоит аналитическая функция, определяемая элементом $(D_0, 2\ln z)$) нельзя рассматривать как равенство для соответствующих значений логарифма в фиксированной точке $z_0 \in D$:

$$\operatorname{Ln} z_0 + \operatorname{Ln} z_0 \neq 2 \operatorname{Ln} z_0 \text{ (!)}$$

(в самом деле, действия над совокупностями чисел $\operatorname{Ln} z_0$ не определены, поэтому такое равенство просто не имеет смысла; если же определить эти действия «естественным» образом как действия над совокупностями, то получится неправильный результат: $2\ln r_0 + 2k\pi i = 2(\ln r_0 + 2k\pi i)$, где k — произвольное целое число).

Мы закончим раздел, посвященный логарифму, упоминанием о споре, который разгорелся в 1712—1713 гг. в переписке между двумя крупнейшими математиками того времени Иоганном Бернулли и Г. Лейбницем [3]) о логарифмах отрицательных чисел. Бернулли утверждал, что они

---

[1]) Это справедливо не для всех аналитических функций. Например, аналитическая функция $e^{\sqrt{z}}$, которую мы рассматривали в п. 28, в точке $z_0 = -\pi^2$ имеет две различные ветви, соответствующие двум значениям $\sqrt{z_0} = \pm \pi i$; однако значения $e^{\pm \pi i}$ этих ветвей в точке z_0 совпадают.

[2]) Точнее, в правой части (14) стоит сужение функции на область D, ибо левая часть не определена при $z = 0$ и $z = \infty$.

[3]) Подробнее об этом можно прочитать в книге А. И. Маркушевича Очерки по истории теории аналитических функций, Физматгиз, М.—Л., 1951; мы пользуемся здесь его изложением.

действительны и что $\ln(-x)=\ln x$. Вот один из его доводов в пользу этого утверждения: из равенства $(-x)^2=x^2$ следует, что $2\ln(-x)=2\ln x$. Лейбниц же утверждал, что логарифмы отрицательных чисел мнимы и что тождество $\ln(-x)=\ln x$ не имеет места, в частности, $\ln(-1)\neq 0$. Вот один из доводов Лейбница в пользу последнего утверждения: если подставить $x=-2$ в разложение $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$, то получится равенство $\ln(-1)=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots$, в котором все члены справа отрицательны, и, следовательно, $\ln(-1)\neq 0$.

В 1749 г. в спор вступил Л. Эйлер. Он опубликовал статью, в которой утверждал, что ни один из спорщиков не прав. В частности, приведенный выше аргумент Бернулли он опровергал так. Подобным же образом из равенства $(x\sqrt{-1})^4=x^4$ можно заключить, что $\ln x+\ln\sqrt{-1}=\ln x$, т. е. что $\ln\sqrt{-1}=0$. Но сам Бернулли открыл, что $\frac{\ln\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}$, а в последнем равенстве сомневаться нельзя, ибо, писал Эйлер, «это открытие обосновано наиболее надежными средствами анализа». Приведенный выше довод Лейбница Эйлер также не считал убедительным. Он привел следующий пример: если положить в разложении $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$ один раз $x=-3$, а другой $x=1$ и сложить результаты, то получится равенство $0=2+2+10+26+\ldots$, в котором левая часть равна 0, хотя, как писал Эйлер, «правая часть представляется отличной от нуля».

В упомянутой статье Эйлер предложил правильное решение спора: логарифмы отрицательных (как и других комплексных чисел) имеют бесконечное множество значений. Небезынтересна его аргументация. Значение $y=\ln x$ определяется из уравнения $x=e^y=\left(1+\frac{y}{i}\right)^i$, где i — «бесконечно большое число» (термин и обозначение Эйлера). Отсюда получается, что $y=i\left(x^{\frac{1}{i}}-1\right)$, а число $x^{\frac{1}{i}}$ — «корень с бесконечно большим показателем» — имеет бесконечно много значений, вообще говоря, комплексных.

Интересно также, что в 1761 г. Ж. Даламбер в этом споре принял сторону Бернулли против Лейбница и Эйлера.

3. Обратные тригонометрические функции просто выражаются через корни и логарифмы. Найдем такое выражение, например, для арккосинуса. Решая уравнение $\cos w=z$, или $\frac{1}{2}(e^{iw}+e^{-iw})=z$, или, наконец,

$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$$

как квадратное уравнение относительно e^{iw}, найдем

$$e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$$

(мы не пишем здесь обычный знак $\pm$, ибо по нашему определению квадратный корень и так имеет два значения). Остается заметить, что из последнего равенства

$$w=\operatorname{Arccos} z=i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \qquad (15)$$

(мы ставим перед логарифмом i, а не $\frac{1}{i}$, как должны были бы, потому, что в силу соотношения $\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}=z-\sqrt{z^2-1}$ изменение знака перед логарифмом сводится к изменению знака перед корнем, а последний все равно имеет два значения).

Аналогичные выражения справедливы и для других обратных тригонометрических функций, например

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\qquad \operatorname{Arctg} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}. \tag{16}$$

Формулы (15) и (16) напоминают известные формулы для обратных гиперболических функций, и это неудивительно, ибо в комплексном анализе тригонометрические функции просто связаны с гиперболическими (см. п. 13).

Обратные тригонометрические функции представляют собой аналитические функции, и в формулах (15) и (16) действия надо понимать так, как принято выше (при помощи ветвей).

4. Общая степенная функция $w=z^a$, где a — произвольное комплексное число, определяется соотношением

$$w=z^a=e^{a\operatorname{Ln} z} \tag{17}$$

и представляет собой аналитическую функцию. Для действительных показателей $a\in\mathbb{R}$ будем различать три случая:

а) a — целое число. В этом случае функция (17) однозначна — многозначность логарифма погашается периодичностью показательной функции. Поэтому функция голоморфна при $a>0$ в $\mathbb{C}$ (точка $z=0$ устранимая), а при $a<0$ в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ (точка $z=\infty$ устранимая).

б) $a=\frac{p}{q}$ — рациональное число (мы предполагаем, что дробь несократима). Здесь многозначность логарифма лишь частично погашается периодичностью показательной функции, и функция (17) каждому $z\neq 0,\ \neq\infty$ ставит в соответствие q различных значений. Она совпадает с аналитической функцией $w=\sqrt[q]{z^p}$.

в) a — иррациональное число. Здесь различным значениям $a\operatorname{Ln} z$, которые отличаются друг от друга на целое кратное $2a\pi i$, соответствуют и различные значения $e^{a\operatorname{Ln} z}$. Погашения, наблюдавшегося в предыдущих случаях, не происходит, и функция (17) каждому $z\neq 0,\ \neq\infty$ ставит в соответствие счетное множество значений.

Пусть теперь $a=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$, не является действительным числом. Простой подсчет

$$z^a=e^{(\alpha+i\beta)[\ln r+i(\varphi+2k\pi)]}=e^{\alpha\ln r-\beta(\varphi+2k\pi)}e^{i[\beta\ln r+\alpha(\varphi+2k\pi)]}$$

(где положено $z=re^{i\varphi}$ и k — произвольное целое число) показывает, что в этом случае каждому комплексному числу $z\neq 0, \neq\infty$ функция относит счетное множество значений, модули которых $r^{\alpha}e^{-\beta\varphi}e^{-2k\pi\beta}=\rho_0 e^{-2k\pi\beta}$ образуют бесконечную в обе стороны геометрическую прогрессию со знаменателем $q=e^{-2\pi\beta}$, а аргументы $\beta\ln r+\alpha\varphi+2k\pi\alpha=\psi_0+2k\pi\alpha$ — бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью $d=2\pi\alpha$, если $\alpha\neq 0$, и $d=0$, если $\alpha=0$.

Например [1]),

$$i^i=e^{i\operatorname{Ln} i}=e^{i\left(i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\qquad k=0,\ \pm 1,\ \ldots \tag{18}$$

5. Общая показательная функция $w=a^z$, где a — произвольное комплексное число $a\neq 0, \neq\infty$, определяется соотношением

$$w=a^z=e^{z\operatorname{Ln} a}. \tag{19}$$

Этот принятый термин неправомочен. В самом деле, (19) не является функцией в обычном смысле слова, ибо $\operatorname{Ln} a=\ln|a|+i\arg a+2k\pi i$ $(k=0,\ \pm 1,\ \ldots)$ принимает бесконечно много значений и поэтому a^z (при нецелых z) многозначна. *Но она не является и аналитической функцией*, ибо отдельные ее элементы, которые получаются, если выбрать для лографма какое-либо из его значений, не являются аналитическим продолжением друг друга.

Таким образом, a^z следует рассматривать как совокупность различных (целых) функций

$$e^{z(\ln|a|+i\arg a)}e^{2k\pi iz}\qquad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

30. Особые точки. В п. 24 мы рассмотрели изолированные особые точки голоморфных функций (их называют еще *особыми точками однозначного характера*). Но, например, точка $z=0$, являясь особой для аналитической функции $w=\sqrt{z}$, не входит в классификацию, приведенную в п. 24. Поэтому мы ставим здесь своей задачей обобщить эту классификацию, введя понятие особой точки аналитической функции. Как и в п. 24, мы ограничимся простейшим случаем изолированных особых точек.

Определение 1. Точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой* некоторой аналитической функции, если существует проколотая окрестность V' точки a такая, что некоторый

[1]) Неискушенному этот пример должен показаться очень удивительным: мнимое число $i=\sqrt{-1}$ мы возводим в мнимую степень $\sqrt{-1}$ и получаем бесконечно много значений, да еще все они действительны!

элемент $\mathscr{F}=(U, f)$, принадлежащий этой функции, продолжается аналитически вдоль любого пути $\gamma\subset V'$.

Таковы, например, точки $z=0$ и $z=\infty$ для аналитических функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$ (в качестве V' для обеих точек можно взять кольцо $\{0<|z|<\infty\}$). Для функции $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$ особыми будут как точки $z=0$ и $z=\infty$, обусловленные особенностями $\sqrt{z}$, так и точка $z=1$, обусловленная тем, что в ней одна из ветвей функции (для которой $\sqrt{z}$ при $z=1$ равен -1) имеет полюс (другая ветвь, для которой $\sqrt{z}$ при $z=1$ равен 1, правильна в этой точке).

Классификацию изолированных особых точек аналитических функций мы будем проводить в зависимости от поведения их элементов при продолжении вдоль замкнутых путей $\gamma\subset V'$.

Лемма. *Пусть a — изолированная особая точка некоторой аналитической функции и V' — проколотая окрестность такая, как в определении* 1. *Если какой-либо принадлежащий функции элемент $\mathscr{F}_0$ при продолжении вдоль некоторого замкнутого пути $\gamma_0\subset V'$ не меняется* [1]), *то и любой элемент $\mathscr{F}$, получаемый из $\mathscr{F}_0$ продолжением в V', не меняется при продолжении вдоль любого пути γ, гомотопного γ_0 в V'.*

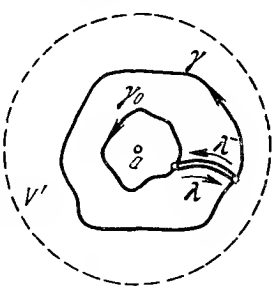


Рис. 53.

◀ Пусть λ — путь в V', переводящий $\mathscr{F}_0$ в $\mathscr{F}$, и $\gamma'=\lambda^{-}\cup\gamma_0\cup\lambda$ (проходится в порядке λ^{-}, γ_0, λ; см. п. 14). Очевидно, $\gamma'\sim\gamma$ в V' (рис. 53) и имеет с γ общие концы, поэтому по теореме 3 п. 27 продолжения вдоль γ и γ' совпадают. Но λ^{-} переводит $\mathscr{F}$ в $\mathscr{F}_0$, γ_0 не меняет $\mathscr{F}_0$, а λ переводит $\mathscr{F}_0$ в $\mathscr{F}$, т. е. продолжение вдоль γ' не меняет $\mathscr{F}$ ▶

Из этой леммы следует, что продолжение вдоль замкнутых путей, гомотопных нулю в V', не меняет элементов (ибо такие пути стягиваются в пути, лежащие в круге какого-либо элемента, а продолжение вдоль последних очевидно не меняет элементов). Поэтому в нашем исследовании представляет интерес лишь продолжение вдоль путей, негомотопных нулю в V'.

Определение 2. Пусть a — изолированная особая точка некоторой аналитической функции, V' — проколотая окрестность

---

[1]) Или заменяется элементом, эквивалентным исходному (если рассматриваемые элементы не канонические).

такая, как в определении 1, и $\gamma_0 \subset V'$ — замкнутый жорданов путь, содержащий точку a внутри. Будем различать два случая:

(I) если обход γ_0 не меняет исходного элемента функции, то a называется *особой точкой однозначного характера*;

(II) если обход γ_0 приводит к элементу, отличному от исходного, то a называется *особой точкой многозначного характера* или *точкой ветвления*.

В случае (I) продолжение исходного элемента вдоль любого пути $\lambda \subset V'$, ведущего в фиксированную точку $z \in V'$, приводит к одному и тому же элементу. В самом деле, если бы существовали два таких пути λ_1 и λ_2, приводящие к различным элементам, то замкнутый путь $\gamma = \lambda_1^- \cup \lambda_2 \subset V'$ менял бы элемент. Но путь γ либо гомотопен 0 и тогда не может менять элемента по сделанному выше замечанию, либо гомотопен несколько раз проходимому (в положительном или отрицательном направлении) пути γ_0 и по лемме также не меняет элемента. Это противоречие доказывает сделанное утверждение.

Из него следует, что в случае (I) продолжение начального элемента по путям, принадлежащим V', приводит к однозначной, т. е. голоморфной в V' функции f, которая является ветвью рассматриваемой аналитической функции[1]). Точка a является изолированной особой точкой f в смысле п. 24. В зависимости от поведения f при приближении к a эта точка может быть устранимой, полюсом или существенно особой. (Впрочем, если начальный элемент канонический, то случай устранимой точки исключен, ибо в этом случае круг сходимости элемента содержал бы точку a.)

В случае (II) аналитическая функция, которая получается продолжением начального элемента вдоль путей, принадлежащих V', не допускает выделения в V' голоморфной ветви[2]). Случай (II) мы разобьем на два подкласса.

(IIa) Существует целое число $n \geqslant 2$ такое, что n-кратный обход γ_0 в одном направлении приводит к исходному элементу.

---

[1]) Продолжение начального элемента по путям, не принадлежащим V', может привести к другому элементу с тем же центром, так что рассматриваемая аналитическая функция может быть неоднозначной. Так, продолжение произвольного элемента аналитической функции $\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$ по путям, принадлежащим $V' = \{0 < |z-1| < 1\}$, приводит к однозначной функции (одной из двух ветвей $\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$), но продолжение вдоль замкнутого пути, обходящего точку $z=0$, переводит элемент, принадлежащий одной ветви, в элемент, принадлежащий другой ветви.

[2]) Хотя в V' и может существовать голоморфная ветвь рассматриваемой функции, которая получается из начального элемента продолжением по путям, выходящим за пределы V' (см. ниже пример 5).

В этом случае a называется точкой ветвления *конечного порядка*, а наименьшее из чисел n, обладающих описанным свойством, называется *порядком ветвления*.

Нетрудно видеть, что порядок ветвления не изменится, если заменить γ_0 любым путем γ, гомотопным γ_0 в V'. В самом деле, обозначим через $k\gamma$ путь, который получается k-кратным обходом γ в одном направлении (совпадающим с направлением γ, если $k>0$, и противоположном ему, если $k<0$); если $\gamma\sim\gamma_0$, то и $k\gamma\sim k\gamma_0$ и по доказанной выше лемме обходы $k\gamma$ и $k\gamma_0$ либо оба меняют, либо оба не меняют исходного элемента. Читателю предоставляется доказать, что если какой-либо замкнутый путь $\gamma\subset V'$ не меняет исходного элемента, то этот путь гомотопен целому (положительному, отрицательному или нулевому) кратному пути $n\gamma_0$, где n — порядок ветвления точки a.

(IIб) Такого целого числа n, как в случае (IIа), не существует, т. е. обходы γ_0 в одном направлении приводят все к новым и новым элементам. В этом случае a называется точкой ветвления *бесконечного порядка* или *логарифмической* точкой ветвления.

Примеры.

1. Функция $\sqrt[n]{z}$ имеет в точках $z=0$ и $z=\infty$ точки ветвления порядка n. Функция $\operatorname{Ln} z$ имеет в тех же точках логарифмические точки ветвления.

2. Функция $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ в точке $z=0$ имеет устранимую особую точку, а в точке $z=\infty$ — существенно особую точку; она является голоморфной целой функцией (это видно из разложения

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=1-\frac{1}{3!}z+\frac{1}{5!}z^2-\ldots,$$

справедливого в кольце $V'=\{0<|z|<\infty\}$).

3. Функция $\sqrt{e^{z^2}+1}$ во всех корнях уравнения $e^{z^2}+1=0$, т. е. точках $z_k=\sqrt{\operatorname{Ln}(-1)}=\pm\sqrt{\pi i+2k\pi i}$, имеет точки ветвления второго порядка; точка $z=\infty$ является ее неизолированной особой точкой.

4. Функция $\dfrac{1}{\operatorname{Ln} z}$ имеет логарифмические точки ветвления при $z=0$ и $z=\infty$; при $z=1$ одна из ее ветвей в кольце $\{0<|z-1|<1\}$ (главная ветвь) имеет полюс первого порядка, остальные ветви голоморфны в этой точке.

5. Разберем подробно пример аналитической функции

$$w=\sqrt{1+\sqrt{z}}.$$

В точке $z=0$ внутренний корень имеет точку ветвления второго порядка. Если в окрестности $U'=\{0<|z|<1\}$ мы выберем круг $U=\{|z-1/2|<1/2\}$, то в U можно выделить четыре различные ветви f_ν этой функции, характеризуемые различными знаками обоих корней. Пусть f_1 — одна из этих

ветвей; элемент $\mathcal{F}_1=(U, f_1)$ после продолжения вдоль окружности γ_0: $z=\frac{1}{2}e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, перейдет в элемент $\mathcal{F}_2=(U, f_2)$, где f_2 — другая ветвь, ибо внутренний корень при таком обходе изменит знак. Повторный обход γ_0 снова приведет к элементу $\mathcal{F}_1$, ибо обходы γ_0 не меняют ветвей внешнего корня, точкой ветвления которого является $z=1$. Точно в таком же отношении находятся две остальные ветви: $f_3=-f_1$ и $f_4=-f_2$. Таким образом, в точке $z=0$ рассматриваемая функция имеет две различные точки ветвления второго порядка.

Перейдем к изучению точки $z=1$, в которой для одного из значений внутреннего корня подкоренное выражение внешнего корня обращается в нуль. Пусть $V'=\{0<|z-1|<1\}$, $V=\{|z-1/2|<1/2\}$ и g_ν — четыре ветви нашей функции в круге V. Пусть g_1 и g_2 ($g_2=-g_1$) — ветви, для которых внутренний корень равен -1 при $z=1$. Обход окружности γ_1: $z=1+\frac{1}{2}e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, не изменит ветви внутреннего корня, но изменит знак у внешнего корня (когда z описывает окружность γ_1, точка $\zeta=1+\sqrt{z}$, где рассматривается выбранная ветвь внутреннего корня, описывает в плоскости ζ замкнутый жорданов путь, содержащий внутри точку $\zeta=0$), поэтому при таком обходе элемент (V, g_1) перейдет в (V, g_2). Вторичный обход γ_1 снова изменит знак внешнего корня и поэтому снова приведет к элементу (V, g_1). Оставшиеся две ветви g_3 и g_4 ($g_4=-g_3$), для которых внутренний корень равен 1 при $z=1$, при обходе γ_1 не изменятся (при этом точка $\zeta=1+\sqrt{z}$ с выбранной ветвью корня опишет замкнутый жорданов путь, охватывающий точку $\zeta=2$ и не охватывающий $\zeta=0$), следовательно такой обход переведет каждый из элементов (V, g_3) и (V, g_4) в себя. Таким образом, в точке $z=1$ рассматриваемая функция имеет одну точку ветвления второго порядка и два правильных, неразветвленных элемента [1]).

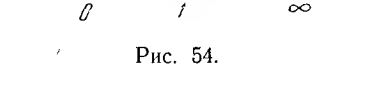


Рис. 54.

Для изучения функции в точке $z=\infty$ надо взять проколотую окрестность $W'=\{1<|z|<\infty\}$ и в ней, например, круг $W=\{|z-2|<1\}$. Пусть (W, h_1) — какой-либо из четырех элементов функции в круге W. Обход окружности γ_3: $z=2e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, приводит к изменению знака как у внутреннего, так и у внешнего корня (при этом точка $\zeta=1+\sqrt{z}$ при любом выборе ветви корня опишет замкнутый путь вокруг точки $\zeta=0$), поэтому он приведет к другому элементу (W, h_2). Вторичный обход γ_3 приведет к третьему элементу (W, h_3), трехкратный — к четвертому (W, h_4), и лишь четырехкратный обход γ_0 приведет к исходному элементу (W, h_1). Таким образом, в точке $z=\infty$ рассматриваемая функция имеет точку ветвления четвертого порядка.

Остальные точки $\overline{\mathbb{C}}$ являются правильными точками этой аналитической функции.

На рис. 54 изображен схематически результат нашего исследования.

В заключение приведем один результат, относящийся к точкам ветвления конечного порядка. Мы покажем, что в окрестности такой точки a аналитическую функцию можно разложить

[1]) Элементы (U, g_3) и (U, g_4) не являются каноническими, ибо их круг сходимости больше U.

в ряд по дробным степеням $z-a$, являющийся обобщением ряда Лорана.

Теорема. *В некоторой проколотой окрестности* $V'=\{0<|z-a|<R\}$ *точки ветвления конечного порядка* n *аналитическую функцию*[1]) *можно представить разложением вида*

$$w=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{\frac{k}{n}}. \tag{1}$$

◀ Положим $z-a=\zeta^n$; когда точка ζ описывает в плоскости ζ достаточно малую окружность λ: $\zeta=\rho e^{i\tau}$, $0\leqslant\tau\leqslant 2\pi$, соответствующая точка $z=a+\zeta^n$ описывает n раз окружность γ_0: $z=a+\rho^n e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Так как начальный элемент рассматриваемой аналитической функции при таком обходе не меняется, то соответствующий элемент функции w, рассматриваемой в зависимости от переменной ζ, не меняется при однократном обходе λ.

Отсюда следует, что $\zeta=0$ является особой точкой однозначного характера этой функции и, значит, в некоторой проколотой окрестности точки $\zeta=0$ она представляется рядом Лорана

$$w=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k. \tag{2}$$

Подставляя сюда $\zeta=\sqrt[n]{z-a}=(z-a)^{\frac{1}{n}}$, получаем разложение (1) ▶

В зависимости от «главной части» разложения (1), т. е. совокупности членов с отрицательными индексами k, ветви рассматриваемой аналитической функции непрерывны в точке (как $\sqrt{z}$ или $e^{\sqrt{z}}$ в точке $z=0$), стремятся к бесконечности при $z\to a$ (как $\frac{1}{\sqrt{z}}$ при $z\to 0$) или не стремятся ни к какому пределу при $z\to a$ (как $e^{\frac{1}{\sqrt{z}}}$ при $z\to 0$). Это различие считается не так уж существенным, и во всех случаях a называют точкой ветвления конечного порядка.

Пример. Пользуясь биномиальным рядом, нетрудно написать обобщенные лорановские разложения аналитической функции из разобранного выше примера 5. В кольце $U'=\{0<|z|<1\}$ имеем

$$\sqrt{1+\sqrt{z}}=\pm\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{z}-\frac{1}{8}z+\frac{1}{16}z\sqrt{z}-\ldots\right),$$

[1]) Точнее, совокупность принадлежащих этой функции элементов, которые получаются из какого-либо одного продолжением вдоль всевозможных путей $\gamma\subset V'$.

в кольце $W'=\{1<|z|<\infty\}$

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{z}}=\sqrt[4]{z}\left(1+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{z}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{z}}-\frac{1}{8z}+\frac{1}{16z\sqrt{z}}-\ldots\right),$$

а в кольце $V'=\{0<|z-1|<1\}$

$$\sqrt{1+\sqrt{z}}=\sqrt{1\pm\{1+(z-1)\}^{\frac{1}{2}}}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{z-1}}{i\sqrt{2}}\left\{1+\dfrac{1}{8}(z-1)+\ldots\right\},\\ \pm\sqrt{2}\left\{1+\dfrac{1}{8}(z-1)+\ldots\right\}.\end{cases}$$

Эти разложения хорошо иллюстрируют проведенный выше анализ точек ветвления рассматриваемой функции.

§ 9. Понятие римановой поверхности

Аналитическая функция может сопоставлять точкам плоской области несколько (даже счетное множество) значений. В этом параграфе мы рассмотрим вместо плоских областей многолистные поверхности, которые можно мыслить расположенными над этими областями и которые имеют над точкой z столько «листов», сколько значений приписывает аналитическая функция этой точке. Поэтому на таких поверхностях аналитические функции можно рассматривать как функции в обычном смысле слова (т. е. как однозначные функции).

31. Элементарный подход. Начнем с простейшего примера. Рассмотрим в области D, которая представляет собой плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси, две ветви f_1 и f_2 аналитической функции

$$w=\sqrt{z}. \tag{1}$$

Пусть f_1 характеризуется условием $f_1(1)=1$, а f_2 — условием $f_2(1)=-1$; мы имеем, очевидно, $f_2(z)=-f_1(z)$ для всех $z\in D$. Эти ветви однолистно и конформно отображают D соответственно на правую и левую полуплоскости w, которые мы обозначим через D_1^* и D_2^*.

Возьмем два экземпляра области D и расположим их друг над другом, как указано на рис. 55, *а*. На рис. 55 указано также соответствие берегов разрезов в области D и участков мнимой оси плоскости w — соответствующие участки отмечены одинаковыми рисунками.

Склеим верхний берег разреза на первом экземпляре области D с нижним берегом разреза на втором экземпляре и в соответствии с этим склеим D_1^* и D_2^* вдоль верхней полуоси (все эти участки отмечены рисунком -|-|-|-). Затем склеим между собой

оставшиеся свободными берега разрезов на D, отмеченные рисунком -||-||- (в трехмерном пространстве при второй склейке нельзя избежать самопересечений, но мы условимся не отождествлять точки луча, по которому происходит самопересечение поверхности, отмеченные разными рисунками).

Полученная двулистная поверхность (она изображена на рис. 55, *в*) называется *римановой поверхностью аналитической функции* $\sqrt{z}$. Этот корень можно рассматривать на ней как функцию в обычном смысле слова, ибо два значения, которые сопоставляет корень каждой точке $z_0 \neq 0, \neq \infty$, мы будем относить

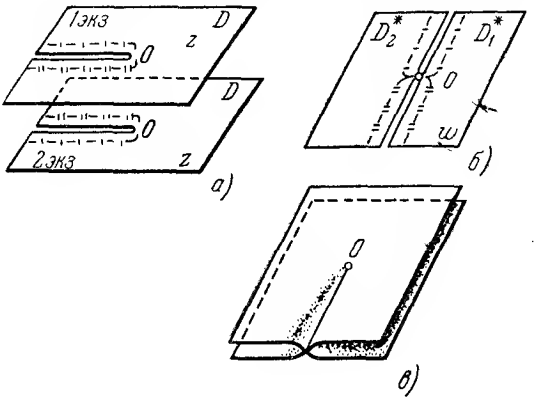


Рис. 55.

двум различным точкам поверхности, лежащим над z_0. Точки отрицательной полуоси $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ не составляют исключения, ибо над каждой из них также лежит по две точки поверхности (мы ведь условились не отождествлять точки различных листов, принадлежащие линии самопересечения поверхности). Лишь точкам $z=0$ и $z=\infty$ корень сопоставляет по одному значению, поэтому мы будем считать, что над $z=0$ и $z=\infty$ лежит по одной точке поверхности. В этих точках листы нашей поверхности соединяются между собой; они называются *критическими точками* или *точками ветвления* поверхности.

Вполне аналогично устроена риманова поверхность аналитической функции

$$w = \sqrt[n]{z}. \tag{2}$$

Она n-листна; над каждой точкой $z \neq 0, \neq \infty$ лежит по n различных точек поверхности (они называются *обыкновенными* ее точками), над $z=0$ и $z=\infty$ — по одной (*критической*) точке. На

рис. 56, *а, б* изображены соответственно части поверхности, лежащие над окрестностью правильной и особой точки функции $\sqrt[3]{z}$. Точки отрицательной полуоси не составляют исключения;

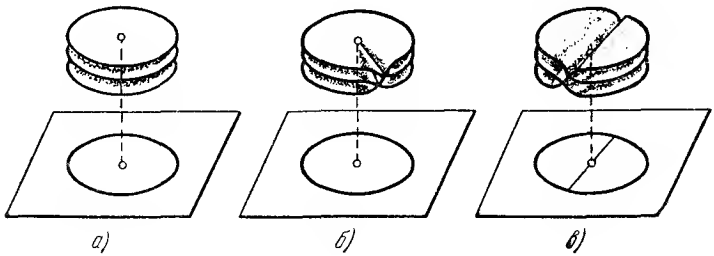


Рис. 56.

часть поверхности, лежащая над окрестностью такой точки, изображена на рис. 56, *в*. Так как самопересечение поверхности мы не принимаем в расчет, то топологически этот рисунок не отличается от рис. 56, *а* — рассматриваемая часть состоит из трех не связанных друг с другом кругов.

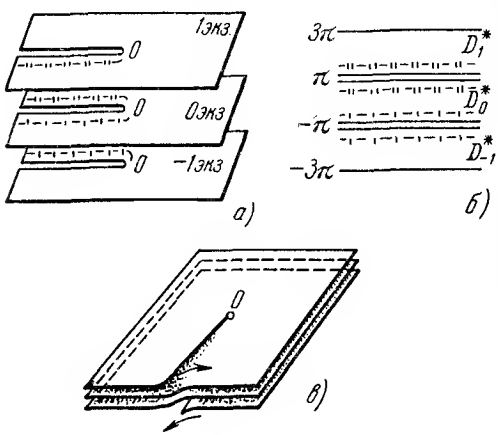


Рис. 57.

Риманова поверхность логарифма

$$w = \operatorname{Ln} z \qquad (3)$$

бесконечнолистна. Ее устройство показано на рис. 57. Мы опять берем область D — плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси — и в ней главную ветвь логарифма

$$w = f_0(z) = \ln|z| + i \arg z$$
$$(-\pi < \arg z < \pi).$$

Эта функция однолистно и конформно отображает D на полосу

$$D_0^* = \{-\pi < \operatorname{Im} w < \pi\};$$

соответствие берегов разреза и границ полосы указано на рис. 57.

Логарифм имеет в области D бесконечно много ветвей

$$w = f_k(z) = f_0(z) + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots),$$

отображающих D на полосы D_k^*, сдвинутые по отношению к D_0^* на целое кратное $2\pi i$. В соответствии с этим мы берем счетное множество экземпляров области D и склеиваем верхний берег разреза на 0-м экземпляре с нижним берегом разреза на 1-м экземпляре, а нижний берег нулевого разреза — с верхним берегом разреза на —1-м экземпляре (рис. 57). К оставшимся свободным берегам мы затем приклеиваем соответственно нижний берег разреза на 2-м и верхний берег разреза на —2-м экземпляре и т. д.

Над окрестностью каждой точки $z\neq 0, \neq\infty$ лежит часть поверхности, состоящая из счетного множества отдельных кругов; каждому кругу мы отнесем ветвь логарифма с соответствующим номером, действующую в этой окрестности (точки отрицательной полуоси не составляют исключения). Поэтому логарифм можно рассматривать на построенной римановой поверхности как функцию в обычном смысле слова. В точках $z=0$ и $z=\infty$ логарифм не определен, поэтому мы будем считать, что его риманова поверхность не имеет точек над $z=0$ и $z=\infty$.

В качестве более сложного примера рассмотрим риманову поверхность арксинуса

$$w=\operatorname{Arcsin} z. \tag{4}$$

В п. 13 мы видели, что функция $z=\sin w$ однолистно и конформно отображает полуполосу $\left\{-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} w>0\right\}$ на верхнюю полуплоскость z; ясно, что вся полоса $\left\{-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2}\right\}$ при этом отображается на плоскость z с разрезами вдоль лучей $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$.

Мы обозначим последнюю область через G и через $w=g_0(z)$ обозначим ту ветвь арксинуса, которая отображает G на полосу $G_0^*=\left\{-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2}\right\}$ (эту ветвь можно характеризовать также условием $g_0(0)=0$). Так как арксинус имеет счетное множество ветвей, то для построения римановой поверхности мы должны взять счетное множество экземпляров области G. К k-му экземпляру ($k=0, \pm 1, \ldots$) мы отнесем значения k-й ветви арксинуса $w=g_k(z)$, которая отображает G на полосу $G_k^*=\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi<\operatorname{Re} w<\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ (ее можно характеризовать также условием $g_k(0)=k\pi$).

Остается склеить между собой отдельные экземпляры области в соответствии с тем, как склеены их образы G_k^*. Как это сделать, видно из рис. 58

В результате получится бесконечнолистная риманова поверхность, которая имеет над точками $z=\pm 1$ счетное множество точек ветвления. В точке $z=\infty$ она имеет две логарифмические точки ветвления (одну образуют четные экземпляры области

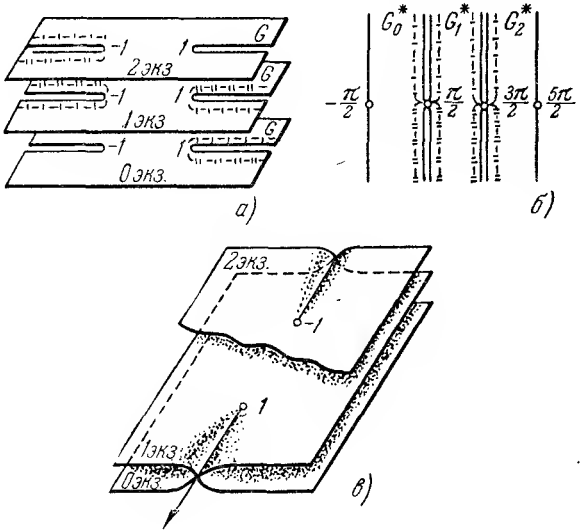


Рис. 58.

G, другую — нечетные). К этому же выводу можно прийти, исследуя выражение арксинуса через логарифм

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(\sqrt{1-z^2}+iz\right).$$

32. Общий подход. Здесь мы введем общее понятие римановой поверхности как некоторого абстрактного топологического пространства. Хотя понятием топологического пространства мы уже не раз пользовались, остановимся на нем подробнее.

Определение 1. Множество X называется *топологическим пространством*, если в нем указана система подмножеств, называемых *открытыми множествами*, причем:

1) объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств снова являются открытыми множествами;

2) пустое множество и все пространство X являются открытыми множествами.

Открытое множество, содержащее точку $x\in X$, называется *окрестностью* этой точки.

Когда на множестве X указывается система открытых множеств (или окрестностей точек), удовлетворяющая требованиям

1) и 2), то говорят, что на X вводится структура топологического пространства. В частности, структуру топологического пространства всегда можно ввести в метрическом пространстве. Для этого достаточно объявить окрестностями точки $x_0 \in X$ шары с центром x_0 и произвольным радиусом R в метрике рассматриваемого пространства, т. е. множества $\{x \in X: \rho(x_0, x) < R\}$. Открытыми множествами считаются те, которые вместе с каждой точкой содержат и какую-либо окрестность этой точки.

Определение 2. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым пространством*, если его окрестности удовлетворяют следующей аксиоме отделимости: у любых двух различных точек из X существуют непересекающиеся окрестности.

Пример нехаусдорфова пространства. Точками X служат точки действительной оси $\mathbb{R}$; топология вводится так: открытыми множествами объявляются ось $\mathbb{R}$, пустое множество и все множества, получаемые из $\mathbb{R}$ исключением конечного числа точек. Читатель легко проверит, что аксиомы топологического пространства (требования в определении 1) выполняются, а аксиома отделимости — нет.

Перейдем к описанию общего понятия римановой поверхности. Рассмотрим множество $\mathfrak{R}$, точками которого служат пары

$$A = \{a, f_a(z)\}, \tag{1}$$

где точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ и функция

$$f_a(z) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, & \text{если} \quad a \in \mathbb{C}, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}, & \text{если} \quad a = \infty, \end{cases} \tag{2}$$

голоморфна в некотором круге U_a с центром в a; для определенности будем считать U_a кругом сходимости соответствующего ряда (2). Введем в $\mathfrak{R}$ топологию следующим образом: под *ε-окрестностью* $\mathcal{U}(A)$ точки $A \in \mathfrak{R}$ будем понимать совокупность точек $B = \{b, f_b(z)\}$ таких, что: 1) b принадлежит ε-окрестности точки a (т. е. $\{|z-a| < \varepsilon\}$, если $a \in \mathbb{C}$, и $\left\{|z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$, если $a = \infty$), 2) элемент (U_b, f_b) является непосредственным аналитическим продолжением элемента (U_a, f_a).

Можно представлять себе точку A как точку римановой поверхности в описанном в п. 31 элементарном смысле, лежащую над точкой $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Дополнительное указание функции $f_a(z)$ равносильно указанию листа, которому эта точка принадлежит. Окрестность $\mathcal{U}(A)$ состоит из точек B того же листа,

которые проектируются в окрестность точки a (рис. 59); точки других листов, проектирующиеся в ту же окрестность (как B' на рис. 59), не считаются принадлежащими $U(A)$.

Нетрудно видеть, что описанная топология вводит на $\mathfrak{R}$ структуру хаусдорфова пространства. В самом деле, если в этом пространстве считать открытыми множествами те, которые содержат вместе с каждой точкой и какую-либо окрестность этой точки, то требования из определения 1 будут выполняться. Проверим выполнение аксиомы отделимости: если $A \neq B$, то либо $a \neq b$, либо $a = b$, но $f_a \neq f_b$. Для построения непересекающихся окрестностей $U(A)$ и $U(B)$ в первом случае достаточно выбрать непересекающиеся окрестности точек a и b на $\overline{\mathbb{C}}$, а во втором — выбрать ε столь малым, чтобы ε-окрестность точки a принадлежала кругам сходимости обоих рядов f_a и f_b, и в $U(A)$ включить все точки (c, f_c), где (U_c, f_c) является непосредственным продолжением (U_a, f_a), а в $U(B)$ — все точки (c, f_c), где (U_c, f_c) — непосредственное продолжение (U_b, f_b) (окрестности $U(A)$ и $U(B)$ не пересекаются, ибо иначе элемент (U_b, f_b) совпадал бы с (U_a, f_a)).

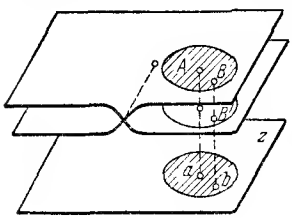


Рис. 59.

Определение 3. Хаусдорфово пространство $\mathfrak{R}$, точками которого служат пары $A = \{a, f_a(z)\}$, где $a \in \overline{\mathbb{C}}$ и f_a — голоморфная в точке a функция, а топология введена описанным способом, называется *римановым многообразием.*

Можно определить *проекцию* риманова многообразия $\mathfrak{R}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ как отображение

$$p: \{a, f_a(z)\} \to a. \tag{3}$$

Глобально это отображение не является взаимно однозначным, ибо на $\mathfrak{R}$ существует бесконечно много точек с одной и той же проекцией. Но локально оно взаимно однозначно. В самом деле, если точка b принадлежит кругу сходимости ряда f_a, то непосредственное аналитическое продолжение (U_b, f_b) элемента (U_a, f_a) вполне определено и, следовательно, в достаточно малой окрестности $U(A)$ существует лишь одна точка с проекцией b. Очевидно также, что и (3), и обратное к нему отображение непрерывны, поэтому *проекция является локальным гомеоморфизмом.*

Проекция преобразует окрестность $U(A)$ в некоторый круг плоскости $\overline{\mathbb{C}}$; совершая дополнительное дробно-линейное ото-

бражение этого круга на единичный круг $\{|\zeta|<1\}$, можно считать, что в $U(A)$ определен гомеоморфизм

$$T_U\colon\ U(A)\to\{|\zeta|<1\}. \tag{4}$$

Каждая точка $B\in U(A)$ однозначно характеризуется своей проекцией b и, следовательно, точкой $\zeta=T_U(B)$ единичного круга. Поэтому ζ можно рассматривать как *локальный параметр*, действующий в окрестности $U(A)$.

Если две окрестности U, $V\subset\mathfrak{R}$ пересекаются, то возникает отображение друг на друга частей параметрических кругов, соответствующих этому пересечению:

$$\omega=\varphi_{UV}(\zeta)=T_V\circ T_U^{-1}(\zeta); \tag{5}$$

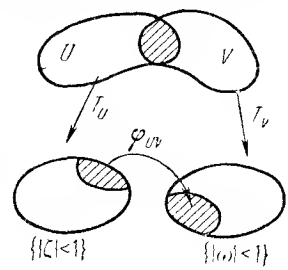


Рис. 60

оно называется *соотношением соседства* (рис. 60). Так как соотношение соседства является композицией дробно-линейных отображений, то оно также дробно-линейно, т. е. конформно.

Определение 4. Хаусдорфово пространство, которое можно покрыть системой окрестностей, гомеоморфных кругам, так, что все порождаемые этими гомеоморфизмами соотношения соседства оказываются конформными отображениями, называется *комплексно аналитическим многообразием* (комплексной размерности 1).

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Риманово многообразие* $\mathfrak{R}$ *является комплексно аналитическим многообразием комплексной размерности* 1.

Комплексно аналитические многообразия высших размерностей мы рассмотрим во второй части книги.

Риманово многообразие $\mathfrak{R}$, очевидно, несвязно. Однако любое подмножество $\mathfrak{R}_0$ его точек $\{a, f_a(z)\}$, где f_a являются ветвями одной аналитической функции, связно. В самом деле, если точки $A=\{a, f_a(z)\}$ и $B=\{b, f_b(z)\}$ принадлежат $\mathfrak{R}_0$, то элементы (U_a, f_a) и (U_b, f_b) получаются друг из друга продолжением вдоль некоторого пути γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$. Но тогда и точки $A_t=\{a_t, f_{a_t}(z)\}\in\mathfrak{R}$ для любого $t\in[\alpha, \beta]$. Тем самым определено непрерывное отображение $[\alpha, \beta]\to\mathfrak{R}$, т. е. путь $t\to A_t$, принадлежащий $\mathfrak{R}_0$ и связывающий точки A и B. Таким образом, $\mathfrak{R}_0$ даже линейно связно (см. п. 4). Кроме того, $\mathfrak{R}_0$ вместе с каждой точкой A содержит и некоторую окрестность $U(A)$, т. е. является открытым множеством. Поэтому $\mathfrak{R}_0$ является областью пространства $\mathfrak{R}$.

Мы доказали, что каждой аналитической функции соответствует некоторая область риманова многообразия $\mathfrak{R}$. Очевидно, что и, обратно, каждой области на $\mathfrak{R}$ соответствует некоторая аналитическая функция [1]). Таким образом, доказана

Теорема 2. *Между аналитическими функциями и областями риманова многообразия $\mathfrak{R}$ имеется взаимно однозначное соответствие.*

Определение 5. Область $\mathfrak{R}_0$ риманова многообразия $\mathfrak{R}$, которая характеризуется условием, что голоморфные функции f_a, принадлежащие ее точкам $A=\{a, f_a(z)\}$, являются ветвями некоторой аналитической функции, называется *римановой поверхностью* этой функции.

Мы пришли к общему понятию римановой поверхности. Смысл этого понятия состоит в том, что каждую аналитическую функцию мы можем рассматривать на ее римановой поверхности как функцию в обычном смысле слова (т. е. однозначную функцию). В самом деле, по построению риманова поверхность имеет столько точек A с данной проекцией a, сколько различных элементов (U_a, f_a) с данным центром a имеет аналитическая функция, т. е. сколько значений относит аналитическая функция этой точке a.

Таким образом, *аналитическая функция $\mathcal{F}$ является функцией точки на ее римановой поверхности*:

$$\mathcal{F}: \quad A=\{a, f_a(z)\}\to f_a(a) \tag{6}$$

(а не функцией точки a на плоскости).

На комплексно аналитическом многообразии, каким является риманова поверхность, можно ввести понятие голоморфной функции, и тогда окажется, что аналитическая функция голоморфна на своей римановой поверхности (см. § 9 ч. II).

Римановы поверхности в элементарном смысле, рассмотренные в предыдущем пункте, можно рассматривать как модели общих римановых поверхностей. Заметим, что в теории функций рассматривают и другие модели. Можно, например, отправляться не от многозначных, а от однозначных функций и строить римановы поверхности так, чтобы эти функции были на них взаимно однозначными, — тогда (многозначные) обратные функции будут (однозначно) отображать плоские области на построенные поверхности.

Построим, например, поверхность, на которой взаимно однозначна показательная функция $w=e^z$. Мы знаем, что она переводит в одну точку такие и только такие точки, разность между

[1]) При этом доказательстве мы пользуемся тем, что на $\mathfrak{R}$ всякая область является линейно связным множеством (докажите это).

которыми является целым кратным $2\pi i$ (п. 12). Поэтому для нашей цели естественно отождествить точки $a+2k\pi i$, где $k=0, \pm 1, \ldots$ — произвольное целое число.

Иными словами, пусть G — совокупность сдвигов плоскости $\mathbb{C}$ на векторы, целые кратные $2\pi i$:

$$S: \quad z \to z + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{7}$$

Очевидно, что G образует группу (относительно композиции, т. е. последовательного выполнения преобразований), которая является подгруппой группы Λ всех дробно-линейных преобразований (см. п. 8). Обозначим через $[a]_G$ класс эквивалентности

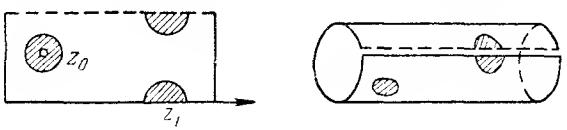


Рис. 61.

точки $a \in \mathbb{C}$ по группе G, т. е. совокупность всех точек $S(a)$, где $S \in G$ (иначе говоря, совокупность всех точек $a+2k\pi i$, $k=0, \pm 1, \ldots$). Совокупность таких классов эквивалентности мы обозначим через $\mathbb{C}/G$; элементы последнего множества можно рассматривать как отождествленные точки $a+2k\pi i$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

Введем теперь на множестве $\mathbb{C}/G$ топологию. Для этого под окрестностью точки $[a]_G$ мы условимся понимать совокупность точек $[z]_G$, где $z \in \mathbb{C}$ — произвольная точка из окрестности (в топологии $\mathbb{C}$) какого-либо представителя a класса эквивалентности $[a]_G$. Таким образом, $\mathbb{C}/G$ превращается в топологическое пространство.

Это пространство можно представить наглядно следующим образом. Будем выбирать представителей классов эквивалентности $[z]_G$ так, чтобы они лежали в полосе $\{0 \leqslant \operatorname{Im} z < 2\pi\}$. Достаточно малая окрестность точки z_0, для которой $0 < \operatorname{Im} z_0 < 2\pi$, изобразится тогда кругом с центром в z_0, а окрестность точки z_1, для которой $\operatorname{Im} z_1 = 0$, — совокупностью двух полукругов (рис. 61). Если мы склеим из нашей полосы цилиндр так, как это показано на рис. 61, то окрестности всех точек будут естественными окрестностями на цилиндре.

Таким образом, рассматриваемое пространство $\mathbb{C}/G$ с введенной в нем топологией является цилиндром в трехмерном пространстве. Этот цилиндр можно рассматривать как риманову поверхность показательной функции (логарифм взаимно однозначно отображает на нее плоскость $\mathbb{C}$ с выколотым началом координат).

Рассмотрим еще один пример. В п. 41 мы введем мероморфную функцию — эллиптический синус $w=\operatorname{sn} z$, — которая имеет два периода: действительный ω_1 и чисто мнимый $i\omega_2$; в прямоугольнике $\{0\leqslant \operatorname{Re} z<\omega_1,\ 0\leqslant \operatorname{Im} z<\omega_2\}$ она однолистна. Следовательно, для построения ее римановой поверхности достаточно отождествить точки $a+k_1\omega_1+k_2i\omega_2$, где k_1 и k_2 — целые числа. Иными словами, надо рассмотреть группу T движений $z\to z+k_1\omega_1+ik_2\omega_2$ и рассмотреть пространство $\mathbb{C}/T$, точками которого служат классы эквивалентности $[a]_T$ точек $a\in\mathbb{C}$ по группе T. Топология в этом пространстве вводится, как в предыдущем примере: под окрестностью точки $[a]_T$ понимается совокупность

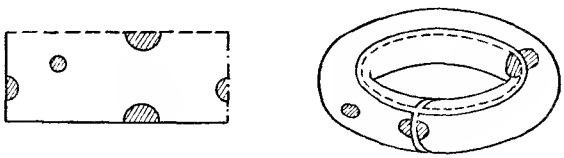


Рис. 62.

классов эквивалентности $[z]_T$, где $z\in\mathbb{C}$ — произвольная точка из окрестности (в топологии $\mathbb{C}$) какого-либо представителя класса $[a]_T$. Введение этой топологии превращает $\mathbb{C}/T$ в обычный тор (рис. 62), который и можно рассматривать как риманову поверхность эллиптического синуса.

В заключение этой главы мы хотим описать другую трактовку риманова многообразия $\mathfrak{R}$. Чтобы прийти к этой трактовке, заметим прежде всего, что в определении точек $\mathfrak{R}$ как пар $\{a, f_a(z)\}$, где f_a — функция, голоморфная в некоторой окрестности точки $a\in\overline{\mathbb{C}}$, выбор такой окрестности несуществен. Поэтому можно считать, что точками $\mathfrak{R}$ служат р о с т к и $\mathfrak{f}_a$ аналитических функций. Совокупность всех ростков в данной точке a образует кольцо, которое принято обозначать символом $\mathcal{O}_a$. Множество $\mathfrak{R}$, таким образом, можно рассматривать как поэлементное (дизъюнктное) объединение колец $\mathcal{O}_a$ по всем $a\in\overline{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{R}=\bigcup_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\mathcal{O}_a.$$

Далее, на множестве $\mathfrak{R}$ введена топология при помощи окрестностей, которые можно описать в терминах ростков следующим образом: окрестность $\mathcal{U}$ ростка $\mathfrak{f}_a$ состоит из всех ростков $\mathfrak{f}_b$, для которых b принадлежит некоторой окрестности U_a, и существует голоморфная в U_a функция f такая, что элемент

(U_a, f) является представителем обоих ростков $\mathfrak{f}_a$ и $\mathfrak{f}_b$. Как мы видели, эта топология превращает $\mathfrak{R}$ в хаусдорфово пространство. В этой топологии отображение

$$p: \mathfrak{R} \to \bar{\mathbb{C}},$$

которое каждому ростку $\mathfrak{f}_a$ ставит в соответствие точку a, является локальным гомеоморфизмом.

Пространство $\mathfrak{R}$ вместе с отображением p называют *пучком ростков аналитических функций*. Это понятие отражает локальный подход к понятию аналитической функции. Однако оно допускает и глобальный подход. В самом деле, рассмотрим произвольную область $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ и голоморфную в ней функцию f. Эта функция определяет отображение $f: D \to \mathfrak{R}$, которое каждой точке $z \in D$ ставит в соответствие росток $\mathfrak{f}_z$, порождаемый этой функцией в точке z. Отображение f, очевидно, непрерывно в топологии $\mathfrak{R}$, а композиция $p \circ f$ является тождественным в области D отображением.

Такое отображение f называется *сечением пучка* $\mathfrak{R}$ над областью D. Множество всех сечений $\mathfrak{R}$ над областью D образует кольцо, причем алгебраические операции в нем согласуются с операциями над ростками в любой точке $z \in D$.

Мы ограничиваемся здесь этим описанием. Общее определение понятия пучка будет приведено во второй части книги (см. п. 34).

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ непрерывна в замкнутом единичном круге, но непродолжаема аналитически за его пределы.

2. *Рассмотрим ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z - e^{i\alpha_n}}$, где $\{\alpha_n\}$ — *множество всех рациональных* точек отрезка $[0, 2\pi)$, а a_n — комплексные числа, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Докажите, что при $|z|<1$ и при $|z|>1$ он сходится соответственно к голоморфным функциям f_1 и f_2, которые не являются аналитическим продолжением друг друга.

3. Докажите: если f голоморфна в единичном круге U и в каждой точке окружности ∂U, то она голоморфно продолжается в некоторый круг $\{|z|<\rho\}$, где $\rho > 1$.

4. Постройте пример функции f, голоморфной в круге $U = \{|z|<1\}$, непрерывной в $\bar{U}$ и такой, что она голоморфно продолжается до функции, имеющей существенную особенность в какой-либо точке окружности $\{|z|=1\}$. (Ответ: $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.)

5. Пусть D — область с гладкой жордановой границей γ; укажите условия голоморфной продолжаемости в D функции f, заданной на γ. [Указание: ср. с задачей 3 к гл. II.]

6. Пусть D — произвольная область, $\gamma \subset D$ — спрямляемая кривая, а f — функция, непрерывная в D и голоморфная в $D \setminus \gamma$. Докажите, что f голоморфна в D.

7. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}$ положительной плоской меры постройте функцию $f \not\equiv \text{const}$, непрерывную в $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$. [Указание: ср. с задачей 4 к гл. II.]

8. Покажите, что $\sin z$ является (однозначной) функцией от $\zeta = z(\pi - z)$.

9. Докажите, что функция $z^\alpha (1-z)^\beta$, где α и β — действительные числа, допускает выделение голоморфных ветвей в $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$, если $\alpha + \beta$ — целое число.

10. Найдите вычеты ветвей функции $e^{\frac{1}{1+\sqrt{z}}}$ в точке $z=1$.

11. Является ли функция $g(z) = [\operatorname{Ln}(z-i)]^i f(z)$, где f — функция из задачи 1, аналитической в единичном круге?

12. Пусть функция f голоморфна в некоторой области D; обязана ли $\sqrt{f(z)}$ иметь точку ветвления в любом нуле f? (Ответ: нет.)

13. Пусть функция f голоморфна и отлична от нуля в односвязной области D. Докажите, что для любого целого $n>0$ найдется голоморфная в D функция g такая, что $g^n = f$ всюду в D; приведите пример, из которого видно, что утверждение неверно для многосвязных областей.

14. Опишите особые точки и риманову поверхность функции $w = \operatorname{Arctg} z$, обратной к $w = \operatorname{tg} z$. [Указание: найдите ее выражение через логарифм.]

15. Постройте конформное отображение тора

$$x = (R + r\cos\psi)\cos\varphi, \quad y = (R + r\cos\psi)\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi$$

на прямоугольник с отождествленными противоположными сторонами [1]). [Указание: дифференциал дуги на торе $ds = \sqrt{(R + r\cos\psi)^2 d\varphi^2 + r^2 d\psi^2}$; положив $\zeta = \varphi$, $\eta = \int_0^\psi \frac{r\,dt}{R + r\cos t}$, получим $ds = (R + r\cos\psi)\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$. Поэтому $(\varphi, \psi) \to (\xi, \eta)$ дает нужное отображение.]

---

[1]) В следующей главе мы увидим, что такой прямоугольник можно конформно отобразить на двулистную поверхность над плоскостью (см. задачу 18 к гл. IV), и тем самым убедимся в том, что тор конформно эквивалентен римановой поверхности в элементарном смысле.

ГЛАВА IV

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Эта глава вводит читателя в геометрическую теорию функций комплексного переменного. В ней будут рассмотрены основные вопросы теории конформных отображений, а также так называемые геометрические принципы, которые касаются лишь самых общих, топологических свойств голоморфных функций.

§ 10. Геометрические принципы

33. Принцип аргумента. Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности $\{0<|z-a|<r\}$ точки $a\in\mathbb{C}$. Мы назовем *логарифмическим вычетом* функции f в точке a вычет логарифмической производной

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d}{dz}\operatorname{Ln} f(z) \tag{1}$$

этой функции в точке a.

Кроме изолированных особых точек (однозначного характера) функция f может иметь отличный от нуля логарифмический вычет в своих нулях. Пусть $a\in\mathbb{C}$ — нуль порядка n функции f, голоморфной в точке a; тогда в некоторой окрестности U_a имеем $f(z)=(z-a)^n\varphi(z)$, где φ голоморфна в U_a и не равна там нулю. Поэтому в U_a

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n(z-a)^{n-1}\varphi(z)+(z-a)^n\varphi'(z)}{(z-a)^n\varphi(z)}=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{n\varphi(z)+(z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

где второй множитель голоморфен в U_a и, следовательно, разлагается в U_a в ряд Тейлора, причем свободный член этого разложения равен n (значению множителя при $z=a$). Таким образом, в U_a имеем

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-a}\{n+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots\}=$$
$$=\frac{n}{z-a}+c_1+c_2(z-a)+\ldots, \tag{2}$$

откуда видно, что в нуле порядка n логарифмическая производная голоморфной функции имеет полюс первого порядка с вычетом n; *логарифмический вычет в нуле равен порядку этого нуля.*

Если a — полюс функции f порядка p, то $\frac{1}{f}$ имеет в этой точке нуль порядка p, а так как

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{d}{dz}\operatorname{Ln}\frac{1}{f(z)},$$

то с учетом (2) получим, что в полюсе порядка p логарифмическая производная функции имеет полюс первого порядка с вычетом $-p$: *логарифмический вычет в полюсе равен порядку этого полюса с обратным знаком.*

Сделанные замечания позволяют дать метод подсчета числа нулей и полюсов мероморфных функций. При подсчете мы примем следующее соглашение, которого будем всегда придерживаться и в дальнейшем: *каждый нуль и полюс считается столько раз, каков его порядок.* Справедлива

Теорема 1. *Пусть функция f мероморфна*[1]) *в области $D \subset \mathbb{C}$ и $G \Subset D$ — область, граница которой ∂G является непрерывной кривой; пусть еще ∂G не содержит ни нулей, ни полюсов f. В этих условиях пусть N и P соответственно обозначают общее число нулей и полюсов f в области G, тогда*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz, \tag{3}$$

где ∂G — ориентированная граница.

◀ Так как $G \Subset D$, то f имеет в G лишь конечное число нулей $a_1, \ldots, a_l$ и конечное число полюсов $b_1, \ldots, b_m$, а так как ∂G не содержит ни нулей, ни полюсов, то $g = \frac{f'}{f}$ голоморфна в окрестности ∂G. Применяя к этой функции теорему Коши о вычетах, найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f'}{f}\,dz = \sum_{\nu=1}^{l}\operatorname*{res}_{a_\nu} g + \sum_{\nu=1}^{m}\operatorname*{res}_{b_\nu} g. \tag{4}$$

Но по сделанному выше замечанию

$$\operatorname*{res}_{a_\nu} g = n_\nu, \qquad \operatorname*{res}_{b_\nu} g = -p_\nu, \tag{5}$$

где n_ν и p_ν — соответственно порядок нуля a_ν и полюса b_ν; подставляя (5) в (4) и учитывая принятое соглашение подсчета нулей и полюсов (по которому $N = \sum n_\nu$ и $P = \sum p_\nu$), получим (3) ▶

[1]) Напомним, что функция f называется мероморфной в области D, если она голоморфна всюду в D, за исключением, быть может, некоторого множества полюсов.

Доказанной теореме можно придать геометрическую формулировку. Представим ∂G путем $z=z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, и обозначим через $\Phi(t)$ первообразную функции $\frac{f'}{f}$ вдоль этого пути; по формуле Ньютона — Лейбница будем иметь

$$\int_{\partial G} \frac{f'}{f}\, dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{6}$$

Но, очевидно, $\Phi(t) = \ln f[z(t)]$, где ln обозначает любую ветвь логарифма, непрерывно меняющуюся вдоль пути ∂G. Так как $\operatorname{Ln} f = \ln|f| + i \operatorname{Arg} f$ и функция $\ln|f(z)|$ однозначна, то для выделения этой ветви достаточно выделить ветвь $\arg f$, непрерывно меняющуюся вдоль ∂G. Приращение $\ln|f|$ вдоль замкнутого пути ∂G равно нулю, поэтому

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = i\{\arg f[z(\beta)] - \arg f[z(\alpha)]\}.$$

Обозначая множитель при i в правой части — приращение выделенной ветви аргумента — через $\Delta_{\partial G} \arg f$, мы перепишем (6) в виде

$$\int_{\partial G} \frac{f'}{f}\, dz = i\Delta_{\partial G} \arg f.$$

Таким образом, теореме 1 можно придать следующий вид:

Теорема 2 (принцип аргумента). *В условиях теоремы* 1 *разность между числом нулей* N *и числом полюсов* P *функции* f *в области* G *равна деленному на* 2π *приращению аргумента этой функции при обходе ориентированной границы области*:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z). \tag{7}$$

Очевидно, правая часть (7) геометрически представляет собой полное число оборотов вокруг точки $w=0$, которые сделает вектор $w=f(z)$, когда z обходит путь ∂G. Обозначим через ∂G^* образ пути ∂G при отображении f, т. е. путь $w=f[z(t)]$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; тогда это число будет равно числу оборотов вектора w при обходе пути ∂G^* (рис. 63). Последнее называют *индексом* пути ∂G^* относительно точки $w=0$ и обозначают символом $\operatorname{ind}_0 \partial G^*$. Теперь принцип аргумента можно прочитать так:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G^*} \arg w = \operatorname{ind}_0 \partial G^*. \tag{8}$$

Замечание 1. Вместо нулей функции f можно рассматривать ее a-точки, т. е. корни уравнения $f(z)=a$; для этого

достаточно заменить в наших рассуждениях f функцией $f(z)-a$. Если ∂G не содержит a-точек (и по-прежнему полюсов) функции f, то

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\arg\{f(z)-a\}, \qquad (9)$$

где N_a — общее число a-точек f в области G. Переходя к плоскости

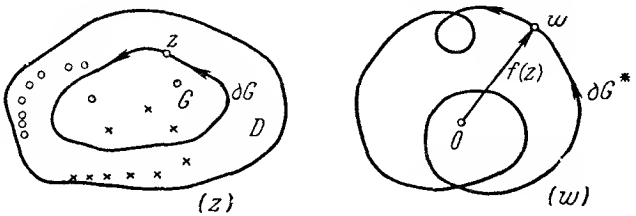


Рис. 63.

$w=f(z)$ и вводя понятие индекса пути ∂G^* относительно точки a, можно переписать (9) в виде

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G^*}\arg(w-a) = \operatorname{ind}_a \partial G^*. \qquad (10)$$

Замечание 2. Правая часть формулы (7) — приращение аргумента функции вдоль пути — имеет смысл для произвольных непрерывных функций f, не равных нулю вдоль этого пути (хотя ее первоначальное определение с интегралом и связано с производной f', т. е. требует голоморфности функции). Эта величина, равная индексу образа пути ∂G^*, имеет топологический характер: она инвариантна относительно топологических преобразований плоскостей z и w. Оказывается, можно ввести и инвариантные относительно топологических преобразований определения порядков нулей и полюсов (не связанные с производными или разложениями в ряды). Тогда и принцип аргумента примет топологический характер: он будет справедлив для всех функций, топологически эквивалентных мероморфным (т. е. получающихся из последних топологическими преобразованиями переменных). Читатели, интересующиеся этими вопросами, могут найти их подробное изложение в книге С. Стоилова «Лекции по топологической теории аналитических функций», М., 1964.

Приведем пример применения принципа аргумента:

Теорема 3 (Руше). *Пусть функции f и g голоморфны в замкнутой области $\overline{G}$ с непрерывной границей ∂G, и пусть*

$$|f(z)|>|g(z)| \text{ для всех } z\in\partial G. \qquad (11)$$

Тогда функции f и $f+g$ имеют в G одинаковое число нулей.

◀ Из (11) видно, что f и $f+g$ не равны нулю на ∂G [1]), поэтому к ним применим принцип аргумента. Так как $f\neq 0$ на ∂G,

[1]) В самом деле, $|f|>|g|\geqslant 0$ и $|f+g|\geqslant|f|-|g|>0$ на ∂G.

то $f+g=f\left(1+\frac{g}{f}\right)$, следовательно, мы имеем при надлежащем выборе значений аргументов

$$\Delta_{\partial G}\arg(f+g)=\Delta_{\partial G}\arg f+\Delta_{\partial G}\arg\left(1+\frac{g}{f}\right). \qquad (12)$$

Но так как $\left|\frac{g}{f}\right|<1$ на ∂G, то при любом изменении $z\in\partial G$ точка $\omega=\frac{g}{f}$ не выходит из круга $\{|\omega|<1\}$. Поэтому вектор $w=1+\omega$ не может повернуться вокруг точки $w=0$, и второе слагаемое в (12) равно нулю. Таким образом,

$$\Delta_{\partial G}\arg(f+g)=\Delta_{\partial G}\arg f,$$

откуда по принципу аргумента получаем заключение теоремы ▶

Теорема Руше полезна при подсчете числа нулей голоморфных функций. В частности, из нее совсем просто получается основное свойство многочленов:

Теорема 4. *Любой многочлен P_n степени n имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней.*

◀ Так как P_n имеет полюс в бесконечности, то все его корни лежат в некотором круге $\{|z|<R\}$. Пусть $P_n=f+g$, где $f=a_0z^n$ $(a_0\neq0)$ и $g=a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$; увеличивая в случае надобности R, можно считать, что на окружности $\{|z|=R\}$ имеем $|f|>|g|$, ибо $|f|=|a_0|R^n$, а g — многочлен степени не выше $n-1$. По теореме Руше P_n имеет в круге $\{|z|<R\}$ столько же нулей, сколько $f=a_0z^n$, т. е. ровно n ▶

34. Принцип сохранения области. Так называется следующая важная

Теорема 1. *Если f голоморфна в области D и не равна тождественно постоянной, то и образ $D^*=f(D)$ также является областью.*

◀Нужно доказать, что множество D^* связно и открыто. Пусть w_1 и w_2 — две произвольные точки D^*; обозначим через z_1 один из прообразов w_1 в D и соответственно через z_2 один из прообразов w_2. Так как множество D (линейно)связно, то существует путь γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, связывающий в D точки z_1 и z_2. В силу непрерывности функции f образ γ^*: $w=f[z(t)]$, $t\in[\alpha,\beta]$, будет путем, связывающим точки w_1 и w_2; он, очевидно, состоит из точек D^*. Таким образом, множество D^* связно.

Пусть w_0 — произвольная точка D^* и z_0 — один из ее прообразов в D. Так как D открыто, то существует круг $\{|z-z_0|<r\}\Subset D$. Уменьшая в случае надобности r, можно считать, что $\{|z-z_0|\leqslant r\}$ не содержит других w_0-точек, кроме z_0 (так как $f\neq\text{const}$, то по теореме единственности п. 21 ее w_0-точки

изолированы в D). Обозначим через $\gamma=\{|z-z_0|=r\}$ границу этого круга; пусть еще

$$\mu=\min_{z\in\gamma}|f(z)-w_0|. \tag{1}$$

Очевидно, $\mu>0$, ибо непрерывная функция $f(z)-w_0$ достигает на γ своего минимального по модулю значения, и если бы было $\mu=0$, то на γ существовала бы w_0-точка функции f, вопреки нашему построению круга.

Теперь мы докажем, что $\{|w-w_0|<\mu\}\subset D^*$. В самом деле, пусть w_1 — произвольная точка этого круга, т. е. $|w_1-w_0|<\mu$. Имеем

$$f(z)-w_1=f(z)-w_0+(w_0-w_1), \tag{2}$$

причем на γ в силу (1) $|f(z)-w_0|\geqslant\mu$. Так как у нас $|w_0-w_1|<\mu$, то по теореме Руше функция $f(z)-w_1$ имеет внутри γ столько же нулей, сколько их имеет там функция $f(z)-w_0$, т. е. по крайней мере один нуль (точка z_0 может быть кратным нулем функции $f(z)-w_0$). Итак, функция f внутри γ принимает значение w_1, т. е. $w_1\in D^*$. Но w_1 — произвольная точка круга $\{|w-w_0|<\mu\}$, следовательно, весь этот круг принадлежит D^*. Открытость D^* доказана ▶

Замечание. Как мы видели, доказательство связности множества D^* требует лишь непрерывности функции f, при доказательстве открытости использованы теорема единственности и теорема Руше, которые установлены выше для голоморфных функций. Для произвольных непрерывных функций утверждение об открытости образа неверно, в чем убеждает следующий пример. Пусть $f=x^2+iy$ и $D=\{|z|<1\}$; тогда $D^*=f(D)$ не является открытым множеством, ибо точки вертикального диаметра D (внутренние точки этого круга) переходят в граничные точки D^*.

Можно, однако, доказать, что принцип сохранения области (так же как теорема единственности и теорема Руше, на которые он опирается) имеет топологический характер, т. е. справедлив для всех функций, топологически эквивалентных голоморфным.

Аналогичное, но несколько более внимательное рассмотрение приводит к решению задачи о *локальном обращении* голоморфных функций. Задача эта ставится так.

Дана голоморфная в точке z_0 функция $w=f(z)$; требуется найти аналитическую в точке $w_0=f(z_0)$ функцию $z=g(w)$ такую, что $g(w_0)=z_0$ и $f\circ g(w)\equiv w$ в некоторой окрестности w_0.

При решении этой задачи следует различать два случая:

I. $f'(z_0)\neq0$. Как при доказательстве принципа сохранения области, выберем круг $\{|z-z_0|\leqslant r\}$, не содержащий других w_0-точек, кроме центра, и определим $\mu>0$ по формуле (1). Пусть w_1 — любая точка круга $\{|w-w_1|<\mu\}$; то же рассуждение (с применением формулы (2) и теоремы Руше) показывает, что функция f принимает в круге $\{|z-z_0|<r\}$ значение w_1 столько

же раз, сколько w_0. Но значение w_0 принимается в этом круге лишь в точке z_0 и притом, в силу условия $f'(z_0)\neq 0$, однократно.

Таким образом, функция f принимает в круге $\{|z-z_0|<r\}$ любое значение из круга $\{|w-w_0|<\mu\}$ и притом только один раз. Иными словами, *функция f локально однолистна в точке z_0.*

В круге $\{|w-w_0|<\mu\}$ тем самым определена функция $z=g(w)$, для которой $g(w_0)=z_0$ и $f\circ g(w)\equiv w$. Из однолистности f следует, что $\Delta w\neq 0$ при $\Delta z\neq 0$, откуда, очевидно, вытекает существование в любой точке круга $\{|w-w_0|<\mu\}$ производной

$$g'(w)=\frac{1}{f'(z)}, \tag{3}$$

т. е. голоморфность g в этом круге [1]).

II. $f'(z_0)=\ldots=f^{(p-1)}(z_0)=0$, $f^{(p)}(z_0)\neq 0$ $(p\geqslant 2)$. Еще раз повторим те же рассуждения, выбрав теперь круг $\{|z-z_0|\leqslant r\}$ так, чтобы в нем, кроме центра, не было ни w_0-точек f, ни нулей производной f' (мы снова пользуемся теоремой единственности). Как и раньше, выберем $\mu>0$, возьмем любую точку w_1 из круга $\{|w-w_0|<\mu\}$ и убедимся в том, что f принимает в круге $\{|z-z_0|<r\}$ значение w_1 столько же раз, сколько w_0. Из условий рассматриваемого случая следует, что значение w_0 принимается p-кратно в точке z_0; так как у нас еще $f'(z)\neq 0$ при $0<|z-z_0|<r$, то любое значение w_1, $0<|w_1-w_0|<\mu$, принимается функцией f в круге $\{|z-z_0|<r\}$ в p различных точках. Таким образом, *функция f является p-листной в круге* $\{|z-z_0|<r\}$.

Выясним аналитический характер решения задачи о локальном обращении в этом случае. В некоторой окрестности точки z_0 имеем

$$w=f(z)=w_0+(z-z_0)^p\varphi(z), \tag{4}$$

где φ голоморфна и отлична от нуля. Отсюда следует, что

$$\sqrt[p]{\varphi(z)}\,(z-z_0)=(w-w_0)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

где $\sqrt[p]{\varphi}$ обозначает какую-либо голоморфную в рассматриваемой окрестности ветвь корня. Эта ветвь разлагается в ряд Тейлора с центром z_0 со свободным членом, отличным от нуля, следовательно, для функции $\psi(z)=\sqrt[p]{\varphi(z)}\,(z-z_0)$ имеем $\psi'(z_0)\neq 0$. Полагая еще $(w-w_0)^{1/p}=\omega$, перепишем (5) в виде $\psi(z)=\omega$ и,

[1]) Как видно из (3), для существования производной g' нужно еще, чтобы было $f'\neq 0$. В силу непрерывности f' и того, что $f'(z_0)\neq 0$, можно считать это условие выполненным в круге $\{|z-z_0|<r\}$, уменьшая r в случае надобности.

пользуясь рассмотренным выше случаем I, найдем отсюда z как голоморфную функцию от ω: $z=\sum_0^\infty d_n\omega^n$. Заменяя в последнем разложении $\omega=(w-w_0)^{1/p}$, получим разложение функции, обращающей f, в обобщенный степенной ряд:

$$z=g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n(w-w_0)^{\frac{n}{p}}. \tag{6}$$

Из него видно, что g является аналитической функцией в круге $\{|w-w_0|<\mu\}$ и что w_0 является для нее точкой ветвления порядка p (см. п. 30).

Из приведенного анализа, в частности, вытекает

Теорема 2. *Условие $f'(z_0)\neq 0$ является необходимым и достаточным условием локальной однолистности голоморфной функции f в точке z_0.*

Замечание 1. Достаточность этого условия можно получить также из общей теоремы действительного анализа о существовании неявных функций (якобиан $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=|f'(z)|^2$ отображения $(x, y)\to(u, v)$ отличен от нуля в рассматриваемой точке). Однако для произвольных дифференцируемых в смысле действительного анализа отображений условие $\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{z_0}\neq 0$ не является необходимым для однолистности. Это видно из примера отображения $f=x^3+iy$, якобиан которого равен нулю в точке $z=0$ и которое тем не менее однолистно.

Замечание 2. Условие локальной однолистности $f'(z)\neq 0$ для всех $z\in D$ не является достаточным для глобальной однолистности функции во всей области D. Это видно, скажем, из примера функции $f(z)=e^z$, которая локально однолистна в каждой точке $\mathbb{C}$, но неоднолистна в любой области, содержащей хотя бы одну пару точек z_1 и z_2 таких, что $z_1-z_2=2k\pi i$, где $k\neq 0$ — целое число.

Мы изложили выше качественное решение задачи о локальном обращении. В заключение заметим, что методы теории аналитических функций позволяют дать и эффективное количественное решение этой задачи. Рассмотрим для простоты случай $f'(z_0)\neq 0$.

Построим, как и выше, круги $\{|z-z_0|\leqslant r\}$ и $\{|w-w_0|<\mu\}$ и при любом фиксированном w из второго круга рассмотрим функцию

$$h(\zeta)=\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}.$$

Она голоморфна в первом круге всюду, за исключением точки $z=g(w)$, где g — обращение функции f, причем вычет h в этой точке (полюсе первого порядка) равен z. Следовательно, по теореме Коши о вычетах

$$z=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,d\zeta, \tag{7}$$

где $\gamma=\{|\zeta-z_0|=r\}$.

Интеграл в правой части зависит от w, и мы получили интегральное представление обращающей функции $g(w)$. Из него, действуя так же, как при получении тейлоровского разложения из интеграла Коши, можно получить и разложение g в степенной ряд. Имеем

$$\frac{1}{f(\zeta)-w}=\frac{1}{f(\zeta)-w_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-w_0)^n}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}},$$

причем это разложение сходится равномерно по ζ на окружности γ (у нас $|f(\zeta)-w_0|\geqslant\mu$ на γ, а $|w-w_0|<\mu$). Умножая это разложение на $\frac{\zeta f'(\zeta)}{2\pi i}$ и интегрируя почленно вдоль γ, найдем

$$z=g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(w-w_0)^n, \tag{8}$$

где

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\zeta f'(\zeta)\,d\zeta}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}}\qquad(n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Имеем, очевидно, $d_0=z_0$, а при $n\geqslant 1$ можно преобразовать полученное выражение интегрированием по частям:

$$d_n=\frac{1}{2\pi i n}\int_{\gamma}\frac{d\zeta}{[f(\zeta)-w_0]^n}.$$

Подинтегральная функция имеет внутри γ полюс n-го порядка в точке z_0; находя ее вычет по известной формуле (п. 25), находим окончательное выражение коэффициентов:

$$d_0=z_0,\quad d_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z-z_0}{f(z)-w_0}\right)^n,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{9}$$

Ряд (8) с коэффициентами (9) называется *рядом Бурмана — Лагранжа*. Его можно использовать для эффективного обращения голоморфных функций.

Пример. Пусть $f(z)=ze^{-az}$; найдем обращение этой функции в точке $w_0=0$, соответствующей $z_0=0$. По формулам (9) получаем при $n\geqslant 1$

$$d_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z}{f(z)}\right)^n=\frac{(an)^{n-1}}{n!},$$

и ряд Бурмана — Лагранжа имеет вид

$$z=g(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(an)^{n-1}}{n!}w^n. \tag{10}$$

Можно указать также обобщение ряда Бурмана — Лагранжа на случай $f'(z_0)=\ldots=f^{(p-1)}(z_0)=0$, $f^{(p)}(z_0)\neq 0$, $p\geqslant 2$, но мы на этом не останавливаемся.

35. Принцип максимума модуля и лемма Шварца. Принцип максимума модуля выражается следующей теоремой:

Теорема 1. *Если функция f голоморфна в области D и ее модуль $|f|$ достигает (локального) максимума в некоторой точке $z_0\in D$, то f постоянна.*

◀ Воспользуемся принципом сохранения области. Если $f\neq\text{const}$, то она преобразует z_0 в точку w_0 области D^*. Существует круг $\{|w-w_0|<\mu\}\subset D^*$, а в нем найдется точка w_1 такая, что $|w_1|>|w_0|$. Значение w_1 принимается функцией f в некоторой окрестности точки z_0, а это противоречит тому, что $|f|$ достигает максимума в этой точке ▶

Учитывая свойства функций, непрерывных на замкнутых множествах, принцип максимума модуля можно сформулировать еще и так:

Теорема 2. *Если функция f голоморфна в области D и непрерывна в $\bar{D}$, то $|f|$ достигает максимума на границе ∂D.*

◀ Если $f=\text{const}$ (в D, а значит, в силу непрерывности и в $\bar{D}$), то утверждение тривиально. Если $f\neq\text{const}$, то $|f|$ не может достигать максимума в точках D, а так как этот максимум должен достигаться в $\bar{D}$, то он достигается на ∂D ▶

Аналогичное утверждение для минимума модуля, вообще говоря, несправедливо. Это видно из примера функции $f(z)=z$ в круге $\{|z|<1\}$ (минимум $|f|$ достигается в точке $z=0$). Однако справедлива такая

Теорема 3. *Если функция f голоморфна в области D и не обращается в нуль в этой области, что $|f|$ может достигать (локального) минимума внутри D лишь в случае $f=\text{const}$.*

Для доказательства достаточно применить теорему 1 к функции $g=\frac{1}{f}$, которая голоморфна в D, ибо $f\neq 0$.

Полученные результаты показывают, что поверхность модуля голоморфной функции, т. е. поверхность в пространстве (x, y, ρ) с уравнением $\rho=|f(z)|$ (см. п. 5), имеет некоторые структурные

особенности. Именно, она не может иметь локальных максимумов и локальных минимумов, если последние не находятся на уровне $\rho=0$ (точки a и b на рис. 64). Касательная плоскость к этой поверхности горизонтальна в тех и только тех точках, где обращаются в нуль обе производные $\frac{\partial|f|}{\partial x}$ и $\frac{\partial|f|}{\partial y}$ или — что то же самое — обе производные $\frac{\partial|f|}{\partial z}$ и $\frac{\partial|f|}{\partial\bar z}$ (стационарные точки). Простой подсчет показывает, что [1])

$$\frac{\partial|f|}{\partial z}=\frac{\bar f}{2|f|}f'(z),\qquad \frac{\partial|f|}{\partial\bar z}=\frac{f}{2|f|}\overline{f'(z)},\tag{1}$$

откуда видно, что стационарными точками функции f могут быть либо ее нули (минимумы $|f|$ на уровне $\rho=0$, такие, как точка c на рис. 64), либо нули ее производной f' (точки перевала поверхности модуля, такие, как точка d на рис. 64).

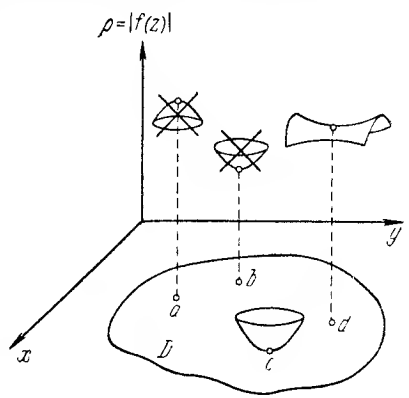


Рис. 64.

Принцип максимума модуля имеет важные применения в теории функций. Например, при помощи этого принципа легко объяснить, почему теорема Рунге (п. 22) несправедлива для многосвязных областей. В самом деле, в неодносвязной области D существует замкнутая жорданова кривая γ, внутри которой есть хотя бы одна точка $z_0\notin D$. Если некоторая функция приближается полиномами равномерно на любом компакте $K\Subset D$, то существует последовательность полиномов P_n, равномерно сходящаяся к f на γ. По критерию Коши для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что для всех m, $n\geqslant N$ в любой точке $z\in\gamma$

$$|P_m(z)-P_n(z)|<\varepsilon.$$

По принципу максимума модуля эти неравенства справедливы и во всех точках области G, ограниченной кривой γ, а отсюда по тому же критерию последовательностью P_n сходится равно-

[1]) Формулы (1) получаются формальным дифференцированием по z и $\bar z$ функции $|f|=\sqrt{f\bar f}$; законность этого следует из очевидных формул

$$\frac{\partial|f|}{\partial x}=\frac{uu_x+vv_x}{|f|},\qquad \frac{\partial|f|}{\partial y}=\frac{uu_y+vv_y}{|f|}.$$

мерно в G. По теореме Вейерштрасса (п. 22), $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ является функцией, голоморфной в G. Но в точках $G\cap D$ этот предел совпадает с f, следовательно, f голоморфно продолжается в G и, в частности, в точку z_0. Так как не любая функция из $H(D)$ обладает этим свойством (например, $\frac{1}{z-z_0}$ им не обладает), то и не все функции из $H(D)$ можно равномерно приблизить полиномами, вопреки тому, что утверждает теорема Рунге.

Простым следствием принципа максимума модуля является также

Лемма Шварца. *Пусть функция f голоморфна в круге $U=\{|z|<1\}$, по модулю не превосходит там 1 (т. е. $|f(z)|\leqslant 1$ для всех $z\in U$) и $f(0)=0$. Тогда для всех $z\in U$*

$$|f(z)|\leqslant |z|, \qquad (2)$$

причем если равенство достигается хотя в одной точке $z\neq 0$, то оно справедливо всюду в U, и в этом случае $f(z)\equiv e^{i\alpha}z$, где α — действительная постоянная.

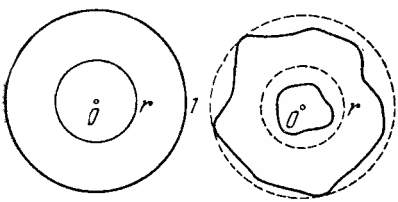


Рис. 65.

◀ Рассмотрим функцию $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}$; в силу условия $f(0)=0$ она голоморфна в U. Рассмотрим произвольный круг $U_r=\{|z|<r\}$, $r<1$; по теореме 2 функция $|\varphi|$ достигает максимума на его границе $\gamma_r=\{|z|=r\}$. Но на γ_r имеем $|\varphi|\leqslant\frac{1}{r}$, ибо по условию $|f|\leqslant 1$, поэтому всюду в U_r

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{1}{r}. \qquad (3)$$

Фиксируем z и устремим r к 1; в пределе из неравенства (3) получим, что $|\varphi(z)|\leqslant 1$, т. е. что $|f(z)|\leqslant|z|$ для всех $z\in U_r$. Так как любую точку $z\in U$ можно погрузить в некоторый круг U_r, $r<1$, то неравенство (2) доказано.

Если в какой-либо точке $z_0\in U$ в (2) имеет место знак равенства, то $|\varphi|$ достигает в ней максимального значения, равного 1. Тогда φ является постоянной, модуль которой, очевидно, равен 1, т. е. $\varphi(z)\equiv e^{i\alpha}$ и $f(z)\equiv e^{i\alpha}z$. ▶

Из леммы Шварца следует, что при конформном отображении f круга $\{|z|<1\}$ в круг $\{|w|<1\}$, переводящем центр в центр, образ любой окружности $\{|z|=r\}$ лежит внутри круга $\{|w|<r\}$ (рис. 65). При этом образ $\{|z|=r\}$ может иметь общие точки с $\{|w|=r\}$ лишь в том случае, когда f сводится к вращению вокруг точки $z=0$.

§ 11. Теорема Римана

Любая голоморфная и однолистная в области D функция f осуществляет конформное отображение этой области, ибо по доказанному в п. 34 из однолистности следует, что $f'\neq 0$ ни в одной точке D. Отображения, осуществляемые данными функциями, мы неоднократно рассматривали выше. Здесь мы рассмотрим более трудную и более важную для практических целей обратную задачу:

Даны две области D_1 и D_2 и требуется найти (однолистное) конформное отображение f: $D_1 \to D_2$ одной из них на другую.

36. Конформные изоморфизмы и автоморфизмы. Определение. Конформное отображение f области D_1 на D_2 будем называть еще (*конформным*) *изоморфизмом*, а области, допускающие такое отображение, — *изоморфными*. Изоморфизм области на себя называется (*конформным*) *автоморфизмом*.

Конформные изоморфизмы называют также голоморфными изоморфизмами или, короче, *голоморфизмами*.

Легко видеть, что совокупность автоморфизмов φ: $D \to D$ произвольной области D образует группу, которая называется *группой автоморфизмов* этой области и обозначается символом $\Lambda(D)$. В качестве групповой операции принимается композиция $\varphi_2 \circ \varphi_1$ (т. е. автоморфизм $\varphi_2\,[\varphi_1(z)]$), единицей служит тождественное отображение e: $z \to z$, а обратным к φ элементом — обратное к $w=\varphi(z)$ отображение $z=\varphi^{-1}(w)$.

Богатство группы автоморфизмов области позволяет судить о богатстве конформных отображений на нее другой области. Это показывает

Теорема 1. *Если f_0: $D_1 \to D_2$ — какой-либо фиксированный изоморфизм, то совокупность всех изоморфизмов D_1 на D_2 дается формулой*

$$f=\varphi \circ f_0, \tag{1}$$

где $\varphi \in \Lambda(D_2)$ — произвольный автоморфизм области D_2.

◀ Каков бы ни был автоморфизм $\varphi \in \Lambda(D_2)$, композиция $\varphi \circ f_0$ будет, очевидно, конформным отображением D_1 на D_2. С другой стороны, пусть f: $D_1 \to D_2$ — произвольный изоморфизм; тогда $\varphi=f \circ f_0^{-1}$ будет конформным отображением D_2 на себя, т. е. автоморфизм D_2, а из этой формулы следует (1) ▶.

Замечание. Любое конформное отображение f области D на D^* устанавливает изоморфизм F: $\Lambda(D) \to \Lambda(D^*)$ групп автоморфизмов этих областей. Этот изоморфизм устанавливается по формуле

$$F\colon\ \varphi \to f \circ \varphi \circ f^{-1}. \tag{2}$$

В самом деле, для любого $\varphi\in\Lambda(D)$ отображение $\varphi^*=f\circ\varphi\circ f^{-1}$, очевидно, является автоморфизмом D^*, т. е. принадлежит $\Lambda(D^*)$. С другой стороны, для любого $\varphi^*\in\Lambda(D^*)$ отображение $f^{-1}\circ\varphi^*\circ f=\varphi\in\Lambda(D)$, т. е. F взаимно однозначно преобразует $\Lambda(D)$ на $\Lambda(D^*)$. Кроме того,

$$\varphi_1^*\circ\varphi_2^*=\left(f\circ\varphi_1\circ f^{-1}\right)\circ\left(f\circ\varphi_2\circ f^{-1}\right)=f\circ(\varphi_1\circ\varphi_2)\circ f^{-1},$$

т. е. F: $\varphi_1\circ\varphi_2\to\varphi_1^*\circ\varphi_2^*$ сохраняет групповую операцию и, таким образом, является изоморфизмом рассматриваемых групп. Это замечание оправдывает принятое выше определение.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением односвязных областей D. Выделим три из них, которые будем называть *каноническими*: это замкнутая плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, открытая плоскость $\mathbb{C}$ и единичный круг $U=\{|z|<1\}$. В п. 10 мы вычислили группы дробно-линейных автоморфизмов этих областей. Однако справедлива

Теорема 2. *Всякий конформный автоморфизм канонической области является ее дробно-линейным автоморфизмом.*

◀ Пусть φ— произвольный автоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$; существует единственная точка $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$, соответствующая бесконечной точке, поэтому функция $\varphi(z)$ голоморфна всюду в $\overline{\mathbb{C}}$, кроме точки z_0, где она имеет полюс. В окрестности полюса порядка $n\geqslant 2$ функция неоднолистна, следовательно, φ имеет в z_0 полюс первого порядка. По теореме 2 п. 24 и теореме Лиувилля заключаем, что φ имеет вид $\varphi(z)=\dfrac{A}{z-z_0}+B$ при $z_0\neq\infty$ или $\varphi(z)=Az+B$ при $z_0=\infty$ (A и B — постоянные) и, таким образом, φ является дробно-линейной функцией. Случай открытой плоскости $\mathbb{C}$ рассматривается аналогично.

Пусть φ — произвольный автоморфизм единичного круга U; обозначим $\varphi(0)=w_0$ и построим дробно-линейный автоморфизм

$$\lambda:\quad w\to\frac{w-w_0}{1-\bar{w}_0 w}$$

круга U, переводящий точку w_0 в 0. Композиция $f=\lambda\circ\varphi$ также является автоморфизмом U, причем $f(0)=0$. Так как, кроме того, $|f(z)|<1$ для всех $z\in U$, то к функции f применима лемма Шварца из предыдущего пункта, по которой

$$|f(z)|\leqslant|z|\quad\text{для всех}\quad z\in U.$$

Но и обратное отображение $z=f^{-1}(w)$ удовлетворяет условиям той же леммы, следовательно, $|f^{-1}(w)|\leqslant|w|$ для всех $w\in U$, откуда, полагая $w=f(z)$, находим, что

$$|z|\leqslant|f(z)|\quad\text{для всех}\quad z\in U.$$

Таким образом, имеем $|f(z)| \equiv |z|$ для всех $z \in U$ и по лемме Шварца заключаем, что $f(z) = e^{i\alpha} z$. Но тогда $\varphi = \lambda^{-1} \circ f = \lambda^{-1}(e^{i\alpha} z)$ является дробно-линейным отображением ▶

Учитывая результаты п. 10, мы получаем полное описание всех (конформных) автоморфизмов канонических областей.

(I) Замкнутая плоскость $\overline{\mathbb{C}}$:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0. \tag{3}$$

(II) Открытая плоскость $\mathbb{C}$:

$$w = az + b, \qquad a \neq 0. \tag{4}$$

(III) Единичный круг U:

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1, \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Остановимся подробнее на автоморфизмах круга. Как видно из формулы (5), они зависят от трех действительных параметров: двух координат точки a и числа α. Покажем, что, подбирая эти параметры, можно найти один и только один автоморфизм $\lambda \in \Lambda(U)$, удовлетворяющий условиям нормировки

$$\lambda(a) = b, \quad \arg \lambda'(a) = \alpha, \tag{6}$$

где $a, b \in U$ — произвольные заданные точки и $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число.

В самом деле, построим автоморфизмы μ: $z \to e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ и ν: $z \to \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$; тогда автоморфизм $\lambda = \nu^{-1} \circ \mu$, определяемый из уравнения $\nu(w) = \mu(z)$, т. е.

$$\frac{w - b}{1 - \bar{b}w} = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \tag{7}$$

будет удовлетворять условиям (6). Пусть $\lambda_1 \in \Lambda(U)$ — еще какой-либо автоморфизм, удовлетворяющий тем же условиям. Тогда автоморфизм $f = \nu \circ \lambda_1 \circ \mu^{-1}$ будет, очевидно, удовлетворять условиям $f(0) = 0$, $\arg f'(0) = 0$, откуда по лемме Шварца (как и при доказательстве теоремы 2) заключаем, что $f(w) \equiv w$, т. е. что $f = e$ — тождественное отображение. Таким образом, $\nu \circ \lambda_1 \circ \mu^{-1} = e$, откуда $\lambda_1 = \nu^{-1} \circ \mu \equiv \lambda$.

По сделанному выше замечанию группа автоморфизмов $\Lambda(D)$ любой области D, изоморфной единичному кругу U, изоморфна группе $\Lambda(U)$, т. е. тоже зависит от трех действительных параметров. Учитывая теорему 1, можно ожидать, что и изоморфизмы двух областей, изоморфных U, также образуют трехпараметрическое семейство. И в самом деле, справедлива

Теорема 3. *Если области D_1 и D_2 изоморфны единичному кругу, то совокупность конформных отображений D_1 на D_2 зависит от трех действительных параметров. В частности, существует одно и только одно отображение $f\colon D_1 \to D_2$, нормированное условиями*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \theta, \tag{8}$$

где $z_0 \in D_1$ и $w_0 \in D_2$ — произвольно заданные точки и $\theta \in \mathbb{R}$ — произвольное число.

◀ Пусть $f_1\colon D_1 \to U$ и $f_2\colon D_2 \to U$ — конформные отображения, устанавливающие изоморфизм данных областей единичному кругу. Тогда

$$f_0 = f_2^{-1} \circ f_1$$

будет, очевидно, конформным отображением D_1 на D_2. По теореме 1 совокупность всех таких отображений задается формулой $f = \varphi \circ f_0$, где φ — произвольный автоморфизм области D_2. Но, как мы видели, $\Lambda(D_2)$ зависит от трех действительных параметров. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $f_1(z_0) = a$, $\arg f_1'(z_0) = \theta_1$ и $f_2(w_0) = b$, $\arg f_2'(w_0) = \theta_2$; построим по формуле (7) автоморфизм λ единичного круга, нормированный условиями

$$\lambda(a) = b, \qquad \arg \lambda'(a) = \alpha = \theta + \theta_2 - \theta_1.$$

Тогда

$$f = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1$$

является изоморфизмом D_1 на D_2 и удовлетворяет условиям (8). В самом деле, $f(z_0) = f_2^{-1} \circ \lambda(a) = f_2^{-1}(b) = w_0$ и $\arg f'(z_0) = -\arg f_2'(w_0) + \arg \lambda'(a) + \arg f_1'(z_0) = -\theta_2 + \alpha + \theta_1 = \theta$. Существование нормированного изоморфизма доказано.

Пусть существует еще изоморфизм $g\colon D_1 \to D_2$, нормированный теми же условиями. Тогда $\varphi = f \circ g^{-1}$ будет автоморфизмом D_1, нормированным условиями $\varphi(w_0) = w_0$, $\arg \varphi'(w_0) = 0$, а $\lambda = f_2 \circ \varphi \circ f_2^{-1}$ — автоморфизмом U, нормированным условиями $\lambda(b) = b$, $\arg \lambda'(b) = 0$. По доказанному выше $\lambda = e$ (тождественное отображение), следовательно, и $\varphi = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_2 = e$. Таким образом, $f \circ g^{-1} = e$ и $f = g$ ▶

Легко видеть, что различные канонические области не изоморфны друг другу. В самом деле, замкнутая плоскость (сфера) $\overline{\mathbb{C}}$ даже не гомеоморфна $\mathbb{C}$ и U, а следовательно, ее нельзя и конформно отобразить на эти области. Области $\mathbb{C}$ и U гомеоморфны, но конформного отображения, скажем $\mathbb{C}$ на U, не су-

ществует, ибо такое отображение должно осуществляться целой функцией f, для которой всюду $|f(z)|<1$, а тогда по теореме Лиувилля $f=\text{const}$.

Область, граница которой — пустое множество, совпадает с $\overline{\mathbb{C}}$. Области, границы которых состоят из одной точки, представляют собой плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с выброшенной точкой и, очевидно, конформно (даже дробно-линейно) изоморфны $\mathbb{C}$. Основной результат этого параграфа — теорема Римана состоит в том, что любая односвязная область D, граница которой содержит более одной точки (и, следовательно, бесконечно много точек, ибо она связна), изоморфна единичному кругу U.

Для доказательства этой теоремы нам нужно развить некоторый аппарат, полезный и в других вопросах теории функций.

37. Принцип компактности. Определение 1. Семейство функций $\{f\}$, заданных в некоторой области D, называется *равномерно ограниченным внутри* D, если для любого множества $K\Subset D$ существует постоянная $M=M(K)$ такая, что

$$|f(z)|\leqslant M \tag{1}$$

для всех $z\in K$ и всех $f\in\{f\}$.

Теорема 1. *Если семейство функций* $\{f\}$, *голоморфных в области* D, *равномерно ограничено внутри* D, *то и семейство производных* $\{f'\}$ *также равномерно ограничено внутри* D.

◀ Пусть $U=\{|z-z_0|<r\}$ — произвольный круг, $U\Subset D$; построим круг $V=\{|z-z_0|<r'\}$, $r'>r$, такой, что и $V\Subset D$. По формуле Коши для производных в любой точке $z\in V$ имеем для любой $f\in\{f\}$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial V}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta. \tag{2}$$

Пусть теперь $z\in U$, тогда для всех $\zeta\in\partial V$ имеем $|\zeta-z|\geqslant r'-r$ и, пользуясь равномерной ограниченностью семейства $\{f\}$, получаем из (2)

$$|f'(z)|\leqslant\frac{r'}{(r'-r)^2}M(V)=M_1(U).$$

Доказана равномерная ограниченность $\{f'\}$ в кругах $U\Subset D$.

Любое множество $K\Subset D$ можно покрыть кругами, компактно принадлежащими D. По теореме Хейне — Бореля из этого покрытия можно выбрать конечное $\{U_\nu\}_{\nu=1}^{k}$. Тогда, если обозначить $M_1(K)=\max\limits_{\nu}M_1(U_\nu)$, то для всех $z\in K$ и всех $f\in\{f\}$ будем иметь

$$|f'(z)|\leqslant M_1(K)\blacktriangleright$$

Определение 2. Семейство функций $\{f\}$, заданных в некоторой области D, называется *равностепенно непрерывным внутри* D, если для любого $\varepsilon>0$ и любого множества $K\Subset D$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon, K)>0$ такое, что

$$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon \tag{3}$$

для всех $z', z''\in K$ таких, что $|z'-z''|<\delta$, и всех $f\in\{f\}$.

Теорема 2. *Если семейство функций* $\{f\}$, *голоморфных в области* D, *равномерно ограничено внутри* D, *то оно и равностепенно непрерывно внутри* D.

◀ Пусть $K\Subset D$; обозначим через 2ρ расстояние между непересекающимися замкнутыми множествами $\overline{K}$ и ∂D (т. е. $\inf|\zeta-z|$ по всем $z\in\overline{K}$ и всем $\zeta\in\partial D$) и через

$$K^{(\rho)}=\bigcup_{z_0\in K}\{|z-z_0|<\rho\}$$

ρ-раздутие множества K. Так как, очевидно, $K^{(\rho)}\Subset D$, то по теореме 1 найдется постоянная M такая, что

$$|f'(z)|\leqslant M \tag{4}$$

для всех $z\in K^{(\rho)}$ и всех $f\in\{f\}$.

Пусть z', z'' — две произвольные точки K такие, что $|z'-z''|<\rho$; тогда все точки z прямолинейного отрезка $[z', z'']$ принадлежат $K^{(\rho)}$ и, следовательно, для всех $z\in[z', z'']$ и всех $f\in\{f\}$ справедливо неравенство (4). Поэтому для всех $f\in\{f\}$ мы имеем

$$|f(z')-f(z'')|=\left|\int\limits_{[z', z'']}f'(z)\,dz\right|\leqslant M|z'-z''|.$$

Отсюда и следует равностепенная непрерывность семейства $\{f\}$ на K, ибо для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\min\left(\rho, \frac{\varepsilon}{M}\right)$ ▶

Определение 3. Семейство функций $\{f\}$, заданных в некоторой области D, называется *компактным*[1]) *в* D, если из каждой последовательности f_n функций этого семейства можно извлечь подпоследовательность f_{n_k}, сходящуюся равномерно на любом $K\Subset D$.

---

[1]) Будем рассматривать функции, определенные в области D, как точки некоторого пространства $A(D)$. В этом пространстве введем топологию, назвав *сходящейся* любую последовательность f_n, равномерно сходящуюся на каждом компактном подмножестве $K\Subset D$. Тогда компактность семейства функций $\{f\}$ сводится к компактности соответствующего множества точек в пространстве $A(D)$. Это замечание оправдывает сделанный выбор термина.

Теорема 3 (Монтель). *Если семейство функций $\{f\}$, голоморфных в области D, равномерно ограничено внутри D, то оно компактно в D.*

◀ а) Докажем сначала, что если последовательность $f_n \subset \{f\}$ сходится в каждой точке некоторого множества $\mathscr{E} \subset D$, всюду плотного в D, то она сходится равномерно на каждом $K \Subset D$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и множество $K \Subset D$; пользуясь равностепенной непрерывностью семейства $\{f\}$, выберем разбиение D на квадраты со сторонами, параллельными координатным осям плоскости z, столь мелкие, что для любых точек z', $z'' \in K$, принадлежащих одному квадрату, и любой $f \in \{f\}$ справедливо неравенство

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Множество K покрыто конечным числом таких квадратов q_p $(p = 1, \ldots, P)$; так как $\mathscr{E}$ всюду плотно в D, то в каждом q_p найдется точка $z_p \in \mathscr{E}$. Так как последовательность $\{f_n\}$ сходится на $\mathscr{E}$, то найдется число N такое, что

$$|f_m(z_p) - f_n(z_p)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

для всех m, $n > N$ и всех z_p, $p = 1, \ldots, P$.

Пусть теперь z — произвольная точка K; найдется точка z_p, лежащая в том же квадрате, что и z, и для всех m, $n > N$ будем иметь

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leqslant |f_m(z) - f_m(z_p)| + |f_m(z_p) - f_n(z_p)| + \\ + |f_n(z_p) - f_n(z)| < \varepsilon$$

в силу неравенств (5) и (6). По критерию Коши отсюда заключаем, что последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится для всех $z \in K$, причем сходимость равномерна на K.

б) Теперь докажем, что из любой последовательности $f_n \subset \{f\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке некоторого множества $\mathscr{E} \subset D$, всюду плотного в D. В качестве $\mathscr{E}$ выберем множество точек $z = x + iy \in D$, обе координаты которых x и y рациональны; оно, очевидно, счетно и всюду плотно в D; пусть $\mathscr{E} = \{z_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$.

Числовая последовательность $f_n(z_1)$ ограничена, следовательно, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $f_{k1} = f_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Числовая последовательность $f_{n1}(z_2)$ также ограничена, следовательно, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $f_{k2} = f_{n_{k1}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$; последовательность функций f_{n2} сходится, следовательно, по край-

ней мере в двух точках: z_1 и z_2. Из последовательности $f_{n2}(z_3)$ извлекаем сходящуюся подпоследовательность $f_{k3}=f_{n_k 2}$ $(k=1, 2, \ldots)$ так, что f_{n3} сходится по крайней мере в точках z_1, z_2 и z_3. Аналогичное построение можно продолжать неограниченно. Остается выбрать так называемую диагональную последовательность

$$f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn}, \ldots \tag{7}$$

Эта последовательность сходится в любой точке $z_p \in \mathcal{E}$, ибо по построению все ее члены, начиная с p-го, выбраны из последовательности f_{np}, сходящейся в точке z_p.

Объединяя доказанное в б) и а), получаем утверждение теоремы ▶

Теорему Монтеля часто называют *принципом компактности*.

Определение 4. *Функционалом* на семействе функций $\{f\}$, определенных в области D, называется отображение J: $\{f\} \to \mathbb{C}$ этого семейства в $\mathbb{C}$ (это означает, что указан закон, по которому каждой функции $f \in \{f\}$ ставится в соответствие комплексное число $J(f)$). Функционал J на $\{f\}$ называется *непрерывным*, если для любой последовательности $f_n \in \{f\}$, которая равномерно сходится к $f_0 \in \{f\}$ на любом $K \Subset D$,

$$\lim_{n \to \infty} J(f_n) = J(f_0). \tag{8}$$

Пример. Пусть $H(D)$ — семейство всех функций f, голоморфных в области D, и a — произвольная точка D. Рассмотрим p-й коэффициент тейлоровского разложения f в точке a:

$$c_p(f) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}.$$

Это — функционал на семействе $H(D)$; покажем, что он непрерывен. Если $f_n \to f_0$ равномерно на каждом $K \Subset D$, то, взяв в качестве K окружность $\gamma = \{|z-a|=r\} \subset D$, мы для любого $\varepsilon > 0$ найдем N такое, что $|f_n(z) - f_0(z)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $z \in \gamma$. По неравенствам Коши получим тогда, что для всех $n > N$

$$|c_p(f_n) - c_p(f_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{r^p},$$

а это и означает непрерывность функционала $c_p(f)$.

Определение 5. Компактное семейство функций $\{f\}$ называется *компактным в себе*[1]), если предел любой последовательности $f_n \in \{f\}$, равномерно сходящейся на каждом $K \Subset D$, принадлежит семейству $\{f\}$.

---

[1]) Компактные в себе множества называют также *компактами*.

Теорема 4. *Всякий функционал J, непрерывный на компактном в себе семействе $\{f\}$, достигает своей верхней грани, т. е. существует функция $f_0 \in \{f\}$ такая, что для всех $f \in \{f\}$*

$$|J(f_0)| \geqslant |J(f)|. \tag{9}$$

◀ Положим $A = \sup\limits_{f \in \{f\}} |J(f)|$ — это некоторое число, быть может, равное ∞. По определению верхней грани найдется последовательность $f_n \in \{f\}$ такая, что $|J(f_n)| \to A$. Так как $\{f\}$ компактно в себе, то существует подпоследовательность f_{n_k}, сходящаяся равномерно на каждом $K \Subset D$ к некоторой функции $f_0 \in \{f\}$. В силу непрерывности функционала имеем

$$|J(f_0)| = \lim_{n \to \infty} |J(f_n)| = A;$$

отсюда заключаем, во-первых, что $A < \infty$ и, во-вторых, что $|J(f_0)| \geqslant |J(f)|$ для всех $f \in \{f\}$ ▶

В дальнейшем мы будем рассматривать семейства функций, однолистных в некоторой области D. Для доказательства компактности в себе таких семейств полезна

Теорема 5 (Гурвиц). *Пусть последовательность функций f_n, голоморфных в области D, равномерно на любом $K \Subset D$ сходится к функции $f \neq \text{const}$. Тогда, если $f(z_0) = 0$, то в любом круге $\{|z - z_0| < r\} \subset D$ все функции f_n, начиная с некоторой, также обращаются в нуль.*

◀ По теореме Вейерштрасса f голоморфна в D; по теореме единственности существует множество $\{0 < |z - z_0| \leqslant \rho\} \Subset D$, на котором $f \neq 0$. Обозначая $\gamma = \{|z - z_0| = \rho\}$ и $\mu = \min\limits_{z \in \gamma} |f(z)|$, имеем $\mu > 0$. Так как f_n сходится на γ равномерно, то найдется N такое, что

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu$$

для всех $z \in \gamma$ и всех $n > N$. Для таких n по теореме Руше функция $f_n = f + (f_n - f)$ имеет внутри γ столько же нулей, сколько их имеет там f, т. е. по крайней мере один нуль ▶

Следствие. *Если последовательность функций f_n, голоморфных и однолистных в области D, сходится равномерно на каждом $K \Subset D$, то предельная функция f этой последовательности либо однолистна, либо постоянна.*

◀ Пусть $f(z_1) = f(z_2)$, но $z_1 \neq z_2$ ($z_1, z_2 \in D$) и $f = \text{const}$. Рассмотрим последовательность функций $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ и круг $\{|z - z_1| < r\}$, где $r \leqslant |z_1 - z_2|$; предельная функция $g(z) = f(z) - f(z_2)$ обращается в нуль в точке z_1, следовательно, по теореме Гурвица и все $g_n(z)$, начиная с некоторого номера, обращаются в нуль в этом круге, но это противоречит однолистности функций f_n ▶

38. Теорема Римана. *Любая односвязная область D, граница которой содержит более одной точки, изоморфна единичному кругу U.*

Идея доказательства такова. Рассмотрим семейство S голоморфных и однолистных в D функций f, по модулю ограниченных 1 (т. е. осуществляющих конформное отображение D в единичный круг U). Фиксируем точку $a\in D$ и будем искать в семействе функцию, для которой растяжение $|f'(a)|$ в точке a максимально. Выделив компактную в себе часть S_1 семейства S и пользуясь непрерывностью функционала $J(f)=|f'(a)|$, мы можем утверждать, что существует функция f_0 с максимальным растяжением в точке a. Наконец, мы убедимся в том, что f_0 реализует отображение D *на* круг U (а не только *в* U, как остальные функции семейства).

Такой *вариационный метод*, когда ищется функция, обладающая тем или иным экстремальным свойством, часто применяется в теории функций.

◀ а) Докажем, что в D существует хотя бы одна голоморфная и однолистная функция, ограниченная 1 по модулю. По условию граница ∂D содержит две различные точки α и β; корень квадратный $\sqrt{\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}}$ продолжается аналитически вдоль любого пути в области D, и так как D односвязна, то по теореме о монодромии (п. 28) этот корень допускает выделение в D двух однозначных ветвей φ_1 и φ_2, отличающихся знаком.

Каждая из этих ветвей однолистна в D, ибо из равенства $\varphi_\nu(z_1)=\varphi_\nu(z_2)$ ($\nu=1$ или 2) следует равенство

$$\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta}=\frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}, \tag{1}$$

а из него, в силу однолистности дробно-линейной функции, — равенство $z_1=z_2$. Эти ветви отображают D соответственно на области $D_1^*=\varphi_1(D)$ и $D_2^*=\varphi_2(D)$, которые не имеют общих точек, ибо в противном случае нашлись бы точки z_1, $z_2\in D$ такие, что $\varphi_1(z_1)=\varphi_2(z_2)$, но из последнего равенства снова следует (1), а из него — равенство $z_1=z_2$, т. е. $\varphi_1(z_1)=-\varphi_2(z_2)$; мы пришли к противоречию, ибо $\varphi_\nu\neq 0$ в D.

Область D_2^* содержит некоторый круг $\{|w-w_0|<\rho\}$, и, значит, φ_1 не принимает в D значений из этого круга. Поэтому функция

$$f_1(z)=\frac{\rho}{\varphi_1(z)-w_0}, \tag{2}$$

очевидно, голоморфная и однолистная в D, ограничена: для всех $z\in D$ имеем $|f_1(z)|\leqslant 1$.

б) Обозначим через S семейство всех голоморфных и однолистных в D функций, по модулю ограниченных 1. Это семейство непусто, ибо содержит функцию f_1, и по теореме Монтеля

компактно. Часть S_1 семейства S, состоящая из всех функций $f \in S$, для которых

$$|f'(a)| \geqslant |f_1'(a)| > 0 \tag{3}$$

в некоторой фиксированной точке $a \in D$, компактна в себе. В самом деле, по следствию теоремы 5 из предыдущего пункта предел последовательности функций $f_n \in S_1$, сходящейся на любом $K \Subset D$, может быть лишь однолистной функцией (и тогда принадлежать к S_1) либо постоянной, но последний случай исключен неравенством (3).

Рассмотрим на S_1 функционал

$$J(f) = |f'(a)|.$$

По доказанному в предыдущем пункте он непрерывен, и, следовательно, существует функция $f_0 \in S_1$, реализующая его максимум, т. е. такая, что

$$|f'(a)| \leqslant |f_0'(a)| \tag{4}$$

для всех $f \in S_1$.

в) Так как функция $f_0 \in S_1$, то она конформно отображает D в единичный круг U. Покажем, что $f_0(a) = 0$, — в противном случае в S_1 нашлась бы функция

$$g(z) = \frac{f_0(z) - f_0(a)}{1 - \overline{f_0(a)}\, f_0(z)},$$

для которой

$$|g'(a)| = \frac{1}{1 - |f_0(a)|^2}\, |f_0'(a)| > |f_0'(a)|,$$

вопреки экстремальному свойству (4) функции f_0.

Покажем, наконец, что f_0 отображает D на весь круг U. В самом деле, пусть f_0 не принимает в D некоторого значения $b \in U$; так как $f_0(a) = 0$, то $b \neq 0$. Но и значение $b^* = \frac{1}{\bar{b}}$ не принимается этой функцией в D (ибо $|b^*| > 1$), следовательно, по теореме о монодромии в D можно выделить однозначную ветвь корня

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}}, \tag{5}$$

которая принадлежит S (однолистность проверяется точно так же, как в п. а), справедливость неравенства $|\psi(z)| \leqslant 1$ очевидна). Но тогда S принадлежит и функция

$$h(z) = \frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \overline{\psi(a)}\, \psi(z)},$$

для которой

$$|h'(a)| = \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}\,|f_0'(a)|.$$

Но $1+|b|>2\sqrt{|b|}$, ибо $|b|<1$, т. е. $h\in S_1$ и $|h'(a)|>|f_0'(a)|$, вопреки экстремальному свойству функции f_0 ▶

§ 12. Соответствие границ и принцип симметрии

39. Соответствие границ. Приведем без доказательства так называемый принцип соответствия границ:

Теорема (Каратеодори). *Пусть области D и D^* ограничены жордановыми кривыми ∂D и ∂D^*; тогда конформное отображение f: $D\to D^*$ можно продолжить на границу D до гомеоморфизма замкнутых областей $\overline{D}$ и $\overline{D}^*$.*

Для произвольных гомеоморфизмов теорема, конечно, несправедлива. Например, отображение единичного круга U на себя, которое в полярных координатах $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\psi}$ задается уравнениями

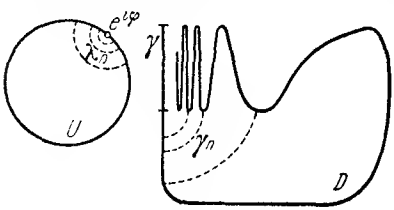


Рис. 66.

$$\rho = r, \quad \psi = \varphi + \frac{r}{1-r}, \qquad (1)$$

очевидно, гомеоморфно, но на граничную окружность непрерывно не продолжается.

Точно так же неверна теорема и для конформных отображений на области, границы которых нежордановы. Рассмотрим, например, конформное отображение f круга U на область D, изображенную на рис. 66, в состав границы которой входит часть кривой $v=\sin\frac{1}{u}$ с предельным сегментом $\gamma=\{w: u=0, -1\leqslant v\leqslant 1\}$. Можно доказать, что при этом отображении дугам γ_n, отрезающими от D области D_n $(n=1, 2, \ldots)$, пересечение замыканий которых совпадает с γ, в плоскости z соответствуют дуги λ_n, отрезающие от U области U_n, причем $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U}_n$ совпадает с некоторой граничной точкой $e^{i\varphi}$ (рис. 66). В этом смысле при отображении f точке $e^{i\varphi}$ соответствует целый отрезок γ, так что f нельзя непрерывно продолжить в замкнутый круг $\overline{U}$.

К. Каратеодори ввел так называемые *граничные элементы* области, понимая под ними классы в известном смысле эквивалентных сечений этой области. Присоединение к области ее граничных элементов называется компактификацией по Каратеодори. Он доказал, что конформное отображение

областей устанавливает взаимно однозначное и в некотором смысле непрерывное соответствие граничных элементов этих областей. Поэтому сформулированная выше теорема распространяется и на нежордановы области, если пользоваться при этом компактификацией по Каратеодори вместо обычных замыканий [1]).

Приведем, также без доказательства, несколько более точных результатов о граничном поведении конформных отображений областей с жордановыми границами при дополнительных предположениях об этих кривых. Через ∂D и ∂D^* будем обозначать границы областей и через $f\colon D \to D^*$ — конформное отображение.

I (Ф. и М. Риссы, И. И. Привалов). Если ∂D и ∂D^* — спрямляемые жордановы кривые, то f продолжается на ∂D как абсолютно непрерывная функция длины дуги. Производная f' почти в каждой точке $\zeta \in \partial D$ (в смысле линейной меры) имеет угловое граничное значение [2]) $f'(\zeta)$, конечное и отличное от нуля, и для любого множества точек $e \subset \partial D$ мера образа $e^* = f(e)$ равна

$$\operatorname{mes} e^* = \int_e |f'(z)|\,|d\zeta|; \tag{2}$$

в частности, множествам $e \subset \partial D$ меры 0 соответствуют множества $e^* \subset \partial D^*$ меры 0.

II (Линделёф). Если ∂D и ∂D^* — гладкие жордановы кривые, то $\arg f'(z)$ продолжается до непрерывной функции в $\overline{D}$, причем для всего $\zeta \in \partial D$

$$\arg f'(\zeta) = \theta^* - \theta, \tag{3}$$

где θ и соответственно θ^* — углы наклона касательных к кривым ∂D и ∂D^* в точках ζ и $\zeta^* = f(\zeta)$.

III (Келлог). Если в условиях и обозначениях предыдущей теоремы, кроме того, углы θ и θ^*, как функции длины дуги s и s^* соответственно на ∂D и ∂D^*, удовлетворяют условию Липшица

$$|\theta(s_1) - \theta(s_2)| < k\,|s_1 - s_2|^{\alpha}, \qquad |\theta^*(s_1^*) - \theta^*(s_2^*)| < k\,|s_1^* - s_2^*|^{\alpha},$$

где k и α, $0 < \alpha \leqslant 1$, — постоянные, то производная f' продолжается до непрерывной и отличной от нуля функции в $\overline{D}$ (отображение «конформно» на границе).

---

[1]) Подробнее об этом см., например, в книге: А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. II, «Наука», М., 1968.

[2]) Угловым граничным значением функции φ в точке $\zeta \in \partial D$, где ∂D имеет касательную, называется общее предельное значение φ по всем некасательным путям $\gamma \in D$ с концом в точке ζ.

IV (Шварц). Если ∂D и ∂D^* — аналитические жордановы кривые[1]), то f продолжается до голоморфной функции в $\bar{D}$.

Доказательство утверждений I—III можно найти в книге Г. М. Голузина «Геометрическая теория функций комплексного переменного» (М. — Л., 1967); утверждение IV мы докажем в следующем пункте. Здесь приведем только более простой обратный принцип соответствия границ:

Теорема. *Пусть даны области D и D^*, компактно принадлежащие $\mathbb{C}$, с жордановыми границами γ и γ^*; если функция f голоморфна в области D, непрерывна в $\bar{D}$ и устанавливает взаимно однозначное отображение γ на γ^*, то и отображение f: $D \to D^*$ взаимно однозначно* (т. е. f*—конформный изоморфизм*).

◀ Пусть w_0 — произвольная точка D^*; так как f на γ принимает лишь значения из γ^*, то $f \neq w_0$ на γ и, в силу непрерывности, $f \neq w_0$ в некоторой граничной полосе G области D. Величина

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg \{f(z) - w_0\} \tag{4}$$

(где arg обозначает какую-либо непрерывную вдоль пути γ ветвь аргумента и Δ_γ — приращение этой ветви на γ), очевидно, непрерывно меняется при гомотопной деформации пути в полосе G. Но так как величина (4) может принимать лишь целочисленные значения, то она остается постоянной при такой деформации.

По условиям теоремы отображение f: $\gamma \to \gamma^*$ гомеоморфно, следовательно,

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma^*} \arg (w - w_0) = 1,$$

ибо при однократном обходе γ вектор $w - w_0$ делает один поворот (рис. 67). В силу сказанного выше следует, что и для любого пути $\tilde{\gamma}$, гомотопного γ в полосе G, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\tilde{\gamma}} \arg \{f(z) - w_0\} = 1.$$

---

[1]) Дугу γ называют *аналитической*, если ее можно задать путем $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $z(t)$ — аналитическая функция действительного переменного t на отрезке $[\alpha, \beta]$ (т. е. функция, представимая в некоторой окрестности каждой точки $t_0 \in [\alpha, \beta]$ в виде суммы ряда по степеням $(t - t_0)$, причем $z'(t) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$. Из теоремы Хейне — Бореля вытекает, что такая функция $z(t)$ продолжается до голоморфной функции комплексного переменного t в некоторой окрестности отрезка $[\alpha, \beta]$. Поэтому аналитическая дуга — это голоморфный образ отрезка. Замкнутой аналитической кривой называют голоморфный образ окружности $\{|t| = 1\}$ в плоскости параметра, при котором $z'(t) \neq 0$ на окружности; если отображение $z = z(t)$ еще и взаимно однозначно, то γ называют *аналитической жордановой кривой.*

К области $\tilde{D} \Subset D$, ограниченной кривой $\tilde{\gamma}$, применим принцип аргумента (п. 33), по которому уравнение $f(z)=w_0$ имеет в $\tilde{D}$ (а значит, и в D, ибо в полосе G нет w_0-точек) точно один корень.

Так же доказывается, что для любой точки $w_1 \notin \overline{D}^*$ число нулей функции $f(z)-w_1$ в области D, равное

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma^*} \arg (w - w_1),$$

равно 0, ибо при обходе γ^* вектор $w - w_1$ не делает ни одного полного оборота (рис. 67). Из принципа сохранения области

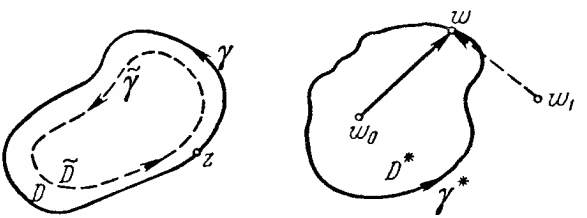


Рис. 67.

(п. 34) следует, далее, что f не может принимать в D и значений из γ^*, ибо в этом случае она должна была бы принимать значения из дополнения к $\overline{D}^*$.

Таким образом, f один и только один раз принимает в области D любое значение w_0 из D^* и не принимает никаких других значений, т. е. f взаимно однозначно отображает D на D^* ▶

Замечание. В доказанной теореме D может быть произвольной областью на $\overline{\mathbb{C}}$ (с жордановой границей), но D^* обязана быть компактной в $\mathbb{C}$, ибо функция f должна быть непрерывной в $\overline{D}$ в смысле $\mathbb{C}$. Последнее условие существенно: в самом деле, функция $f(z)=z^3$ голоморфна в верхней полуплоскости $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$ и взаимно однозначно отображает ∂D (ось x) на ось u — границу верхней полуплоскости $D^*=\{\operatorname{Im} w>0\}$, но в области D отображение f не взаимно однозначно.

Пример. Изучим отображение верхней полуплоскости $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$, осуществляемое *эллиптическим интегралом первого рода*

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{5}$$

где k, $0<k<1$, — параметр и рассматривается голоморфная в D ветвь корня, которая на отрезке $I=[0, 1]$ оси x принимает положительные значения.

Функция $F(z;\ k)$ непрерывно продолжается в $\bar{D}$, и мы выясним сначала, как она преобразует границу ∂D, т. е. ось x. Когда $z=x$ описывает слева направо отрезок $I=[0,\ 1]$, интеграл (5)

$$F(x,\ k)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

принимает положительные (в силу сделанного выбора ветви корня) значения, возрастающие от 0 до значения

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{6}$$

т. е. F устанавливает гомеоморфизм отрезков $[0,\ 1]$ оси x и $[0,\ K]$ оси u.

При переходе через точку $z=1$ один из четырех линейных множителей подкоренного выражения, именно $1-x$, меняет знак. Так как мы рассматриваем ветвь корня, голоморфную в верхней полуплоскости D, то мы должны считать, что такой переход происходит в результате обхода точки $z=1$ по малой полуокружности $\gamma\subset D$ (пунктир на рис. 68). В результате такого обхода $\arg(1-z)$ меняется от 0 до $-\pi$, а аргументы остальных множителей не меняются. Поэтому на отрезке $II=\left[1,\ \frac{1}{k}\right]$ оси x аргумент корня равен $-\frac{\pi}{2}$, а аргумент подинтегрального выражения в (5) равен $\frac{\pi}{2}$; значения F на отрезке II можно, следовательно, представить в виде

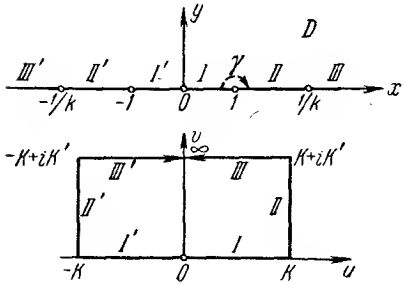


Рис. 68.

$$F(x,\ k)=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=$$

$$=K+i\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}},$$

где в последнем интеграле корень опять принимает положительные значения. Когда x описывает слева направо отрезок $II = \left[1, \frac{1}{k}\right]$ оси x, точка $F(x, k)$ описывает снизу вверх отрезок $[K, K+iK']$ плоскости w, где

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}. \tag{7}$$

При переходе через точку $z = \frac{1}{k}$ еще один множитель подкоренного выражения, $(1-kx)$, меняет знак. Как и выше, мы убедимся в том, что рассматриваемая ветвь корня на луче $III = \left[\frac{1}{k}, \infty\right)$ оси x должна иметь аргумент $-\pi$, т. е. принимать отрицательные значения. Значения F на этом луче представляются, следовательно, в виде

$$F(x, k) = \int_0^1 + \int_1^{1/k} + \int_{1/k}^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} =$$

$$= K + iK' - \int_{1/k}^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}},$$

где в последнем интеграле корень принимает положительные значения. Замена переменных $x = \frac{1}{k\xi}$ показывает, что

$$\int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k^2\xi^2)(1-\xi^2)}} = K,$$

поэтому луч $\left[-\frac{1}{k}, \infty\right)$ функция F преобразует (и притом гомеоморфно) в отрезок $[K+iK', iK']$ плоскости w (см. рис. 68).

Совершенно аналогично проверяется, что функция F гомеоморфно преобразует отрицательную полуось x в левую половину контура прямоугольника, изображенного на рис. 68 (совокупность отрезков I', II' и III').

Применяя принцип соответствия границ, можно утверждать, что *эллиптический интеграл первого рода* $F(z, k)$ *реализует конформное отображение верхней полуплоскости* D *на прямоугольник с вершинами* $\pm K$, $\pm K+iK'$, *где величины* K *и* K' *выражаются через параметр* k *по формулам* (6) *и* (7).

40. Принцип симметрии. Здесь мы рассмотрим один специальный случай аналитического продолжения, относящийся к

конформным отображениям. Предварительно докажем так называемую лемму о непрерывном продолжении.

Лемма. *Пусть непересекающиеся области D_1 и D_2 имеют общий прямолинейный участок границы γ*[1]*, а функции f_1 и f_2 соответственно голоморфны в D_1 и D_2 и непрерывны на множествах $D_1 \cup \gamma$ и $D_2 \cup \gamma$* (рис. 69). *Тогда, если*

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ для всех } z \in \gamma, \tag{1}$$

то функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{для всех } z \in D_1 \cup \gamma, \\ f_2(z) & \text{для всех } z \in D_2 \end{cases} \tag{2}$$

голоморфна в области $D_1 \cup \gamma \cup D_2 = D$.

◀ Из условий леммы видно, что f непрерывна в D; для доказательства ее голоморфности по теореме Мореры (п. 20) достаточно проверить, что интеграл от нее по границе любого треугольника $\Delta \Subset D$ равен нулю. Если Δ компактно принадлежит D_1 или D_2, то это следует из теоремы Коши. Остается рассмотреть случай, когда $\overline{\Delta} \cap \gamma \neq 0$.

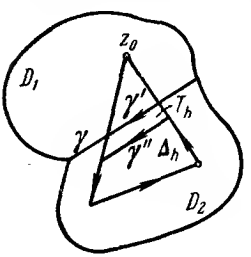


Рис. 69.

Пусть γ делит Δ на две части Δ_1 и Δ_2; по свойствам интегралов

$$\int\limits_{\partial\Delta} f\,dz = \int\limits_{\partial\Delta_1} f\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_2} f\,dz, \tag{3}$$

и достаточно показать, что каждый из интегралов справа равен нулю. Рассмотрим любую из частей Δ_1 и Δ_2 и для простоты обозначим ее снова через Δ. Обозначим через T_h трапецию, которая отсекается от Δ прямой, параллельной γ и отстоящей от γ на расстоянии h; пусть $\Delta_h = \Delta \setminus T_h$ (рис. 69).

По теореме Коши интеграл от f по $\partial\Delta_h$ равен нулю, следовательно,

$$\int\limits_{\partial\Delta} f\,dz = \int\limits_{\partial T_h} f\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_h} f\,dz = \int\limits_{\partial T_h} f\,dz. \tag{4}$$

Пусть γ' и γ'' — основания трапеции T_h (предположим, что они ориентированы одинаково); так как длины боковых ее сторон стремятся к нулю при $h \to 0$, а функция f ограничена в Δ, то

$$\int\limits_{\partial T_h} f\,dz = \int\limits_{\gamma'} f\,dz - \int\limits_{\gamma''} f\,dz + O(h).$$

[1]) Отрезок γ считается открытым (без концов).

Обозначим через $\lambda(z)=z_0+k(z-z_0)$ линейное преобразование γ' на γ''; делая в интеграле по γ'' замену переменных $z\to\lambda(z)$, получим

$$\int_{\gamma'} f\,dz-\int_{\gamma''} f\,dz=\int_{\gamma'}\{f(z)-f[\lambda(z)]\,k\}\,dz. \tag{5}$$

Так как при $h\to 0$ функция $\lambda(z)$ равномерно на γ' стремится к z, $k\to 1$ и f равномерно непрерывна в $\bar{\Delta}$, то подинтегральная функция в (5) равномерно стремится к нулю, а значит, интеграл от f по ∂T_h стремится к нулю при $h\to 0$. Но из (4) видно, что он не зависит от h, следовательно, он, а значит и интеграл по $\partial\Delta$, равен нулю.

Если $\bar{\Delta}$ пересекается с γ лишь стороной или вершиной, то доказательство очевидным образом упрощается ▶

Замечание. Если воспользоваться усиленной формой теоремы Коши, в которой предполагается, что функция голоморфна в области и лишь непрерывна в ее замыкании, то доказательство леммы существенно упрощается: по этой теореме каждый интеграл в правой части (3) равен нулю.

Функцию f, определенную формулой (2) в области D, можно рассматривать как аналитическое продолжение каждой из функций f_1 и f_2[1]). Лемму о непрерывном продолжении поэтому можно читать так: если две области D_ν имеют общий прямолинейный участок границы γ и функции f_ν, голоморфные в D_ν, непрерывно смыкаются на γ, то они и аналитически продолжают друг друга. Для дифференцируемых функций действительного переменного аналогичное утверждение, конечно, несправедливо (пример: D_1 и D_2 — отрезки $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ и $f(x)=|x|$).

Перейдем к доказательству принципа симметрии.

Теорема 1 (Риман—Шварц). *Пусть области D_1 и D_1^* имеют жордановы границы ∂D_1 и ∂D_1^*, причем ∂D_1 содержит отрезок прямой или дугу окружности γ, а ∂D_1^* — такой же отрезок или дугу γ^*. Если функция f_1 конформно отображает D_1 на D_1^*, причем $f_1(\gamma)=\gamma^*$, то f_1 допускает аналитическое продолжение в область D_2, симметричную с D_1 относительно γ, и продолженная так функция конформно отображает область $D_1\cup\gamma\cup D_2$ на $D_1^*\cup\gamma^*\cup D_2^*$, если $D_1\cap D_2$ и $D_1^*\cap D_2^*=\varnothing$* (рис. 70).

◀ а) Рассмотрим сначала частный случай, когда γ и γ^* представляют собой отрезки действительных осей. Определим

[1]) Точнее: элемент (D, f) является непосредственным аналитическим продолжением каждого из элементов (D_1, f_1) и (D_2, f_2).

в области D_2, симметричной с D_1 относительно отрезка γ, функцию

$$f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}. \tag{6}$$

Так как при $z\in D_2$ точка $\bar{z}\in D_1$, а функция $f_1(z)$ голоморфна в D_1, то функция $\overline{f_2(z)}=f_1(\bar{z})$ антиголоморфна в D_2 (см. п. 7) и, следовательно, $f_2(z)$ голоморфна в D_2. По принципу соответствия границ f_1 непрерывна в $\overline{D}_1$, причем по условию теоремы f_1 на γ принимает действительные значения (принадлежащие отрезку γ^*). Поэтому, когда точка $z\in D_2$ стремится к точке $x\in\gamma$, то $\bar{z}\to x$ и $f_2(z)\to\overline{f_1(x)}=f_1(x)$. Таким образом, $f_1(x)=f_2(x)$ для всех $x\in\gamma$ и функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям леммы о непрерывном продолжении. По этой лемме функция

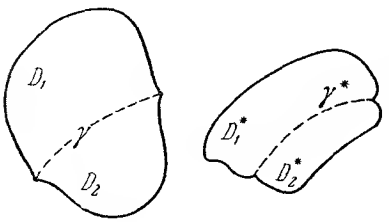


Рис. 70.

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z) \text{ в } D_1\cup\gamma, \\ f_2(z) \text{ в } D_2 \end{cases}$$

голоморфна в области $D_1\cup\gamma\cup D_2$. По построению f конформно отображает эту область на $D_1^*\cup\gamma^*\cup D_2^*$. Для частного случая γ, $\gamma^*\subset\mathbb{R}$ теорема доказана.

б) Общий случай приводится к этому частному дробно-линейными отображениями. В самом деле, пусть λ и λ_* — дробно-линейные отображения, переводящие соответственно γ и γ^* в отрезки действительных осей (они существуют по доказанному в п. 10). Функция $g_1=\lambda_*\circ f_1\circ\lambda^{-1}$ по доказанному в а) продолжается аналитически в область $\lambda(D_2)$, симметричную с $\lambda(D_1)$ относительно отрезка $\lambda(\gamma)$, причем продолженная функция g_2 отображает $\lambda(D_2)$ на область $\lambda_*(D_2^*)$ (мы пользуемся тем, что дробно-линейные отображения сохраняют симметричные точки, см. п. 9). Но тогда функция $f_2=\lambda_*^{-1}\circ g_2\circ\lambda$ является аналитическим продолжением функции f_1 в область D_2 и отображает D_2 на D_2^* ▶

Замечание. Отрезок γ^* в доказанной теореме может содержать бесконечную точку; тогда продолжение f будет *мероморфным:* функция f окажется голоморфной в D всюду, кроме точки $z_0\in\gamma$, соответствующей бесконечной точке, где она имеет полюс. Этот полюс непременно первого порядка, ибо f однолистна в области D (в окрестности кратного полюса функция многолистна, см. п. 24).

В качестве примера применения принципа симметрии приведем доказательство теоремы о продолжении, из которой

следует сформулированное в предыдущем пункте утверждение IV.

Теорема 2 (Шварц). *Если граница области D содержит аналитическую дугу γ, то конформное отображение f этой области на единичный круг можно аналитически продолжить через γ.*

◀ Пусть γ задается при помощи функции $z=z(t)$, аналитической на отрезке $[\alpha, \beta]\subset\mathbb{R}$ и такой, что $z'(t)\neq 0$ (см. определение в сноске на стр. 208). Для любой $t_0\in[\alpha, \beta]$ найдется окрестность $U=\{t\in\mathbb{C}: |t-t_0|<r\}$, в которую $z(t)$ продолжается, как голоморфная функция комплексного переменного, причем в силу условия $z'(t_0)\neq 0$ можно считать, что $z(t)$ однолистна в U. Функция $z=z(t)$ отображает диаметр $\delta\subset U$, состоящий из точек действительной оси t, на дугу $\gamma_0\subset\gamma$; мы обозначим через U^+ тот из полукругов $U\setminus\delta$, который $z(t)$ отображает в D. Функция $g(z)=f\circ z(t)$ в U^+ удовлетворяет условиям принципа симметрии (она преобразует δ в дугу единичной окружности) и, следовательно, аналитически продолжается в U. Отсюда вытекает, что $f(z)$ аналитически продолжается через дугу γ_0 ▶

Принцип симметрии полезен для фактического построения конформного отображения областей, обладающих свойствами симметрии.

Пример. Область D представляет собой внешность объединения отрезков $[-1, 1]$ и $[-i, i]$; обозначим через D_1 ее верхнюю половину (рис. 71). В D_1 однолистна функция $w_1=z^2$ (в D эта функция неоднолистна), которая отображает D_1 на плоскость с выброшенным лучом $-1\leqslant \operatorname{Re} w_1\leqslant\infty$. Поэтому функция $\omega=\sqrt{z^2+1}$, где выбрана нужная ветвь корня, отображает D_1 на верхнюю полуплоскость D_1^*. Отрезок γ, соединяющий через ∞ точки ± 1, переходит при этом в отрезок γ^*, соединяющий через ∞ точки $\pm\sqrt{2}$. Следовательно, к последней функции применим принцип симметрии, по которому она продолжается аналитически [1]) в область D_2, симметричную с D_1 относительно γ, и продолженная функция $\omega=\sqrt{z^2+1}$ (мы обозначаем ее тем же символом) отображает D на внешность D^* отрезка $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Внешность отрезка уже совсем просто отображается на каноническую область (например, линейной функцией мы отображаем D^* на внешность отрезка $[-1, 1]$, а затем применяем одну из ветвей функции, обратной к фунции Жуковского из п. 11,— получим отображение на внутренность или внешность единичного круга).

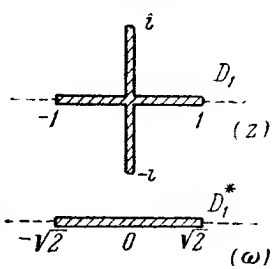


Рис. 71.

[1]) Точнее, продолжается мероморфно, ибо в бесконечной точке области D функция имеет полюс (первого порядка).

41. Эллиптический синус и модулярная функция. Рассмотрим еще два примера более общего характера.

а) Эллиптический синус. В п. 39 мы убедились в том, что эллиптический интеграл первого рода

$$z=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \tag{1}$$

где k, $0<k<1$, — параметр и рассматривается одна из ветвей корня в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} w>0\}$, конформно отображает эту полуплоскость на прямоугольник R_0 с вершинами $\pm K$, $\pm K+iK'$. Обозначим через

$$w=\operatorname{sn}(z, k) \tag{2}$$

или, короче, $w=\operatorname{sn} z$ обращение интеграла (1) — функцию, голоморфную в прямоугольнике R_0 и отображающую его конформно на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w>0\}$; функция (2) называется *эллиптическим синусом*.

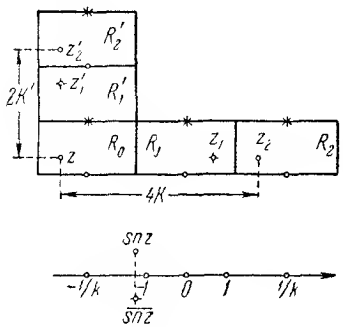


Рис. 72.

Так как функция sn переводит отрезок $[K, K+iK']$ в отрезок $\left[1, \frac{1}{k}\right]$, то к ней применим принцип симметрии, по которому она аналитически продолжается в прямоугольник R_1, симметричный с R_0 относительно $[K, K+iK']$, причем продолженная функция (мы снова обозначаем ее через sn) отображает R_1 на нижнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w<0\}$ (рис. 72). Продолженная функция также удовлетворяет условию принципа симметрии и по этому принципу аналитически продолжается в прямоугольник R_2, симметричный с R_1 относительно отрезка $2K$, $2K+iK'$. Прямоугольник R_2 отображается снова на верхнюю полуплоскость, и притом по построению для всех $z\in R_0$

$$\operatorname{sn}(z+4K)=\operatorname{sn} z \tag{3}$$

(см. рис. 72; точка z_1, симметричная с z относительно отрезка $[K, K+iK']$, переходит в точку $\overline{\operatorname{sn} z}$, а точка $z_2=z+4K$, симметричная с z_1 относительно $[2K, 2K+iK']$, — снова в точку $\operatorname{sn} z$).

Точно так же мы можем продолжить функцию sn в прямоугольник R_1', симметричный с R_0 относительно отрезка $[-K+iK', K+iK']$, только это продолжение будет мероморфным — в точке iK', отмеченной звездочкой на рис. 72, функция sn имеет полюс

первого порядка (см. замечание после принципа симметрии). Продолженная функция sn отображает R_1' на нижнюю полуплоскость и, по тому же принципу симметрии, аналитически продолжается в прямоугольник R_2', симметричный с R_1' относительно отрезка $[-K+2iK', K+2iK']$, и этот прямоугольник она отображает снова на верхнюю полуплоскость. Как и выше, мы получим, что для всех $z \in R_0$

$$\operatorname{sn}(z+2iK') = \operatorname{sn} z \tag{4}$$

(см. рис. 72).

Рассуждая точно таким же образом, мы можем продолжить эллиптический синус sn на всю плоскость $\mathbb{C}$. Продолженная функция окажется *мероморфной*: в точках $iK'+4Km+2iK'n$, где m, $n=0, \pm 1, \ldots$ — произвольные целые числа (эти точки отмечены звездочками на рис. 72), она имеет полюсы первого порядка, а в остальных точках $\mathbb{C}$ голоморфна. Эта функция обладает также интересным свойством *двоякопериодичности* — как видно из соотношений (3) и (4) и аналогичных им, она имеет два независимых периода $T_1=4K$ и $T_2=2iK'$: для любых целых m, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ справедливо соотношение

$$\operatorname{sn}(z+4Km+2iK'n) = \operatorname{sn} z. \tag{5}$$

Таким образом, функция sn инвариантна относительно некоторой группы движений плоскости $\mathbb{C}$, т. е. линейных преобразований вида

$$z \to z+4Km+2iK'n \qquad (m,\ n=0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

Функции, обладающие свойством инвариантности относительно некоторой группы дробно-линейных преобразований, называются *автоморфными функциями*. Красивой теории автоморфных функций посвящена обширная литература [1]).

В п. 32 мы говорили о римановой поверхности эллиптического синуса.

б) Модулярная функция. Рассмотрим круговой треугольник $T_0=ABC$, образованный дугами окружностей, ортогональных к единичной окружности (рис. 73). По теореме Римана существует единственное конформное отображение $w=\mu(z)$ этого треугольника на верхнюю полуплоскость, переводящее точки A, B и C соответственно в точки $w=0$, 1 и ∞. По принципу симметрии функцию μ можно аналитически продолжить в треугольники $T_1^{(k)}$, $k=1, 2, 3$, симметричные с T_0 относительно его сторон. Точки, симметричные вершинам T_0 относи-

[1]) См., например, Л. Р. Форд, Автоморфные функции, ОНТИ, 1936.

тельно сторон, противоположных этим вершинам, также лежат на единичной окружности. (В самом деле, при инверсии, скажем относительно дуги BC, дуга окружности $\{|z|=1\}$, содержащая точку A, перейдет в дополнительную дугу этой окружности и образ A_1 точки A попадет на эту дополнительную дугу.) По свойствам инверсии (п. 9) стороны треугольников $T_1^{(k)}$ снова будут дугами окружностей, ортогональных единичной окружности.

Продолженная функция μ конформно отображает каждый из $T_1^{(k)}$ на нижнюю полуплоскость так, что стороны переходят в один из отрезков $(0, 1)$, $(1, \infty)$, $(\infty, 0)$. Поэтому к μ снова можно применить принцип симметрии, и, следовательно, μ аналитически продолжается в треугольники $T_2^{(k)}$, которые получаются из $T_1^{(k)}$ отражением относительно их сторон (заштрихованы на рис. 73).

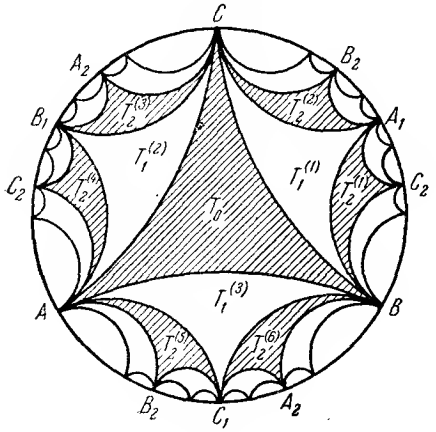


Рис. 73.

Повторяя описанный процесс аналитического продолжения неограниченно, мы построим голоморфную в единичном круге U функцию μ, которая и называется *модулярной функцией*. Очевидно, что модулярная функция непродолжаема аналитически за пределы U, т. е. U является ее областью голоморфности. В самом деле, на окружности $\partial U=\{|z|=1\}$ всюду плотны множества точек, получающихся отражениями каждой из вершин треугольника T_0; но когда z стремится по соответствующему треугольнику к точке A_n, получающейся отражениями вершины A, то $\mu(z)\to 0$, а когда z так же стремится к точкам B_n или C_n (получающихся отражениями B или C), то $\mu(z)$ стремится к 1 или ∞. Таким образом, μ нельзя продолжить в $\overline{U}$ даже непрерывно.

Из построения ясно также, что *модулярная функция μ не принимает в U трех значений*: 0, 1 и ∞. Этим свойством мы воспользуемся в дальнейшем.

Заметим, далее, что четное число отражений относительно дуг окружностей (инверсий) сводится к дробно-линейному преобразованию. Дробно-линейные преобразования, которые получаются четным числом отражений, описанных при определении модулярной функции, к тому же переводят окружность ∂U в

себя, т.е. являются автоморфизмами U. Они, очевидно, составляют группу Λ_0, которая является подгруппой группы всех автоморфизмов U.

Легко видеть, что *модулярная функция является инвариантной относительно преобразований группы* Λ_0 (*т. е. автоморфной функцией*). В самом деле, пусть $\lambda \in \Lambda_0$ — произвольное отображение и $z \in U$ — произвольная точка; z принадлежит некоторому треугольнику T из описанных выше (точнее, его замыканию в U), и функция μ конформно отображает его на верхнюю или нижнюю полуплоскость так, что вершины треугольника переходят в точки 0, 1 и ∞.

По построению функция μ отображает треугольник $\lambda(T)$ на ту же полуплоскость, причем соответствующие точки снова переходят в точки 0, 1 и ∞. Поэтому μ и $\mu \circ \lambda$ конформно отображают T на одну полуплоскость с одинаковым соответствием трех граничных точек, и, следовательно,

$$\mu(z) \equiv \mu \circ \lambda(z) \tag{6}$$

(см. п. 36).

Опишем аналитическую функцию, обратную к модулярной. Для построения этой функции рассмотрим ее ветвь $z = \mu^{-1}(w)$, голоморфную в верхней полуплоскости и отображающую эту полуплоскость на треугольник T_0. По принципу симметрии эта ветвь аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость через каждый из (открытых) отрезков (0, 1), (1, ∞) и ($-\infty$, 0). Каждую из продолженных ветвей можно снова продолжить в верхнюю полуплоскость через любой из этих отрезков. При этом, если второе продолжение происходит через другой отрезок, чем первое, то полученная ветвь отличается от начальной (она отображает верхнюю полуплоскость на один из треугольников $T_2^{(k)}$). Этот процесс продолжения можно вести неограниченно; он и определяет аналитическую функцию, обратную к модулярной.

Нетрудно видеть, что *аналитическая функция, обратная к модулярной, бесконечнозначна*; *точки* 0, 1 *и* ∞ *являются ее логарифмическими точками ветвления. Все значения этой функции лежат в единичном круге* U.

На существовании функции, обратной к модулярной, основано простое доказательство следующей теоремы, которая представляет собой далеко идущее обобщение основного свойства многочленов.

Теорема 1 (Пикар). *Любая целая функция, отличная от постоянной, принимает все* (*конечные*) *комплексные значения, за исключением, быть может, одного.*

◀ Пусть целая функция f не принимает двух различных значений a, $b \in \mathbb{C}$. Функция

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

также целая и не принимает значений 0 и 1. В окрестности произвольной точки $z_0 \in \mathbb{C}$ голоморфна функция $\varphi = \mu^{-1} \circ g$, где μ^{-1} — какая-либо ветвь функции, обратной к модулярной, голоморфная в окрестности точки $w_0 = g(z_0)$. Так как функция g не принимает значений 0, 1 и ∞ — особых для аналитической функции μ^{-1}, то функция φ продолжаема вдоль любого пути $\gamma \subset \mathbb{C}$. Так как $\mathbb{C}$ односвязна, то по теореме о монодромии (п. 28) функция φ однозначна и голоморфна в $\mathbb{C}$, т. е. является целой функцией. Но все значения μ^{-1} лежат в единичном круге, следовательно, φ ограничена и, по теореме Лиувилля (п. 20), постоянна. Но тогда и g, а следовательно и f, постоянна ▶

Целая функция — это мероморфная (в $\mathbb{C}$) функция, не принимающая значения ∞. Теорема Пикара обобщается и на произвольные мероморфные функции:

Теорема 2 (Пикар). *Любая мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, отличная от постоянной, принимает все комплексные значения из $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением, быть может, двух.*

◀ Пусть f — мероморфная функция, не принимающая трех различных значений a, b, $c \in \overline{\mathbb{C}}$. Эти значения можно считать конечными, ибо если бы какое-либо из них было бесконечным, то f была бы целой функцией, не принимающей двух значений, т. е., по теореме 1, постоянной. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c};$$

она, очевидно, целая (ибо $f \neq c$) и не принимает значений $\frac{1}{a-c}$ и $\frac{1}{b-c}$. По теореме 1 функция g постоянна, но тогда и f постоянна ▶

Замечание. Целая функция $e^z \neq 0$, мероморфная функция $\operatorname{tg} z \neq \pm i$, следовательно, теоремы Пикара не могут быть усилены в отношении числа непринимаемых значений (такие значения называются *пикаровскими исключительными значениями*).

Можно доказать, что свойство мероморфных функций принимать все значения, за исключением, быть может, двух на самом деле является локальным свойством их поведения в бесконечности. Имеет место так называемая большая теорема Пикара, по которой любая функция в любой сколь угодно малой окрестности предельной точки ее полюсов принимает все значения, за исключением, быть может, двух. Точно так же в любой

окрестности существенно особой точки любая функция принимает все конечные значения, за исключением, быть может, одного. В этой формулировке большая теорема Пикара является существенным усилением теоремы Сохоцкого [1]).

ЗАДАЧИ

1. Докажите следующее обобщение принципа аргумента: если функция f мероморфна в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной конечным числом непрерывных кривых, причем на ∂D нет ни нулей, ни полюсов f, то для любой функции φ, голоморфной в $\overline{D}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{k=1}^{l}\varphi(a_k)-\sum_{k=1}^{m}\varphi(b_k),$$

где первая сумма распространяется на все нули, а вторая — на все полюсы функции f в D. При $\varphi\equiv 1$ получаем принцип аргумента. [Указание: примените к интегралу в левой части теорему Коши о вычетах.]

2. Пусть $f(z)$ мероморфна в единичном круге U и непрерывна в окрестности ∂U. Доказать, что для любого числа A такого, что $|A|>\max\limits_{\partial U}|f|$, число A-точек в круге U равно числу полюсов.

3. Пусть $f(z)$ непрерывна всюду на $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфна вне некоторого компакта $K\subset\mathbb{C}$. Доказать, что $f(K)=f(\overline{\mathbb{C}}\setminus K)$. [Указание: пусть $z_0\in\overline{\mathbb{C}}\setminus K$ и $f\neq f(z_0)$ на K; тогда нужно рассмотреть функцию $g(z)=\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, доказать, что она имеет конечное число нулей, устранить их и применить принцип аргумента для непрерывных функций.]

4. а) Найти радиус сходимости ряда (10) из примера в п. 34, который обращает целую функцию $w=ze^{-az}$ в окрестности точки $w=0$. б) Объяснить, почему этот ряд имеет конечный радиус сходимости. в) Вывести из б) асимптотическую формулу Стирлинга для $n!$

5. Пусть $f_1,\ \ldots,\ f_n$ голоморфны в замкнутой области $\overline{D}$. Доказать, что функция $\varphi(z)=|f_1(z)|+\ \ldots\ +|f_n(z)|$ достигает максимума на ее границе ∂D.

6. Пусть D — полоса $\left\{-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$ в $\mathbb{C}$. Покажите, что целая функция e^{e^z} ограничена на границе области D в $\mathbb{C}$, но не ограничена в D. Однако всякая равномерно ограниченная в D голоморфная функция f по модулю не превосходит

$$\sup_{|\operatorname{Im}z|=\frac{\pi}{2}}|f(z)|.$$

7. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в единичном круге U такая, что $f(0)=1$ и $|f(z)|<M$ в U. Покажите, что в круге $\left\{|z|\leqslant\dfrac{1}{M}\right\}$ выполняется неравенство $|f(z)-1|\leqslant M\cdot|z|$.

8. Докажите, что на поверхности модуля голоморфной функции $f\not\equiv\text{const}$ внутри всякой замкнутой линии уровня $\{|f|=c\}$ число минимумов на единицу больше числа точек перевала.

---

[1]) Доказательство большой теоремы Пикара (для голоморфных функций) можно найти в книге А. И. Маркушевича, цит. на стр. 207.

9. Докажите, что всякое голоморфное отображение замкнутого круга $\bar{U}$ в себя имеет неподвижную точку. Приведите пример такого отображения, все неподвижные точки которого находятся на границе круга U.

10. Если f голоморфна в единичном круге U, непрерывна в $\bar{U}$ и $|f(z)|=1$ для всех $z\in\partial U$, то f — рациональная функция. [Указание. Первый способ: сначала предположите, что $f\neq 0$ в U, и докажите, что $f\equiv\text{const}$, затем устраните нули f, не меняя $|f|$ на ∂U. Второй способ: примените принцип симметрии.]

11. (Н. Г. Чеботарев). Пусть $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $V=\{\operatorname{Im} z>0\}$, непрерывна в $\bar{V}\cap\mathbb{C}$ и $f(V)\subset V$, а $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$. Доказать, что в этих условиях f — линейная функция. [Указание: по принципу симметрии f — целая; докажите, что она возрастает на оси x, затем рассмотрите функцию $g(z)=\dfrac{f(z)}{z-x_0}$, где x_0 — единственный нуль f, и докажите, что $\ln g\equiv\text{const}$.]

12. Пусть $f(z)$ голоморфна в круге $\bar{U}$ и постоянна по модулю на его границе ∂U. Докажите, что $\arg f$ при обходе ∂U меняется монотонно.

13. Пусть функции f_ν в круге U голоморфны, отличны от нуля и все по модулю меньше единицы. Тогда, если $f_\nu(0)\to 0$, то $f_\nu(z)\to 0$ равномерно во всяком внутреннем круге.

14. Докажите, что любой конформный изоморфизм кольца $\{r_1<|z|<r_2\}$ на кольцо $\{\rho_1<|w|<\rho_2\}$ линеен. [Указание: примените принцип симметрии.]

15. Докажите, что любой конформный изоморфизм прямоугольника на прямоугольник, переводящий все 4 вершины в вершины, линеен.

16. Приведите пример голоморфного (но, конечно, неоднолистного) отображения кругового кольца на круг и пример такого же отображения круга на кольцо.

17. Пусть для функции $f\colon \mathbb{C}\to\bar{\mathbb{C}}$ множество прообразов $\{z\colon f(z)=w_0\}$ для любой точки $w_0\in\bar{\mathbb{C}}$ дискретно, т. е. не имеет предельных точек в $\mathbb{C}$. Докажите, что такая функция не может быть более чем двоякопериодической, т. е. существуют периоды ω_1 и ω_2 такие, что любой период f имеет вид $\omega=n_1\omega_1+n_2\omega_2$, где n_1 и n_2 — целые числа.

18. Проверьте, что функция $w=\operatorname{sn}(z,k)$ взаимно однозначно (и конформно) отображает прямоугольник $\{-2K<\operatorname{Re} z<2K,\ -K'<\operatorname{Im} z<K'\}$ с отождествленными противоположными сторонами на поверхность, которая получится, если взять два экземпляра плоскости w с разрезами по отрезкам $(-1/k,-1)$, $(1,1/k)$ и склеить берега разрезов крест-накрест.

ГЛАВА V

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Здесь мы рассмотрим две не связанные между собой темы, которые, с одной стороны, завершают набор основных сведений из теории функций одного комплексного переменного и, с другой стороны, необходимы для теории функций нескольких переменных.

§ 13. Разложения целых и мероморфных функций

42. Теорема Миттаг-Леффлера. В п. 24 было доказано, что любая рациональная функция разлагается на сумму некоторого многочлена (своей главной части в бесконечности) и главных частей в конечных особых точках. Здесь мы хотим получить аналогичное разложение для произвольных мероморфных функций. Через a_n $(n=1, 2, \ldots)$ мы будем обозначать полюсы [1]) мероморфной функции f, а через

$$g_n(z)=\sum_{\nu=1}^{p_n}\frac{c_{-\nu}^{(n)}}{(z-a_n)^{\nu}} \tag{1}$$

главную часть ее лорановского разложения в полюсе a_n.

Если мероморфная функция f имеет лишь конечное число полюсов, то, вычитая из f сумму ее главных частей в этих полюсах, мы получим, очевидно, целую функцию h. В этом случае поставленная задача решается тривиально: функция f разлагается в сумму целой функции h и своих главных частей. Таким образом, представляет интерес лишь случай бесконечного числа полюсов. Здесь вместо конечной суммы мы имеем ряд из главных частей, и возникает вопрос о его сходимости. Этот ряд, вообще говоря, расходится, и для получения сходящегося ряда к главным частям приходится вводить поправки, которые, как мы увидим, можно брать в виде многочленов — отрезков тейлоровских разложений главных частей.

---

[1]) Напомним, что мероморфная функция не может иметь более чем счетное множество полюсов: в каждом круге $\{|z|<N\}$, $N=1, 2, \ldots$, полюсов лишь конечное число, ибо в противном случае существовала бы их конечная предельная точка, которая была бы неизолированной особой точкой, а не полюсом.

Переходя к точным формулировкам и доказательствам, прежде всего условимся, что понимать под сходимостью ряда из мероморфных функций, которые могут обращаться в бесконечность в некоторых точках.

Определение. Ряд из мероморфных функций называется *сходящимся* (соотв. *равномерно сходящимся*) на множестве M, если лишь конечное число его членов имеет полюсы на M и после удаления этих членов ряд сходится (соотв. равномерно сходится) на M.

Задачу о разложении решает следующая теорема существования мероморфной функции с заданными полюсами и главными частями:

Теорема 1 (Миттаг-Леффлер). *Каковы бы ни были последовательность точек* $a_n \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *и последовательность функций* g_n *вида* (1), *существует мероморфная функция* f, *которая имеет полюсы во всех точках* a_n *и только этих точках, причем главная часть* f *в каждом полюсе* a_n *совпадает с* g_n.

◀ Без ограничения общности можно считать, что $a_n \neq 0$ (ибо вместо f можно рассматривать функцию $f - g_0$, где g_0 — главная часть f в точке $z=0$) и что точки a_n занумерованы в порядке неубывающих модулей: $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ $(n=1, 2, \ldots)$. Фиксируем число q, $0<q<1$, и обозначим $K_n = \{z\colon |z| < q|a_n|\}$. Так как функция g_n голоморфна в круге $\{|z| < |a_n|\}$ и K_n компактно принадлежит этому кругу, то g_n можно в K_n равномерно приблизить полиномом Тейлора

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{m_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k; \tag{2}$$

степень m_n мы выберем так, чтобы для всех $z \in K_n$ было

$$|g_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

При таком выборе P_n ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n) = f$$

сходится равномерно на любом компакте K из $\mathbb{C}$ в смысле определения 1. В самом деле, для любого K найдется номер N такой, что $K \subset K_n$ для всех $n \geqslant N$; члены ряда

$$f_N = \sum_{n=N}^{\infty} (g_n - P_n) \tag{4}$$

голоморфны на K, и в силу (3) этот ряд мажорируется на K сходящейся геометрической прогрессией. Следовательно, ряд (4) сходится на K равномерно и его сумма f_N по теореме Вейерштрасса (п. 22) голоморфна в K_N.

Функция f отличается от f_N на рациональную функцию $\sum_{n=1}^{N-1}(g_n - P_n)$ с полюсами a_n и главными частями g_n $(n=1, \ldots, N-1)$ и, следовательно, имеет в K заданные полюсы и главные части. Так как K — произвольный компакт, то f мероморфна и имеет в $\mathbb{C}$ заданные полюсы и главные части ▶

Следствие. *Любую мероморфную функцию f можно разложить в ряд*

$$f = h + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n - P_n), \tag{5}$$

равномерно сходящийся на любом компакте, где h — целая функция, g_n — главные части f и P_n — некоторые полиномы.

◀ Занумеруем полюсы f в порядке неубывающих модулей (точку $z=0$ можно считать правильной, если вместо f рассмотреть функцию $f - g_0$, где g_0 — главная часть f в этой точке) и по теореме 1 построим ряд

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty}(g_n - P_n),$$

равномерно сходящийся на любом компакте. Функция $f - f_0 = h$, очевидно, целая ▶

Примеры. 1. Мероморфная функция $\dfrac{1}{\sin^2 z}$ имеет полюсы второго порядка в точках $a_n = n\pi$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$, причем ее главная часть в полюсе a_n равна $g_n = \dfrac{1}{(z-n\pi)^2}$. Ряд из главных частей

$$f_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$$

сходится равномерно на любом компакте (в смысле определения 1), ибо в любом круге $\{|z|<R\}$ мажорируется сходящимся рядом $\sum \dfrac{1}{(n\pi - R)^2}$. Поэтому поправочные многочлены P_n в разложении (5) не нужны, и остается найти целую функцию

$$h(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}.$$

Эта функция периодическая с периодом π, поэтому ее достаточно изучить

в полосе $\{0<\operatorname{Re} z\leqslant\pi\}$. В этой полосе $|z-n\pi|\geqslant\pi(n-1)$ для $n=1, 2, \ldots$, следовательно,

$$|f_0(z)|\leqslant\frac{1}{|z|^2}+\sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{|z-n\pi|^2}+2\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2\pi^2}$$

стремится к 0 при $z\to\infty$ в этой полосе. Так как $|\sin^2 z|=\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y$ при этом также стремится к иулю, то и $h(z)$ стремится к нулю при $z\to\infty$, $0<\operatorname{Re} z\leqslant\pi$. Поэтому h ограничена в полосе, а в силу периодичности и в $\mathbb{C}$; по теореме Лиувилля h постоянна и, следовательно, равна нулю. Таким образом, разложение Миттаг-Леффлера имеет вид

$$\frac{1}{\sin^2 z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}. \tag{6}$$

2. Мероморфная функция $\operatorname{ctg} z$ имеет простые полюсы в тех же точках $a_n=n\pi$ $(n=0, \pm1, \ldots)$ с главными частями $g_n=\dfrac{1}{z-n\pi}$. Ряд из главных частей расходится, но легко видеть, что можно взять поправочные многочлены нулевой степени: ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{z}{(z-n\pi)\,n\pi}$$

(штрих у суммы означает, что при суммировании выпускается индекс $n=0$) сходится равномерно иа каждом компакте. Остается найти целую функцию h в разложении (5), что можно сделать так же, как в предыдущем примере; мы убедимся, что $h\equiv 0$.

Проще, однако, проинтегрировать $\dfrac{1}{\sin^2 z}-\dfrac{1}{z^2}$ по любому пути, соединяющему точки $z=0$ и z и не проходящему через полюсы $a_n\neq 0$. Пользуясь формулой (6), мы получим иужное разложение Миттаг-Леффлера

$$\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right) \tag{7}$$

(почленное интегрирование (6) законно в силу равномерной сходимости).

Теорема Миттаг-Леффлера и ее следствие являются теоремами существования и не дают информации о том, как фактически выбирать многочлены P_n и целую функцию h. Для практических целей полезнее не столь общая, но более конструктивная теорема, при доказательстве которой используется метод Коши улучшения сходимости.

Теорема 2. *Если на некоторой системе окружностей* $\gamma_n=\{|z|=r_n\}$, $r_1<r_2<\ldots$, $r_n\to\infty$, *мероморфная функция* f *растет не быстрее, чем* z^m, *т. е. существует постоянная* A *такая, что для всех* $z\in\gamma_n$ $(n=1, 2, \ldots)$

$$|f(z)|\leqslant A|z|^m, \tag{8}$$

то в разложении (5) *в качестве* P_n *и* h *можно принять многочлены степени не выше* m.

◀ Фиксируем любую точку $z \in \mathbb{C}$, отличную от полюсов f, и предположим, что γ_N содержит z внутри. Функция $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ внутри γ_N голоморфна всюду, кроме точки $\zeta = z$ и полюсов функции f. Вычет ее в точке z равен $f(z)$, сумму вычетов в полюсах f, лежащих внутри γ_N, обозначим через s.

Для подсчета s заметим, что в каждом таком полюсе вычет функции F совпадает с вычетом функции $F_N(\zeta) = \frac{\varphi_N(\zeta)}{\zeta - z}$, где $\varphi_N(\zeta) = \sum\limits_{(\gamma_N)} g_n(\zeta)$ означает сумму всех главных частей f в полюсах, лежащих внутри γ_N. Функция F_N рациональна и кроме упомянутых полюсов она имеет полюс в точке $\zeta = z$ с вычетом $\varphi_N(z)$, а ее вычет в бесконечности равен нулю, ибо F_N имеет там нуль не ниже второго порядка [1]). По теореме о полной сумме вычетов (п. 25) сумма всех вычетов функции F_N, т. е. $s + \varphi_N(z) = 0$, откуда $s = -\varphi_N(z) = -\sum\limits_{(\gamma_N)} g_n(z)$.

Применяя к F теорему Коши о вычетах, найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) - \sum_{(\gamma_N)} g_n(z). \tag{9}$$

Если бы интеграл в левой части стремился к нулю при $N \to \infty$, то сходился бы ряд из главных частей f и поправки на сходимость были бы ненужными. Однако у нас этого, вообще говоря, нет, и для получения стремящегося к нулю интеграла нужно под знаком интеграла вычесть из $\frac{1}{\zeta - z}$ начальные члены ее лорановского разложения в бесконечности, т. е. сумму членов вида $\frac{z^k}{\zeta^{k+1}}$. Это удобно сделать так: положим $z = 0$ в равенстве (9) и тех равенствах, которые получаются из него последовательным дифференцированием по z (мы считаем, что $z = 0$ — правильная точка f); получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{(\gamma_N)} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

[1]) Если, конечно, внутри γ_N есть хотя бы один полюс f.

Умножим это равенство на z^h и затем вычтем сумму полученных равенств из (9):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{\zeta^{k+1}}\right)f(\zeta)\,d\zeta=f(z)-h(z)-\sum_{(\gamma_N)}\{g_n(z)-P_n(z)\},\tag{10}$$

где

$$h(z)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,z^k,\qquad P_n(z)=\sum_{k=0}^{m}\frac{g_n^{(k)}(0)}{k!}\,z^k.$$

Наша цель достигнута; в самом деле, оценим левую часть (10), т. е. величину

$$R_N(z)=\frac{z^{m+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_N}\frac{f(\zeta)}{\zeta^m}\,\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}$$

(мы просуммировали геометрическую прогрессию под знаком интеграла). Пользуясь неравенствами (8), получаем оценку

$$|R_N(z)|\leqslant\frac{A|z|^{m+1}}{r_N-|z|},$$

из которой видно, что $R_N(z)\to 0$ при $N\to\infty$ и притом равномерно на любом компакте ▶

Пример. Нетрудно видеть, что $\operatorname{ctg} z$ ограничен на окружностях $\left\{|z|=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}$, $n=0,\ldots$, поэтому к функции $f(z)=\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$ применима теорема 2, в которой можно положить $m=0$. Мы снова получаем разложение (7).

В заключение приведем обобщение теоремы Миттаг-Леффлера на случай произвольной области $D\subset\bar{\mathbb{C}}$. Без ограничения общности будем считать, что D содержит бесконечную точку (этого можно достичь дробно-линейным преобразованием) и что $\partial D\neq\varnothing$, т. е. что $D\neq\bar{\mathbb{C}}$ (в этом случае теорема тривиальна).

Теорема 3. *Каковы бы ни были последовательность точек $a_n\in D$, не имеющая предельных точек в D, и последовательность функций g_n вида* (1), *существует мероморфная в D функция f, которая имеет полюсы во всех точках a_n, причем главная часть f в каждом полюсе a_n совпадает с g_n.*

◀ В случае конечного числа точек a_n теорема тривиальна, поэтому последовательность a_n нужно считать бесконечной. Для каждой a_n найдем точку $\alpha_n\in\partial D$, ближайшую к a_n (такая точка существует, ибо непрерывная функция $\rho(\zeta)=|\zeta-a_n|$ до-

стигает минимума на компакте ∂D); очевидно, $r_n = |a_n - \alpha_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Для всех $z \in \{|z - \alpha_n| > r_n\}$ величину $(z - a_n)^{-1}$ можно разложить в сходящуюся геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{z - a_n} = \frac{1}{z - \alpha_n - (a_n - \alpha_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n - \alpha_n)^k}{(z - \alpha_n)^{k+1}},$$

откуда видно, что при $|z - \alpha_n| \geqslant 2r_n$ функцию $(z - a_n)^{-1}$, а значит, и $g_n(z)$ можно с любой степенью точности приблизить многочленом от переменного $(z - \alpha_n)^{-1}$. Мы подберем многочлены $P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) = Q_n(z)$ так, чтобы при $|z - \alpha_n| \geqslant 2r_n$ выполнялись неравенства

$$|g_n(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

(здесь Q_n — рациональные функции, голоморфные в D).

При сделанном выборе Q_n ряд

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - Q_n) \tag{12}$$

сходится равномерно (в смысле определения 1) на каждом $K \Subset D$. В самом деле, для любого такого K найдется число N такое, что $|z - \alpha_n| \geqslant 2r_n$ для всех $n \geqslant N$ и всех $z \in K$. Ряд из голоморфных на K функций

$$f_N = \sum_{n=N}^{\infty} (g_n - Q_n)$$

мажорируется на K сходящейся геометрической прогрессией, и поэтому функция f_N голоморфна на K. Функция f отличается от f_N на рациональную функцию $\sum_{n=1}^{N-1} (g_n - Q_n)$, которая в D имеет лишь полюсы a_n с главными частями g_n $(n = 1, \ldots, N-1)$ [1]). Так как K — произвольный компакт из D, то f удовлетворяет условиям теоремы ▶

Замечание. Пусть дана произвольная последовательность точек $a_n \in \overline{\mathbb{C}}$ и соответствующих функций g_n вида (1) (если некоторое $a_n = \infty$, то соответствующая функция g_n является многочленом относительно z без свободного члена). Пусть $\mathscr{E}$ — множество всех предельных точек последовательности a_n

[1]) Точки α_n, в которых эта рациональная функция также имеет полюсы, не принадлежат D.

(это множество, как легко видеть, замкнуто). Если в доказательстве теоремы 3 выбирать в качестве α_n точку $\mathscr{E}$, ближайшую к a_n, то ряд (12) определит функцию f, мероморфную в дополнении к $\mathscr{E}$ (которое является открытым множеством и, следовательно, состоит из не более чем счетного множества областей).

43. Теорема Вейерштрасса. Здесь мы рассмотрим разложения целых функций на линейные множители, соответствующие их нулям, аналогичные такому же разложению многочленов:

$$P(z) = az^m \prod_{n=1}^{l} (z - a_n) = Az^m \prod_{n=1}^{l} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \tag{1}$$

(через a_n мы обозначаем корни многочлена, отличные от нуля; каждый повторяется столько раз, какова его кратность; через m обозначена кратность корня $z=0$).

Целые функции в общем случае имеют бесконечное (счетное) множество нулей, и мы приходим к необходимости вместо конечного произведения (1) рассматривать бесконечные произведения. Напомним определения и простейшие факты, относящиеся к таким произведениям. Бесконечное произведение с комплексными членами

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n) \tag{2}$$

называется *сходящимся*, если все его множители отличны от нуля и частичные произведения $\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k)$ имеют предел $\Pi = \lim_{n \to \infty} \Pi_n$, также отличный от нуля [1]); число Π называется величиной произведения (2).

Так как $1 + c_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}}$, то условие $c_n \to 0$ является необходимым для сходимости произведения (2); оно, конечно, недостаточно: пример $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Для сходимости произведения (2) необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1 + c_n) \tag{3}$$

---

[1]) Условие $\Pi \neq 0$ вводится для сохранения свойства произведений обращаться в нуль, лишь когда один из множителей равен нулю.

при надлежащем выборе значений логарифмов. В самом деле, пусть ряд (3) сходится, т. е. частичные суммы $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+c_k)$ сходятся к конечному пределу Σ; тогда частичные произведения $\Pi_n = e^{\Sigma_n}$ стремятся к пределу $\Pi = e^{\Sigma} \neq 0$, т. е. (2) сходится. Пусть сходится (2), т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n = \Pi \neq 0$; выберем значения логарифмов $\ln \Pi_n$ так, чтобы $\ln \Pi_n \to \ln \Pi$, а затем положим $\ln(1+c_1) = \ln \Pi_1$, значение $\ln(1+c_2)$ подберем так, чтобы $\ln(1+c_1) + \ln(1+c_2) = \ln \Pi_2$ и т. д. (считая выбранными значения $\ln(1+c_k)$ для $k=1, \ldots, n-1$, мы подбираем $\ln(1+c_n)$ так, чтобы $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+c_k) = \ln \Pi_n$). При таком выборе значений логарифмов $\Sigma_n = \ln \Pi_n \to \ln \Pi$, т. е. ряд (3) сходится.

Наконец, бесконечное произведение, множителями которого служат функции, голоморфные на множестве M, мы будем называть *сходящимся* на этом множестве, если среди множителей есть лишь конечное число обращающихся на M в нуль и после вычеркивания таких множителей произведение оказывается сходящимся в каждой точке M.

Основной для дальнейшего является следующая теорема существования целых функций с заданными нулями:

Теорема 1 (К. Вейерштрасс). *Какова бы ни была последовательность точек* $a_n \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, *существует целая функция* f, *которая имеет нули во всех точках* a_n *и только этих точках, причем порядок нуля* f *в точке* a_n *таков, сколько членов, равных* a_n, *имеет данная последовательность.*

◀ Без ограничения общности можно считать, что $a_n \neq 0$ (ибо вместо f можно рассматривать целую функцию $\frac{f(z)}{z^m}$, где m — порядок нуля f в точке $z=0$) и что точки a_n занумерованы в порядке неубывающих модулей. Подберем натуральные числа p_n так, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n+1} \tag{4}$$

равномерно сходился в любом круге $\{|z| \leqslant R\}$; для этого достаточно, например, положить $p_n + 1 = n$ (примените критерий Коши и воспользуйтесь тем, что $a_n \to \infty$).

При таком выборе p_n бесконечное произведение

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}} \tag{5}$$

сходится на любом компакте K из $\mathbb{C}$. Для доказательства рассмотрим функцию

$$g(\zeta, p) = (1-\zeta)\, e^{\zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + \frac{\zeta^p}{p}}$$

и заметим, что ее логарифм

$$\ln g(\zeta, p) = \ln(1-\zeta) + \zeta + \ldots + \frac{\zeta^p}{p} = -\frac{\zeta^{p+1}}{p+1} - \frac{\zeta^{p+2}}{p+2} - \ldots$$

при $|\zeta| \leqslant q < 1$ допускает оценку

$$|\ln g(\zeta, p)| < |\zeta|^{p+1}(1 + |\zeta| + \ldots) \leqslant \frac{|\zeta|^{p+1}}{1-q}. \tag{6}$$

Если теперь обозначить $K_n = \{|z| \leqslant q|a_n|\}$, то для любого $K \Subset \mathbb{C}$ найдется номер N такой, что $K \subset K_n$ для всех $n \geqslant N$. Для всех таких n в силу (6)

$$\left|\ln g\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right| \leqslant \frac{1}{1-q}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1},$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty} \ln g\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$$

на K мажорируется равномерно сходящимся рядом (4), т. е. представляет голоморфную на K функцию $g_N(z)$. Поэтому произведение

$$\prod_{n=N}^{\infty} g\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right) = f_N(z) = e^{g_N(z)}$$

сходится и представляет голоморфную и отличную от нуля функцию на K. Произведение (5) отличается от f_N множителем $\prod_{n=1}^{N-1} g\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$, который обращается в нуль в точках $a_1, \ldots, a_{N-1}$ и только этих точках.

Так как K — произвольный компакт, то f — целая функция и имеет заданные нули ▶

Следствие. *Любую целую функцию f можно разложить в бесконечное произведение, соответствующее ее нулям:*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}, \tag{7}$$

где m — порядок нуля f в точке $z=0$, g — некоторая целая функция и числа p_n выбраны так, чтобы сходился ряд (4).

◀ Будем считать $m=0$ (для чего достаточно вместо f рассмотреть функцию $\frac{f(z)}{z^m}$) и расположим нули f в порядке неубывающих модулей, повторив каждый нуль столько раз, какова его кратность. По этим нулям построим по теореме 1 целую функцию

$$f_0(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\ldots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}.$$

Отношение $\frac{f}{f_0}$ является, очевидно, целой функцией без нулей, поэтому функция $g(z)=\ln\frac{f(z)}{f_0(z)}$ неограниченно продолжаема в $\mathbb{C}$ и по теореме о монодромии (п. 28) является целой функцией. Таким образом, $f=e^g f_0$ ▶

Примеры:

1. Целая функция $\frac{\sin z}{z}$ имеет простые нули в точках $a_n=n\pi$ ($n=\pm1$, ±2, ...). Так как ряд $\sum\left(\frac{z}{n}\right)^2$ сходится равномерно на любом компакте, то можно положить все $p_n=1$, и разложение Вейерштрасса примет вид

$$\frac{\sin z}{z}=e^{g(z)}\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}},$$

где g — некоторая целая функция (штрих у произведения означает, что нужно пропустить индекс $n=0$). Остается найти g, а это проще всего сделать, проинтегрировав разложение $\operatorname{ctg}z-\frac{1}{z}$, полученное в предыдущем пункте. Мы найдем, что $g=0$, и разложение примет окончательный вид

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{8}$$

(при переходе ко второй форме разложения мы объединили множители с индексами n и $-n$, что законно в силу абсолютной сходимости соответствующего ряда).

2. Целая функция $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ имеет простые нули в точках $a_n=n^2\pi^2$ ($n=1, 2, \ldots$). Очевидно, можно положить все $p_n=0$, и разложение Вейерштрасса примет вид

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2\pi^2}\right). \tag{9}$$

Целая функция $g\equiv0$, в чем проще всего убедиться, подставив $\sqrt{z}$ вместо z во второе разложение (8).

Приведем без доказательства теорему Адамара, которая позволяет извлечь некоторую информацию о величинах p_n и функции g, участвующих в разложении (7), если известно, как быстро растет функция f. Чтобы сформулировать эту теорему, придется ввести понятие порядка целой функции.

Пусть дана целая функция f; обозначим

$$M(R)=\max_{|z|=R}|f(z)|. \tag{10}$$

Если по некоторой последовательности $R_n\to\infty$ величина $M(R)$ растет не быстрее какой-либо степени R, скажем $M(R_n)\leqslant AR_n^m$, где $A=\text{const}$, то f — полином. Это следует из неравенств Коши для коэффициентов разложения $f(z)=\sum c_kz^k$: имеем

$$|c_k|\leqslant\frac{M(R_n)}{R_n^k}\leqslant AR_n^{m-k},$$

откуда, устремляя $n\to\infty$, находим, что $c_k=0$ при $k>m$.

Если отбросить этот тривиальный случай, то для оценки скорости роста $M(R)$ надо взять функции, растущие быстрее любой степени R. Понятие порядка возникает при сравнении $M(R)$ с функциями e^{R^μ}. Именно, *порядком* целой функции f называют нижнюю грань ρ таких чисел μ, для которых, начиная с некоторого $R_0=R_0(\mu)$, имеет место неравенство

$$M(R)<e^{R^\mu} \tag{11}$$

(если таких чисел μ нет, то полагают $\rho=\infty$ и называют f функцией *бесконечного порядка*).

Этому определению можно придать более удобную форму. Число $\rho=\inf\mu$ можно определить еще так: для любого $\varepsilon>0$ $M(R)<e^{R^{\rho+\varepsilon}}$, начиная с некоторого $R_0(\varepsilon)$, $M(R)>e^{R^{\rho-\varepsilon}}$ по некоторой последовательности $R=R_n\to\infty$. Если прологарифмировать дважды эти неравенства, мы получим, что $\frac{\ln\ln M(R)}{\ln R}<\rho+\varepsilon$, начиная с некоторого $R_0(\varepsilon)$, $\frac{\ln\ln M(R)}{\ln R}>\rho-\varepsilon$ по некоторой последовательности $R_n\to\infty$. Строя такие последовательности $R_n^{(k)}$ для $\varepsilon=\frac{1}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, а затем выбирая из них диагональную последовательность $R_n=R_n^{(n)}$, мы увидим, что по ней $\frac{\ln\ln M(R)}{\ln R}\to\rho$. Поэтому порядок целой функции

$$\rho=\overline{\lim_{R\to\infty}}\ \frac{\ln\ln M(R)}{\ln R}; \tag{12}$$

формулу (12) можно принять за о п р е д е л е н и е порядка.

Пример. Порядки целых функций $e^{\sigma z^n}$, $\sin z$, $\cos\sqrt{z}$ и e^{e^z} соответственно равны n, 1, $\frac{1}{2}$ и ∞.

Для сравнения скорости роста целых функций одного порядка ρ вводят понятие типа. Именно, *типом* целой функции порядка ρ называют нижнюю грань σ таких чисел ν, для которых, начиная с некоторого $R_0=R_0(\nu)$, имеет место неравенство

$$M(R)<e^{\nu R^\rho} \tag{13}$$

(если таких чисел ν нет, полагают $\sigma=\infty$ и называют f функцией *максимального типа*; при $0<\sigma<\infty$ говорят, что f *среднего типа*, а при $\sigma=0$ — *минимального типа*).

Повторяя рассуждения, проведенные для порядка, можно получить для типа формулу

$$\sigma=\varlimsup_{R\to\infty}\frac{\ln M(R)}{R^\rho}. \tag{14}$$

Теорема Адамара[1]). *Если f — целая функция конечного порядка ρ, то в ее разложении Вейерштрасса можно принять $p_n=p=E(\rho)$ и в качестве g взять многочлен степени не выше $E(\rho)$* (через $E(\rho)$ обозначается целая часть ρ).

Пример. Функция $\frac{\sin z}{z}$ порядка 1, следовательно, в ее разложении Вейерштрасса можно принять $g(z)=az+b$:

$$\frac{\sin z}{z}=e^{az+b}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right);$$

полагая здесь $z=0$, находим $b=0$; а так как левая часть и бесконечное произведение — четные функции, то непременно $a=0$. Мы доказали, что $g\equiv 0$.

Приведем теперь обобщение теоремы Вейерштрасса на случай произвольной области D. Без ограничения общности считаем, что D содержит бесконечную точку и что граница $\partial D\neq\varnothing$.

Теорема 2. *Какова бы ни была последовательность точек $a_n\in D$, не имеющая предельных точек в D, существует голоморфная в D функция f, которая имеет нули во всех точках a_n и только в этих точках*[2]).

◀ Последовательность a_n считаем бесконечной. Для каждой точки a_n найдем точку $\alpha_n\in\partial D$, ближайшую к a_n; величина

---

[1]) Доказательство теоремы Адамара можно найти в книге А. И. Маркушевича, цит. на стр. 207.

[2]) Порядок нуля f в точке a_n таков, сколько членов, равных a_n, имеет данная последовательность.

$r_n = |a_n - \alpha_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Для всех $z \in \{|z - \alpha_n| > r_n\}$ справедливо разложение

$$\ln \frac{z - a_n}{z - \alpha_n} = \ln \left(1 - \frac{a_n - \alpha_n}{z - \alpha_n}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n - \alpha_n)^k}{k (z - \alpha_n)^k},$$

а при $|z - \alpha_n| > 2r_n$ оно сходится равномерно по z.

Поэтому при $|z - \alpha_n| > 2r_n$ можно выбрать натуральное число p_n так, чтобы было

$$\left| \ln \frac{z - a_n}{z - \alpha_n} + \sum_{k=1}^{p_n} \frac{(a_n - \alpha_n)^k}{k (z - \alpha_n)^k} \right| < \frac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

При таком выборе p_n бесконечное произведение

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z - a_n}{z - \alpha_n}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_n} \frac{(a_n - \alpha_n)^k}{k (z - \alpha_n)^k}} \tag{16}$$

сходится на каждом $K \Subset D$. В самом деле, для любого такого K найдется число N такое, что $|z - \alpha_n| > 2r_n$ для всех $n \geqslant N$ и всех $z \in K$. Ряд из голоморфных на K функций

$$g_N(z) = \sum_{n=N}^{\infty} \left(\ln \frac{z - a_n}{z - \alpha_n} + \sum_{k=1}^{p_n} \frac{(a_n - \alpha_n)^k}{k (z - \alpha_n)^k} \right)$$

в силу (15) сходится на K равномерно, следовательно, g_N голоморфна на K, а произведение

$$f_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty} \left(\frac{z - a_n}{z - \alpha_n}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_n} \frac{(a_n - \alpha_n)^k}{k (z - \alpha_n)^k}} = e^{g_N(z)}$$

голоморфно и не обращается в нуль на K. Поэтому и функция f, определяемая произведением (16), голоморфна на K и обращается на K в нуль лишь в точках $a_n \in K$. Так как K — произвольный компакт из D, то f удовлетворяет условиям теоремы ▶

Замечание. Если предположить, что область D содержит точку $z = 0$, которая не является нулем искомой функции f, то формуле (16) можно придать несколько иной вид. Заменим в

(16) z на $\frac{1}{z}$, a_n на $\frac{1}{a_n}$ и α_n на $\frac{1}{\alpha_n}$; получим

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\frac{z}{a_k}}{1-\frac{z}{\alpha_k}}\right)e^{\sum_{k=1}^{p_n}\frac{z^k}{k}\left(\frac{\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\alpha_n}}{1-\frac{z}{\alpha_n}}\right)^k}. \qquad (17)$$

В частности, если $D=\mathbb{C}$, то надо положить все $\alpha_n=\infty$, и тогда (17) перейдет в формулу Вейерштрасса (5).

Мы закончим параграф двумя важными следствиями теоремы Вейерштрасса. Первое из них выражает связь между мероморфными и голоморфными функциями. Именно, мероморфная в области D функция f в окрестности каждой точки $a\in D$ представляется как отношение двух голоморфных в этой окрестности функций: $f(z)=\frac{\varphi_a(z)}{\psi_a(z)}$ (в окрестности правильной точки можно принять $\psi_a(z)\equiv 1$, а в окрестности полюса $\psi_a(z)=(z-a)^p$, где p — порядок полюса). Оказывается, что можно построить и глобальное представление такого рода, действующее во всей области D.

Теорема 3. *Любую функцию f, мероморфную в области D, можно представить как отношение двух голоморфных в D функций (в частности, если $D=\mathbb{C}$, как отношение двух целых функций).*

◀ Множество полюсов мероморфной в области D функции не может иметь предельных точек в этой области (отсюда следует, что оно не более чем счетно). Пусть a_n — последовательность полюсов f в D, причем каждый член повторяется в ней столько раз, какова кратность полюса. По теореме 2 построим голоморфную в D функцию ψ, которая имеет нули во всех точках a_n и только этих точках. Произведение $f\cdot\psi=\varphi$, очевидно, голоморфно в D (каждый полюс погашается нулем ψ соответствующего порядка), поэтому $f=\frac{\varphi}{\psi}$ — нужное представление ▶

Замечание. Очевидно, что и, обратно, отношение голоморфных в области D функций является мероморфной в D функцией. Поэтому эквивалентны следующие два определения:

1) функция называется мероморфной в D, если она не имеет в D других особых точек, кроме полюсов;

2) функция называется мероморфной в D, если она представима как отношение функций, голоморфных в D.

Второе следствие теоремы 2 выражает результат, объявленный в п. 26. Мы назвали там область D *областью голоморфности*

функции f, если f голоморфна в D и не продолжается аналитически ни через одну точку границы ∂D.

Теорема 4. *Любая область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ является областью голоморфности некоторой функции.*

◀ Построим последовательность точек $a_n \in D$ так, чтобы она не имела предельных точек в D, но чтобы каждая точка ∂D была предельной точкой этой последовательности[1]). По теореме 2 строим голоморфную в D функцию f, имеющую точки a_n и только эти точки своими нулями (и, следовательно, не тождественно равную нулю). Функцию f нельзя аналитически продолжить ни через одну точку ∂D, ибо если бы было возможно такое продолжение в точку $\alpha \in \partial D$, то α была бы внутренней точкой области голоморфности функции f, а так как α— предельная точка нулей f, то по теореме единственности тогда $f \equiv 0$ ▶

§ 14. Гармонические и субгармонические функции

Мы закончим первую часть описанием двух классов действительных функций, тесно связанных с голоморфными функциями.

44. Гармонические функции. Определение. Действительная функция u класса C^2 называется *гармонической* в области $D \subset \mathbb{C}$, если всюду в D удовлетворяется уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Дифференциальный оператор в левой части (1) называется *оператором Лапласа* и обозначается символом Δ; нетрудно видеть, что

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}}. \tag{2}$$

Связь гармонических и голоморфных функций выражается следующими двумя теоремами.

Теорема 1. *Действительная и мнимая части любой функции f, голоморфной в области D, являются гармоническими в этой области.*

◀ Имеем

$$u = \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f - \bar{f}), \qquad v = \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}),$$

[1]) Доказательство существования такой последовательности предоставляется читателю.

откуда видно, что $u,\ v\in C^2$. Далее, $\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\bar z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0$ (у нас $\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0$ в силу голоморфности f, а функция $\frac{\partial f}{\partial\bar z}$ антиголоморфна) и аналогично $\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial\bar z}=0$ ▶

Теорема 2. *Для любой функции u, гармонической в области D, локально, в окрестности каждой точки $z_0\in D$, можно построить голоморфную в этой окрестности функцию f, для которой u является действительной (или мнимой) частью*

◀ Пусть $U=\{|z-z_0|<r\}\subset D$; в силу (1) форма $\omega=-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy$ является точной в U (см. п. 15), поэтому интеграл от ω в U не зависит от пути и в U определена функция

$$v(z)=\int\limits_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{3}$$

Обычным для действительного анализа способом доказывается, что v дифференцируема в U (в смысле $\mathbb{R}^2$) и что ее частные производные соответственно равны

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4}$$

Но это — условия комплексной дифференцируемости функции $f=u+iv$, а $u=\operatorname{Re} f$. Функция $if=-v+iu\in H(U)$ имеет u своей мнимой частью ▶

Замечание. Если область D односвязна, то это же рассуждение доказывает существование функции $f\in H(D)$, для которой $u=\operatorname{Re} f$ глобально, во всей области D. Для многосвязных областей теорема неверна.

Пример: в области $D=\{0<|z|<1\}$ функция $u=\ln|z|=\frac{1}{2}\ln z\bar z$ гармонична, но условиям (4) вместе с u удовлетворяет только функция $v=\operatorname{Arg} z$, определенная в D лишь локально, во всей D эта функция не определена (она многозначна!).

Установленная связь позволяет распространить на гармонические функции некоторые свойства голоморфных функций.

1. Бесконечная дифференцируемость. *Любая гармоническая в области D функция $u(x,y)$ обладает в каждой точке частными производными всех порядков, которые также являются гармоническими в D.*

◀ По теореме 2 строим голоморфную в окрестности U точки $z=x+iy$ функцию f, для которой $u=\operatorname{Re} f$, и замечаем, что

$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} f'(z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{Im} f'(z)$. По теореме 1 эти частные производные гармоничны в U. Применяя к ним уже доказанное, получим существование и гармоничность вторых частных производных и т. д. ▶

2. Теорема о среднем. *Если функция u гармонична в круге $U=\{\zeta: |\zeta-z|<R\}$, то для любого $r<R$ значение u в центре круга равно среднему ее значений на окружности $\{|\zeta-z|=r\}$:*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{it})\,dt. \tag{5}$$

Доказательство получается отделением действительных частей в формуле

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt,$$

выражающей теорему о среднем для голоморфных функций.

Заметим, что в этой теореме вместо среднего по окружности можно брать *среднее по кругу* U:

$$u(z)=\frac{1}{\pi R^2}\int\int_U u(\zeta)\,d\sigma, \tag{6}$$

где $d\sigma=r\,dr\,dt$ — элемент площади. Для доказательства достаточно помножить обе части (5) на r и проинтегрировать по r в пределах от 0 до R.

3. Теорема единственности. *Если две функции u_1 и u_2, гармонические в области D, совпадают на множестве $\mathscr{E}\subset D$, имеющем хотя бы одну внутреннюю точку, то $u_1\equiv u_2$ в D.*

◀ Обозначим $u=u_1-u_2$ и рассмотрим множество $\mathscr{F}=\{z\in D: u(z)=0\}$. Открытое ядро $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$ по условию непусто; оно замкнуто в D, ибо если $z_0\in D$ является предельной точкой $\overset{\circ}{\mathscr{F}}$, то существует последовательность $z_n\in\mathscr{F}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$, и функция $f=u+iv$, голоморфная в окрестности z_0, является мнимой постоянной [1]), т. е. $u\equiv 0$ в этой окрестности и $z_0\in\overset{\circ}{\mathscr{F}}$. Поэтому $\overset{\circ}{\mathscr{F}}\equiv D$ ▶

---

[1]) В рассматриваемой окрестности U найдется точка $z_n\in\overset{\circ}{\mathscr{F}}$, в окрестности $V\subset U$ которой $u\equiv 0$; по уравнениям Коши — Римана в V имеем $\frac{\partial v}{\partial x}\equiv\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$, т. е. $V=c=\text{const}$; тогда $f=ic$ всюду в U.

Для гармонических функций теорема единственности формулируется в более слабой форме, чем для голоморфных: требуется, чтобы множество $\mathscr{E}$ имело не предельную, а внутреннюю точку в D. В такой сильной форме теорема и неверна: гармоническая в $\mathbb{C}$ функция $u \equiv x$ равна нулю на мнимой оси, не будучи тождественно равной нулю.

4. Принцип экстремума. *Если гармоническая в области D функция u достигает (локального) максимума или минимума в какой-либо точке $z_0 \in D$, то она постоянна в D.*

◀ Рассмотрим голоморфную в окрестности U точки z_0 функцию f, для которой $u = \operatorname{Re} f$; если u достигает в z_0 максимума, то и модуль голоморфной в U функции e^f — также ($|e^f| = e^u$); поэтому f, а следовательно и u, постоянна в U. По теореме единственности u постоянна и в D. Случай минимума сводится к случаю максимума, если вместо u рассмотреть функцию $-u$ ▶

5. Теорема Лиувилля. *Если функция u гармонична в $\mathbb{C}$ и ограничена хотя бы с одной стороны, например: $u(z) < M$ для всех $z \in \mathbb{C}$, то $u \equiv \text{const}$.*

◀ Так как $\mathbb{C}$ односвязна, то существует целая функция f такая, что $u = \operatorname{Re} f$ в $\mathbb{C}$. По условию все значения f лежат в полуплоскости $\{\operatorname{Re} f < M\}$; пусть λ — дробно-линейное отображение этой полуплоскости на единичный круг, тогда $\lambda \circ f$ является целой ограниченной функцией, т. е. константой. Отсюда следует, что f, а следовательно, и $u = \text{const}$ ▶

6. Инвариантность относительно конформных отображений. *Если функция u гармонична в области D и $z = z(\zeta)$ — конформное отображение D^* на D, то сложная функция $u \circ z(\zeta)$ гармонична в D^*.*

◀ Рассмотрим произвольную точку $\zeta_0 \in D^*$ и ее образ $z_0 = z(\zeta_0)$, в окрестности z_0 строим голоморфную функцию f такую, что $u = \operatorname{Re} f$; тогда $u \circ z(\zeta) = \operatorname{Re} f \circ z(\zeta)$, а так как функция $f \circ z(\zeta)$ голоморфна в окрестности ζ_0, то $u \circ z(\zeta)$ гармонична в этой окрестности ▶

В следующем пункте мы покажем, что теорема о среднем характеризует гармонические функции, т. е. что справедлива

Теорема 3. *Если конечная в области D функция u, локально интегрируемая по площади, в каждой точке $z \in D$ для всех $r \leqslant r_0(z)$ совпадает со своим средним по кругу $\{\zeta\colon |\zeta - z| < r\}$:*

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\{|\zeta - z| < r\}} u(\zeta)\, d\zeta, \tag{7}$$

то она гармонична в D.

Сейчас мы воспользуемся этой теоремой для доказательства одного утверждения о пределе последовательности гармонических функций, которое понадобится в дальнейшем изложении.

Теорема 4 (Харнак). *Предел убывающей последовательности гармонических в области D функций u_k $(k=1, 2, \ldots)$ является либо гармонической в D функцией, либо тождественно равен $-\infty$.*

◀ Пусть сначала u всюду конечна в D; по теореме о среднем для гармонических функций u_k в любой точке $z\in D$

$$u_k(z)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{\{|\zeta-z|<r\}} u_k(\zeta)\,d\sigma \tag{8}$$

для всех $r<r_0(z)$, где $r_0(z)$ — расстояние от z до ∂D. В силу монотонности последовательности u_k в (8) можно перейти к пределу при $k\to\infty$, и мы получим

$$u(z)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{\{|\zeta-z|<r\}} u(\zeta)\,d\sigma,$$

причем функция u локально интегрируема по площади. По теореме 3 отсюда следует, что функция u гармонична в D.

Пусть теперь $u=-\infty$ в какой-либо точке $z_0\in D$. Обозначим $\mathscr{E}=\{z\in D\colon u(z)=-\infty\}$; это множество непусто, ибо содержит z_0. Оно открыто: пусть $z_1\in\mathscr{E}$ и расстояние от z_1 до ∂D равно 2ρ; мы имеем

$$\frac{4}{\pi\rho^2}\iint\limits_{\left\{|\zeta-z_1|<\frac{\rho}{2}\right\}} u(\zeta)\,d\sigma=u(z_1)=-\infty,$$

и, следовательно, для любого $z\in\left\{|z-z_1|<\frac{\rho}{2}\right\}$

$$u(z)=\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{\{|\zeta-z|<\rho\}} u(\zeta)\,d\sigma=-\infty,$$

ибо круг $\{|\zeta-z|<\rho\}$ содержит круг $\left\{|\zeta-z_1|<\frac{\rho}{2}\right\}$; таким образом, $\left\{|z-z_1|<\frac{\rho}{2}\right\}\subset\mathscr{E}$. Точно так же доказывается и замкнутость $\mathscr{E}$ (в топологии D). Поэтому $\mathscr{E}=D$, т. е. $u\equiv-\infty$ в D ▶

В заключение этого пункта укажем, что понятие гармоничности распространяется на функции любого числа действительных переменных. Пусть D — область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция $u\colon D\to\mathbb{R}$ класса C^2 называется *гармо-*

нической в D, если в каждой точке $x=(x_1, \ldots, x_n)\in D$ удовлетворяется уравнение Лапласа

$$\Delta u=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0. \tag{9}$$

Для таких функций остаются справедливыми свойства 1—5 гармонических функций двух переменных. Эти свойства нуждаются в специальных доказательствах (ибо приведенные нами доказательства основаны на свойствах голоморфных функций), но мы на них не будем останавливаться.

45. Задача Дирихле. В ряде вопросов анализа используется задача о гармоническом продолжении функций; мы рассмотрим эту задачу в простейшей постановке.

Задача Дирихле. *Задана односвязная область $D\subset\mathbb{C}$ с жордановой границей ∂D и на ∂D задана непрерывная функция u. Требуется гармонически продолжить u в область D, т. е. построить непрерывную в $\overline{D}$ и гармоническую в D функцию, которая на ∂D совпадает с заданной.*

а) Единственность. Покажем, что задача Дирихле не может иметь двух различных решений. В самом деле, пусть существуют два решения u_1 и u_2. Тогда их разность $v=u_1-u_2$ гармонична в D, непрерывна в $\overline{D}$ и равна нулю на ∂D. Если максимум или минимум v в $\overline{D}$ достигается в D, то по принципу экстремума $v=\mathrm{const}$ в D, а в силу непрерывности и в $\overline{D}$; так как $v\equiv 0$ на ∂D, то в этом случае $v\equiv 0$ в $\overline{D}$. Если же обе эти величины достигаются на ∂D, то они равны 0 и опять $v\equiv 0$ в $\overline{D}$.

б) Редукция к кругу. Предположим, что задача Дирихле разрешима для единичного круга $U=\{|z|<1\}$, и покажем, что тогда она разрешима и для любой односвязной области D с жордановой границей ∂D. В самом деле, по теореме Римана существует конформное отображение f: $D\to U$, непрерывно продолжаемое в $\overline{D}$ по принципу соответствия границ (п. 39). Пусть на ∂D задана непрерывная функция u; зададим на ∂U значения $v=u\circ f^{-1}$ и обозначим через v гармоническое продолжение этих значений в U (оно по предположению существует). Тогда функция $u=v\circ f$ по свойству 6 предыдущего пункта будет гармонической в D; она непрерывна в $\overline{D}$, а на ∂D равна $u\circ f^{-1}\circ f=u$, т. е. решает задачу Дирихле для D.

в) Решение для круга. Начнем с эвристических соображений. Пусть задача Дирихле для единичного круга U и граничных значений u решена. Построим голоморфную в U функцию f, имеющую решение этой задачи своей действительной частью. Предположим еще, что f непрерывно продолжается

в $\overline{U}$ [1]), тогда в любой точке $z\in U$ по формуле Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{1}$$

Преобразуем правую часть (1) так, чтобы ее действительная часть содержала лишь известные значения $\operatorname{Re} f=u$ на ∂U. Для этого возьмем точку $z^*=\frac{1}{\bar{z}}$, симметричную с z относительно ∂U, воспользуемся теоремой Коши

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}\,d\zeta \tag{2}$$

и вычтем (2) из (1). Так как $|\zeta|=1$ и можно положить $\zeta=e^{it}$, $d\zeta=i\zeta\,dt$ и, кроме того,

$$\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}=\frac{\zeta}{1-\zeta z}-\frac{\bar{z}}{\zeta\bar{z}-1}=\frac{\zeta(1-|z|^2)}{|1-\zeta z|^2},$$

то будем иметь

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{1-|z|^2}{|1-\zeta z|^2}\,dt.$$

Мы достигли поставленной цели: отделяя здесь действительные части, получим так называемую *формулу Пуассона*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}dt, \tag{3}$$

где положено еще $z=re^{i\varphi}$.

Правая часть формулы Пуассона известна, если заданы значения u на ∂U; покажем, что функция u, определенная в U по этой формуле, решает задачу Дирихле для круга.

Прежде всего заметим, что ядро интеграла Пуассона

$$P(\zeta,\ z)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}$$

после несложных преобразований (с учетом того, что $|\zeta|=1$) можно представить в виде

$$P(\zeta,\ z)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}. \tag{4}$$

---

[1]) Это предположение относится к $\operatorname{Im} f$, так как $\operatorname{Re} f$ решает задачу Дирихле и, значит, непрерывна в $\overline{U}$.

Поэтому функция u, определяемая интегралом Пуассона, является в U действительной частью функции

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,dt, \tag{5}$$

голоморфной в U [1]), и, следовательно, гармонична в U. Остается показать, что при z, стремящейся по точкам U к произвольной точке $\zeta_0\in\partial U$, значение $u(z)$ стремится к $u(\zeta_0)$.

Для доказательства заметим, что для любой точки $z\in U$

$$\int_0^{2\pi} P(\zeta,\ z)\,dt=1. \tag{6}$$

Это следует из доказанного выше: функция $u\equiv 1$ — единственное решение задачи Дирихле с граничными данными $u=1$, и она удовлетворяет условиям, в которых выведена формула Пуассона. Далее,

$$\lim_{z\to\zeta_0} P(\zeta,\ z)=0 \quad \text{при} \quad \zeta\neq\zeta_0,\ z\in U, \tag{7}$$

причем сходимость равномерна по ζ на любой дуге $\gamma\subset\partial U$, не содержащей какой-либо окрестности точки ζ_0, — это видно из формулы (4) (ее средней части).

На основании (6) разность между значением u и ее предполагаемым пределом при $z\to\zeta_0=e^{it_0}$ равна

$$\Delta=\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,P(\zeta,\ z)\,dt-u(\zeta_0)=\int_0^{2\pi}\{u(\zeta)-u(\zeta_0)\}\,P(\zeta,\ z)\,dt. \tag{8}$$

Фиксируем $\varepsilon>0$ и, пользуясь непрерывностью $u(\zeta)$ в точке ζ_0, выберем $\delta>0$ так, чтобы при $|t-t_0|\leqslant 2\delta$ было

$$|u(\zeta)-u(\zeta_0)|<\varepsilon; \tag{9}$$

обозначим $\gamma_1=\{\zeta\in\partial U:\ |t-t_0|\leqslant 2\delta\}$ и $\gamma_2=\partial U\setminus\gamma_1$ и разобьем интеграл в (8) на интегралы по дугам γ_1 и γ_2. Для первого из

[1]) Голоморфность функции (5) можно доказать дифференцированием под знаком интеграла: для любой $z\in U$ имеем

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\frac{\zeta\,dt}{(\zeta-z)^2}=\frac{\Delta z}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta u(\zeta)\,dt}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)},$$

откуда видно, что при $\Delta z\to 0$ левая часть стремится к нулю, т. е. существует $f'(z)$.

них в силу (9) при любом $z\in U$ имеем

$$\left|\int_{\gamma_1}\{u(\zeta)-u(\zeta_0)\}P(\zeta,\ z)\,dt\right|<\varepsilon\int_{\gamma_1}P(\zeta,\ z)\,dt<\varepsilon\int_0^{2\pi}P(\zeta,\ z)\,dt=\varepsilon \tag{10}$$

(мы воспользовались положительностью ядра P и равенством (6)).

Теперь положим $z=re^{i\varphi}$ и будем считать, что $|\varphi-t_0|<\delta$; в силу (7) найдется ρ, $0<\rho<1$, такое, что

$$P(\zeta,\ z)<\varepsilon$$

для всех $\zeta\in\gamma_2$ и всех z, для которых $|\varphi-t_0|<\delta$, $1>r>1-\rho$ (мы воспользовались равномерностью предельного перехода (7)). Поэтому для всех z из области G, заштрихованной на рис. 74, имеем

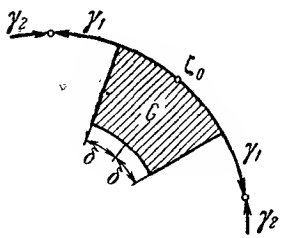


Рис. 74.

$$\left|\int_{\gamma_2}\{u(\zeta)-u(\zeta_0)\}P(\zeta,\ z)\,dt\right|<$$

$$<2M\int_{\gamma_2}P(\zeta,\ z)\,dt\leqslant 2M\varepsilon\cdot 2\pi, \tag{11}$$

где $M=\max\limits_{\zeta\in\partial U}|u(\zeta)|$. Объединяя (10) и (11), получим, что для всех $z\in G$ справедливо неравенство $|\Delta|<(1+4\pi M)\varepsilon$, а это нам и нужно.

Доказана

Теорема 1. *Любую функцию u, непрерывную на границе ∂D односвязной жордановой области D, можно единственным образом гармонически продолжить в D. В частности, для единичного круга U эта задача решается интегралом Пуассона* (3).

Заметим, что для круга $\{|z|<R\}$ интеграл Пуассона имеет вид

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt, \tag{12}$$

где $z=re^{i\varphi}$, $\zeta=Re^{it}$; это получается из доказанного простой заменой переменных.

В качестве примера применения гармонического продолжения приведем доказательство теоремы 3, сформулированной в предыдущем пункте. Пусть конечная [1]) в области D функция u

[1]) Разумеется, что функция u предполагается локально интегрируемой по площади.

в каждой точке $z\in D$ совпадает со своими усреднениями по кругам достаточно малых радиусов $r<r_0(z)$:

$$u(z)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{(|\zeta-z|<r)} u(\zeta)\,d\sigma. \tag{13}$$

Отсюда прежде всего вытекает, что u непрерывна в каждой точке $z_0\in D$, ибо при бесконечно малых $z-z_0$ разность $u(z)-u(z_0)$ представляется интегралом по области бесконечно малой площади (от интегрируемой функции) и, следовательно, эта разность бесконечно мала.

Фиксируем произвольную точку $z_0\in D$ и круг $U=\{|z-z_0|<R\}\Subset D$; по теореме 1 построим функцию h, гармоническую в U, непрерывную в U и равную u на ∂U. Нам достаточно показать, что $u\equiv h$ в U. Так как h по теореме о среднем также удовлетворяет соотношению (13) при любом $z\in U$ и $\{|\zeta-z|<r\}\subset U$, то и функция $v=u-h$ удовлетворяет ему. Из этого следует, что если v достигает локального максимума или минимума в какой-либо точке $z_1\in U$, то она постоянна в некоторой окрестности z_1. Докажем это утверждение для максимума (в случае минимума доказательство аналогично). Пусть это не так, т. е. $v(z)\leqslant v(z_1)$ в круге $V=\{|z-z_1|<r\}$, $V\subset U$, причем существует точка $z_2\in V$, в которой $v(z_2)<v(z_1)$. В силу (13)

$$v(z_1)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_V v(\zeta)\,d\sigma,$$

но в силу непрерывности v существует окрестность точки z_2, в которой $v<v(z_1)-\varepsilon$ для достаточно малого положительного ε, а так как $v\leqslant v(z_1)$ всюду в V, то правая часть последнего равенства строго меньше величины

$$\frac{v(z_1)}{\pi r^2}\iint\limits_V d\sigma=v(z_1);$$

полученное противоречие доказывает утверждение.

Непрерывная функция v достигает в $\overline{U}$ своего максимума M и минимума m. Если оба экстремума достигаются на ∂U, где $v\equiv 0$, то $M=m=0$ и $v\equiv 0$ в U — теорема доказана. Пусть один из экстремумов, скажем максимум, достигается в U, тогда множество $\mathscr{E}=\{z\in U:\ v(z)=M\}$ непусто. По доказанному оно открыто, а так как v непрерывна в U, то оно в то же время и замкнуто (в топологии U). Отсюда следует, что $\mathscr{E}=U$, т. е. $v\equiv M$ в U; из непрерывности заключаем, что $v\equiv M$ в $\overline{U}$, а так как $v=0$ на ∂U, то опять $v\equiv 0$ в U, и теорема доказана полностью.

В заключение заметим, что задача Дирихле разрешима и для пространственных областей при некоторых условиях,

наложенных на ее границу [1]). В частности, для n-мерного шара $B=\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x|<R\}$ эта задача решается при помощи интеграла Пуассона

$$u(x)=\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{\partial B} u(y)\,\frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{|y-x|^n}\,d\sigma, \tag{14}$$

где $\sigma_n=\dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^{n-1}$ — площадь n-мерной сферы ∂B, а $d\sigma$ — элемент поверхности ∂B в точке y (Γ обозначает гамма-функцию Эйлера; $\Gamma(2)=1$, поэтому $\sigma_2=2\pi R$, и при $n=2$ эта формула совпадает с (12), если еще заменить $d\sigma=R\,dt$). Формула (14) выводится из формулы Грина [2]).

46. Субгармонические функции. Логарифм модуля голоморфной функции f является гармонической функцией лишь в окрестности точек, где $f\neq 0$, а в нулях $\ln|f|$ обращается в $-\infty$, т. е. теряет гармоничность. Сейчас мы введем более общий класс субгармонических функций, который, в частности, будет содержать и логарифмы модулей голоморфных функций.

Одномерным аналогом гармонических функций являются линейные функции $h(x)=kx+b$, для которых $\dfrac{d^2h}{dx^2}=0$. При помощи линейных функций можно определить выпуклые функции следующим образом: функция $u(x)$ называется выпуклой (вниз), если для любого отрезка $[\alpha,\ \beta]$ из области ее определения и любой линейной функции $h(x)$ из неравенств $h(\alpha)\geqslant u(\alpha)$, $h(\beta)\geqslant u(\beta)$ следует неравенство $h(x)\geqslant u(x)$ для всех $x\in[\alpha,\beta]$.

Субгармонические функции являются двумерным аналогом выпуклых функций. Они не обязаны быть всюду непрерывными — можно ограничиться лишь требованием полунепрерывности.

Определение 1. Действительная функция u, $-\infty\leqslant u<\infty$, определенная в окрестности точки z_0, называется *полунепрерывной сверху* в этой точке, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$|z-z_0|<\delta\Rightarrow\begin{cases} u(z)-u(z_0)<\varepsilon, & \text{если } u(z_0)\neq-\infty,\\ u(z)<-\dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{если } u(z_0)=-\infty,\end{cases} \tag{1}$$

или, что эквивалентно,

$$\overline{\lim_{z\to z_0}}\,u(z)\leqslant u(z_0). \tag{2}$$

---

[1]) По этому поводу см.: М. В. Келдыш, О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи матем. наук, вып. 8 (1941), 171—292.

[2]) См. книги: И. И. Привалов, Субгармонические функции, ОНТИ, М., 1937 и В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», М., 1964.

Если D — область, то функция u: $D \to [-\infty, \infty)$, полунепрерывная сверху в каждой точке $z \in D$, называется *полунепрерывной сверху* в этой области. Нетрудно видеть, что для полунепрерывности сверху функции u в области D необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha \in (-\infty, \infty)$ множество меньших значений $\{z \in D: u(z) < \alpha\}$ было открытым.

Обычным образом определяется полунепрерывность функции на множестве и доказывается, что функция, полунепрерывная сверху на компакте K, ограничена сверху и достигает на K своего наибольшего значения.

Определение 2. Функция u: $D \to [-\infty, \infty)$ называется *субгармонической* в области D, если 1) она полунепрерывна сверху в D и 2) для любого достаточно малого круга U и любой гармонической в U и непрерывной в $\overline{U}$ функции h

$$h \geqslant u \text{ на } \partial U \Rightarrow h \geqslant u \text{ в } U. \tag{3}$$

Такую функцию h будем называть *гармонической мажорантой* функции u для круга U.

Отметим несколько простых свойств субгармонических функций [1]), которые подчеркивают их аналогию с выпуклыми функциями.

Теорема 1. *Если субгармоническая в области D функция u достигает локального максимума в некоторой точке $z_0 \in D$, то она постоянна в некоторой окрестности z_0.*

◀ Пусть u не постоянна ни в какой окрестности z_0. Тогда найдется достаточно малый круг $\overline{U} \subset D$ такой, что $u(z) \leqslant u(z_0)$ для всех $z \in \overline{U}$, а в некоторой точке ζ_1 окружности $\partial U = \gamma$ справедливо строгое неравенство $u(\zeta_1) < u(z_0)$. В силу полунепрерывности сверху функции u для достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется дуга $\gamma' \subset \gamma$, на которой $u(\zeta) < u(z_0) - \varepsilon$.

Возьмем дугу $\gamma'' \Subset \gamma'$ и построим непрерывную на γ функцию $h(\zeta)$, положив ее равной $u(z_0) - \varepsilon$ на γ'', равной $u(z_0)$ на $\gamma \setminus \gamma'$, а на дугах $\gamma' \setminus \gamma''$ пусть она линейно зависит от $\arg(\zeta - z_0) = t$. Тогда на γ будет $u \leqslant h$, и по определению субгармоничности

$$u(z_0) \leqslant h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} h(\zeta)\, dt, \tag{4}$$

где $h(z)$ — гармоническое продолжение $h(\zeta)$ в U (см. предыдущий пункт). Но правая часть (4) строго меньше $u(z_0)$ — противоречие доказывает теорему ▶

Следующая теорема показывает, что локальное свойство субгармоничности, выражаемое определением 2, влечет за собой соответствующее свойство в целом.

---

[1]) Подробнее см. книгу И. И. Привалова, цит. на стр. 248.

Теорема 2. *Если функция и субгармонична в D и область $G \Subset D$, то для любой функции h, гармонической в G и непрерывной в $\overline{G}$,*

$$h \geqslant u \text{ на } \partial G \Rightarrow h \geqslant u \text{ в } G. \tag{5}$$

◀ Положим $v = u - h$; так как эта функция полунепрерывна сверху в $\overline{G}$, то она достигает в $\overline{G}$ своего наибольшего значения M; требуется доказать, что $M \leqslant 0$. Обозначим $\mathscr{E} = \{z \in G: v(z) = M\}$; по теореме 1 это множество открыто, а в силу полунепрерывности v оно также и замкнуто в G. Если оно пусто, то M достигается на ∂G, где $v \leqslant 0$, поэтому $M \leqslant 0$. Если $\mathscr{E}$ непусто, то $\mathscr{E} = G$, и тогда $v \equiv M$ в G, а в силу полунепрерывности $v \equiv M$ и в $\overline{G}$; опять $M \leqslant 0$, ибо $v \leqslant 0$ на ∂G ▶

Функцию h, удовлетворяющую условию (5), будем называть *гармонической мажорантой* функции u для области G.

Теорема 3. *Если субгармоническая в области D функция u в некоторой точке z_0 области $G \Subset D$ совпадает со своей гармонической мажорантой h для G, то $u \equiv h$ в G.*

◀ Функция $v = u - h$ субгармонична и неотрицательна в G; поэтому в каждой точке $z \in G$, где $v = 0$, она достигает локального максимума. Множество $\mathscr{E} = \{z \in G: v(z) = 0\}$ непусто (оно содержит z_0), по теореме 1 оно открыто, а в силу полунепрерывности v в то же время и замкнуто в G. Поэтому $\mathscr{E} = G$ ▶

Следствие. *В условиях теоремы 1 функция и постоянна во всей области D.*

Теорема 4. *Пусть u_α, где индекс α пробегает некоторое множество A, — семейство функций, субгармонических в области D. Если верхняя огибающая семейства, $\tilde{u}(z) = \sup\limits_{\alpha \in A} u_\alpha(z)$ полунепрерывна сверху* [1]*, то она субгармонична в D.*

◀ Нужно проверить лишь условие 2) в определении субгармонической функции. Пусть круг $U \Subset D$, а гармоническая в U и непрерывная в $\overline{U}$ функция $h \geqslant \tilde{u}$ на ∂U. Тогда $h \geqslant u_\alpha$ на ∂U для всех $\alpha \in A$, а так как u_α субгармоничны, то $h \geqslant u_\alpha$ и в U для всех $\alpha \in A$. Отсюда следует, что и $h \geqslant \tilde{u}$ в U ▶

В предыдущем пункте мы доказали, что гармонические функции характеризуются тем, что их значение в каждой точке равно их среднему значению по окружности (или кругу) с центром в этой точке. Приведем аналогичное свойство и для субгармонических функций, конечно, с заменой равенства соответствующим неравенством.

Теорема 5 (критерий субгармоничности). *Для того чтобы полунепрерывная сверху в области D функция u*

[1]) Если множество A конечно, то это условие выполняется автоматически.

была субгармонической в D, необходимо и достаточно существование для каждой точки $z\in D$ такого числа $r_0(z)>0$, что для всех $r<r_0$

$$u(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{it})\,dt. \tag{6}$$

◀ а) Необходимость. Пусть u субгармонична в D, z — произвольная точка D и r_0 — расстояние от z до ∂D. Так как u полунепрерывна сверху, то для любого $r<r_0$ существует сходящаяся к u на окружности $\gamma=\{\zeta\colon |\zeta-z|=r\}$ убывающая последовательность непрерывных на γ функций u_k [1]). Обозначим через h_k гармоническое продолжение u_k в круг $U=\{\zeta\colon |\zeta-z|<r\}$. Так как на $\partial U=\gamma$ имеем $u_{k+1}(\zeta)\leqslant u_k(\zeta)$, то по принципу максимума такое же неравенство имеет место и для гармонических функций h_k в U, т. е. последовательность h_k убывает в U. Поэтому в U определена функция

$$\hat{h}(z)=\lim_{k\to\infty}h_k(z), \tag{7}$$

которая по теореме Харнака (п. 44) либо гармонична в U, либо тождественно равна $-\infty$.

По теореме о среднем для гармонических функций

$$h_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_k(z+re^{it})\,dt;$$

переходя к пределу под знаком интеграла (что законно в силу монотонности), получим, что

$$\hat{h}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{it})\,dt.$$

Если $\hat{h}\equiv-\infty$ в U, то там и $u\equiv-\infty$, т. е. (6) выполняется тривиально. В противном случае из субгармоничности u и неравенств $u\leqslant h_k$ на ∂U заключаем, что $u(z)\leqslant h_k(z)$ для всех $k=1, 2, \ldots$, и в пределе при $k\to\infty$ получаем, что

$$u(z)\leqslant\hat{h}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{it})\,dt.$$

Необходимость критерия доказана.

---

[1]) В качестве таких функций можно, например, взять

$$u_k(\zeta)=\max_{\zeta'\in\gamma}\{u(\zeta')-k|\zeta-\zeta'|\},\qquad k=1, 2, \ldots;$$

представляем читателю доказать, что u_k непрерывны на γ и что $u_k\searrow u_z$

б) Достаточность. Пусть u полунепрерывна сверху в D и удовлетворяет условию (6). Обозначим через h функцию, гармоническую в круге $U \Subset D$, непрерывную в $\overline{U}$ и такую, что $h \geqslant u$ на ∂U. Функция $v = u - h$ полунепрерывна сверху в $\overline{U}$, причем по условию (6) и теореме о среднем для гармонических функций для любой точки $z \in U$ и достаточно малых r

$$u(z) - h(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u(z + re^{it}) - h(z + re^{it})\}\, dt,$$

или

$$v(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + re^{it})\, dt.$$

Полунепрерывности и этого свойства достаточно для того, чтобы для v в круге U было справедливо утверждение теоремы 1. Поэтому если M — наибольшее значение v в $\overline{U}$, то множество $\mathscr{E} = \{z \in U:\ v(z) = M\}$ открыто; в силу полунепрерывности оно и замкнуто в U. Дальнейшее доказательство идет, как в теореме 2: если $\mathscr{E}$ пусто, то M достигается на ∂U и, следовательно $M \leqslant 0$; если $\mathscr{E}$ непусто, то $\mathscr{E} \equiv U$ и опять $M \leqslant 0$ ▶

Функция $\hat{h}$, определяемая в круге U формулой (7), называется *наилучшей гармонической мажорантой* функции u для этого круга.

При помощи этого критерия легко доказывается утверждение, сделанное в начале пункта:

Следствие. *Если функция f голоморфна в области D, то функция $u = \ln|f|$ субгармонична в этой области.*

◀ Полунепрерывность функции u очевидна. Если $z_0 \in D$ не является нулем f, то $\operatorname{Ln} f$ допускает выделение голоморфной ветви в некоторой окрестности z_0; функция $u = \ln|f|$ является действительной частью этой ветви и, следовательно, гармонична в этой окрестности. Критерий (6) выполняется в точке z_0 тогда (со знаком равенства) по теореме о среднем. Если $f(z_0) = 0$, то $u(z_0) = -\infty$ и критерий (6) выполняется в точке z_0 тривиально ▶

В заключение докажем одну теорему о верхнем пределе последовательности субгармонических функций, которая будет нам нужна во второй части и которая выражает свойство равномерности предельного перехода при условии равномерной ограниченности функций последовательности.

Теорема 6 (Хартогс). *Если функции u_k субгармоничны в области D, равномерно ограничены на каждом компактном подмножестве D и в каждой точке $z \in D$*

$$\overline{\lim_{k \to \infty}}\, u_k(z) \leqslant A, \tag{8}$$

то для любого множества $K \Subset D$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* k_0, *такой, что*

$$u_k(z) \leqslant A + \varepsilon \tag{9}$$

для всех $z \in K$ *и всех* $k \geqslant k_0$.

◀ Без ограничения общности можно считать, что функции равномерно ограничены в D, ибо K погружается в область $D' \Subset D$, на которой u_k равномерно ограничены по условию. Можно также считать, что $u_k \leqslant 0$ в D, ибо вместо u_k можно рассматривать функции $u_k - M$, где M — верхняя грань всех u_k в D.

Пусть $K \Subset D$ и расстояние от K до ∂D равно $3r$. Для любой точки $z_0 \in K$ из критерия субгармоничности u_k мы заключаем, что

$$\pi r^2 u_k(z_0) \leqslant \int\int\limits_{\{|\zeta - z_0| < r\}} u_k(\zeta)\, d\sigma^{1}). \tag{10}$$

Воспользуемся теперь леммой Фату[2]), по которой для любой ограниченной последовательности измеримых на множестве E функций u_k: $-\infty \leqslant u_k \leqslant c < \infty$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\int\limits_E u_k\, d\sigma \leqslant \int\int\limits_E \overline{\lim_{k\to\infty}}\, u_k\, d\sigma.$$

По этой лемме в силу (8)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\int\limits_{\{|\zeta - z_0| < r\}} u_k(\zeta)\, d\sigma \leqslant A\pi r^2;$$

следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется k_0 такое, что при всех $k \geqslant k_0$

$$\int\int\limits_{\{|\zeta - z_0| < r\}} u_k(\zeta)\, d\sigma \leqslant \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\pi r^2. \tag{11}$$

Пусть теперь z — любая точка круга $\{|z - z_0| < \delta\}$, где $\delta < r$. Так как круг $\{|\zeta - z| < r + \delta\} \Subset D$, то по свойству субгармоничности

$$\pi(r+\delta)^2 u_k(z) \leqslant \int\int\limits_{\{|\zeta - z| < r+\delta\}} u_k(\zeta)\, d\sigma,$$

---

[1]) Для получения неравенства (10) достаточно умножить обе части (6) на $r\,dr$ и проинтегрировать по r от 0 до r_0 (см. п. 44).

[2]) См., например, В. С. Владимиров, цит. на стр. 248.

а так как этот круг содержит $\{|\zeta-z_0|<r\}$ и у нас $u_k\leqslant 0$, то в силу (11)

$$\pi(r+\delta)^2 u_k(z)\leqslant \iint\limits_{|\zeta-z_0|<r} u_k(\zeta)\,d\sigma\leqslant \pi r^2\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Выбирая δ (при фиксированных A, r и ε) достаточно малым, получим, что для всех $z\in\{|z-z_0|<\delta\}$ и всех $k\geqslant k_0$

$$u_k(z)\leqslant A+\varepsilon.$$

Пользуясь леммой Хейне — Бореля, получаем утверждение теоремы ▶

Заметим, наконец, что наряду с субгармоническими рассматривают также *супергармонические функции* — двумерные аналоги функций, выпуклых вверх. Это — полунепрерывные снизу [1]) в области D функции u: $D\to(-\infty,\infty]$, для которых для любого круга $U\Subset D$ и любой функции h, гармонической в U и непрерывной в $\overline{U}$, неравенство $u\geqslant h$ на ∂U влечет за собой такое же неравенство в U. Изучение таких функций сводится к изучению субгармонических функций, ибо для супергармоничности функции u необходимо и достаточно, чтобы функция $-u$ была субгармонической.

Если всюду заменить гармонические функции двух (действительных) переменных такими же функциями n переменных (см. п. 45), то можно рассматривать субгармонические и супергармонические функции в областях пространства $\mathbb{R}^n$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть дана произвольная последовательность точек $a_n\in\mathbb{C}$, сходящаяся к бесконечности. Доказать, что для любой последовательности чисел $b_n\in\mathbb{C}$ можно найти целую функцию f такую, что $f(a_n)=b_n$ для всех $n=1,2,\ldots$

2. (Теорема Адамара о трех кругах.) Доказать, что если f голоморфна в $\{r_1\leqslant|z|\leqslant r_2\}$ и $M_f(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, то $\ln M_f(r)$ — выпуклая функция от $\rho=\ln r$, т. е. для любого $r\in(r_1,r_2)$

$$\ln M_f(r)\leqslant\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\ln M_f(r_2)+\frac{\rho_2-\rho}{\rho_2-\rho_1}\ln M_f(r_1).$$

(Указание: подобрать α так, чтобы $r_1^\alpha M_f(r_1)=r_2^\alpha M_f(r_2)$ и к многозначной функции $z^\alpha f(z)$ с однозначным модулем применить принцип максимума.)

3. Доказать, что если f — полином степени n, то

$$\frac{M_f(r_1)}{r_1^n}\geqslant\frac{M_f(r_2)}{r_2^n}$$

для любых $0<r_1<r_2$. Равенство имеет место лишь для $f(z)=c_0z^n$.

---

[1]) Функция u называется *полунепрерывной снизу* в точке z_0, если функция $-u$ полунепрерывна сверху в этой точке.

4. Пусть f — целая функция и $\alpha \in (0, 1)$ — фиксированное число. Доказать, что $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{M_f(\alpha r)}{M_f(r)}$ равен 0, если f трансцендентна, и равен α^n, если f — полином степени не выше n.

5. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — целая функция и $M_f(r) \leqslant e^{Ar^m}$ для всех $r \geqslant r_0$; доказать, что $|c_n| \leqslant \left(\dfrac{Aem}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$ для всех достаточно больших n. (Указание: в неравенствах Коши $|c_n| \leqslant \dfrac{M_f(r)}{r^n}$ взять такое r, чтобы оценка была наилучшей; для этого найти минимум правой части по r.)

6. Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — целая функция и $|c_n| \leqslant \left(\dfrac{Aem}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$ для всех $n \geqslant n_0$, то $M_f(r) \leqslant e^{(A+\varepsilon)r^m}$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших r. (Указание: $M_f(r) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{Aem}{n}\right)^{\frac{n}{m}} r^n + P_n(r)$, где полином P_n добавлен, чтобы компенсировать конечное число членов, для которых $n < n_0$. Имеем $|P_n(r)| < e^{\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)r^n}$, а заменяя $\dfrac{n}{m}$ ближайшим целым k, получим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{Aemr^m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \leqslant C \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{Ae}{k} r^m\right)^k$, где C — некоторая константа. По формуле Стирлинга (зад. 4 к гл. IV) $\sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^k \sim k!$, а $\sqrt{2\pi k} < \left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2A}\right)^k$ для достаточно больших k, поэтому оценка продолжается так:

$$C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^m\right]^k}{k!} < e^{(A+\varepsilon) r^m}.\Bigg)$$

7. Из зад. 5 и 6 следует, что порядок целой функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ есть

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln \dfrac{1}{|c_n|}}.$$

Пусть σ — тип функции f; доказать, что

$$(e\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}\right).$$

Построить целую функцию f данного порядка ρ и данного типа σ. (Ответ: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{e\rho\sigma}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} z^n.$)

8. Доказать, что а) не существует голоморфной на $\mathbb{R}^1$ функции, отображающей $\mathbb{R}^1$ на множество с внутренними точками; б) существует целая функция, отображающая $\mathbb{R}^1$ на всюду плотное подмножество $\mathbb{C}$.

9. Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и последовательность ее точек a_n не имеет предельных точек внутри D. Доказать, что для любых последовательностей комплексных чисел b_n и целых чисел $k_n>0$ найдется функция f, голоморфная в D и такая, что для каждого n функция $f(z)-b_n$ в точке a_n имеет нуль порядка k_n.

10. В кольце $\mathscr{K}$ целых функций задана топология равномерной сходимости на ограниченных подмножествах $\mathbb{C}$. Доказать, что для любого собственного замкнутого идеала $I\subset\mathscr{K}$ его остов $\{z\colon f(z)=0$ для всех $f\in I\}$ является непустым множеством без предельных точек в конечной плоскости.

11. Доказать, что для всякого замкнутого идеала $I\subset\mathscr{K}$ найдется функция $g\in I$ такая, что $I=g\mathscr{K}$ (другими словами, идеал I имеет одну образующую).

12. Привести пример функции φ, гармонической в круге $U=\{x^2+y^2<x\}$, непрерывной в $\overline{U}\setminus\{0\}$, равной нулю всюду на $\partial U\setminus\{0\}$ и не равной нулю тождественно. (Пример показывает, что освобождение одной только точки границы от условий может привести к неединственности решения задачи Дирихле. Ответ: $\varphi=1-\operatorname{Re}\frac{1}{z}$.)

13. Если γ — гладкая кривая, а функция μ непрерывна на γ, то действительная функция

$$\varphi(z)=\int\limits_{\gamma}\mu(\zeta)\ln|\zeta-z|\,|d\zeta|$$

называется логарифмическим потенциалом с плотностью μ. Доказать, что а) φ гармонична вне γ; б) если γ — окружность $\{|z|=r\}$ и $\mu\equiv 1$, то φ постоянна в круге $\{|z|<r\}$.

14. Пусть φ гармонична в верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$ и равна нулю всюду на оси x. Доказать, что $\varphi=\alpha y$, где α — неотрицательная константа (ср. с задачей 11 гл. IV).

15. Дано, что $f(z)$ и $zf(z)$ — комплексные гармонические функции (т. е. комплекснозначные функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа). Доказать, что f — голоморфная функция.

16. Если гармонические функции φ_ν положительны в области D и ряд $\Sigma\varphi_\nu$ сходится хотя бы в одной точке $a\in D$, то он сходится равномерно на компактах из D.

17. Пусть φ — действительная функция, гармоническая в замкнутой области $\overline{D}$, за исключением конечного числа точек из D, в которых она равна $-\infty$. Доказать, что $\sup\limits_{D}\varphi=\sup\limits_{\partial D}\varphi$.

18. Доказать, что необходимое и достаточное условие субгармоничности функции $\varphi\in C^2$ выражается неравенством

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\geqslant 0.$$

19. Если функция φ субгармонична, а функция u на $\mathbb{R}^1$ выпукла, то их суперпозиция $u\circ\varphi$ является субгармонической функцией.

20. Доказать, что предел убывающей последовательности субгармонических функций является субгармонической функцией.

21. Пусть f — комплексная гармоническая в области D функция. Доказать, что если $|f|=\text{const}$ в D, то и $f=\text{const}$.

ЧАСТЬ II

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА I

ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пожалуй, главную трудность для начинающего при переходе к изучению функций нескольких комплексных переменных представляет отсутствие простых, наглядных геометрических представлений. Поэтому мы с самого начала отметим особенности комплексного пространства и подробно опишем ряд простейших областей в нем.

§ 1. Комплексное пространство

1. Пространство $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим четномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$, точками которого являются упорядоченные наборы $2n$ действительных чисел $(x_1, \ldots, x_{2n})$. Мы введем в нем комплексную структуру, положив $z_\nu = x_\nu + ix_{n+\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Часто мы будем обозначать $x_{n+\nu} = y_\nu$, так что $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Пространство, точками которого являются упорядоченные наборы n (конечных) комплексных чисел

$$z = (z_1, \ldots, z_n) = \{z_\nu\}, \tag{1}$$

мы будем называть n-мерным *комплексным пространством* и обозначать его символом $\mathbb{C}^n$. В частности, при $n = 1$ мы получаем $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел. Можно считать, что при любом n пространство $\mathbb{C}^n$ является произведением n комплексных плоскостей

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{n \text{ раз}}. \tag{2}$$

Таким образом, точки n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ — это точки $2n$-мерного действительного пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Однако введение комплексной структуры в $\mathbb{R}^{2n}$ сразу вводит в этом пространстве асимметрию — не все координаты в нем равноправны (например, x_1 и x_{n+1} мы объединяем в комплекс z_1, а x_1 и x_2 не объединяем).

Следствием такой асимметрии является, в частности, то, что не все плоскости при переходе от $\mathbb{R}^{2n}$ к $\mathbb{C}^n$ оказываются равноправными. Рассмотрим, например, $2r$-мерную плоскость

$$\Pi^{2r}: \quad \sum_{\nu=1}^{2n} \alpha_{\mu\nu} x_\nu = \beta_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, 2n - 2r), \tag{3}$$

где $\alpha_{\mu\nu}$ и β_μ — действительные постоянные и уравнения независимы, т. е. $\operatorname{rank}(\alpha_{\mu\nu})=2n-2r$. Полагая, как выше, $z_\nu = x_\nu + ix_{n+\nu}$ $(\nu=1, \ldots, n)$, будем иметь

$$x_\nu = \frac{z_\nu + \bar{z}_\nu}{2}, \qquad x_{n+\nu} = \frac{z_\nu - \bar{z}_\nu}{2i} \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

и поэтому мы сможем переписать уравнение этой плоскости в виде

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\mu\nu} z_\nu + a'_{\mu\nu} \bar{z}_\nu) = b_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n-r,) \tag{4}$$

где $a_{\mu\nu}$, $a'_{\mu\nu}$ и b_μ — комплексные постоянные [1]).

Среди всех таких плоскостей выделим те, в уравнения которых не входят переменные $\bar{z}_\nu$; такие плоскости будем называть (комплексно) r-мерными *аналитическими плоскостями*. Следовательно, по определению уравнением r-мерной аналитической плоскости будет

$$A^r: \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} z_\nu = b_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n-r). \tag{5}$$

Только аналитические плоскости будут «настоящими» плоскостями пространства $\mathbb{C}^n$, другие плоскости из $\mathbb{R}^{2n}$ (в частности, все нечетномерные плоскости) не следует считать плоскостями из $\mathbb{C}^n$. Например, в $\mathbb{C}^2$ множество точек, описываемое уравнением $z_1 = x_1 + ix_3 = 0$ (т. е. двумерная плоскость $\{x_1=0, x_3=0\}$ из $\mathbb{R}^4$), считается плоскостью, а множество $x_1 + ix_2 = 0$ (т. е. двумерная плоскость $\{x_1=0, x_2=0\}$ из $\mathbb{R}^4$) не считается.

Комплексно $(n-1)$-мерные аналитические плоскости $z_\nu = 0$ мы будем называть *координатными плоскостями*. Комплексно одномерные аналитические плоскости называются еще *аналитическими прямыми*. Аналитические прямые, проходящие через заданную точку $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in \mathbb{C}^n$, можно записать уравнениями

$$L: \quad \frac{z_1 - z_1^0}{\omega_1} = \ldots = \frac{z_n - z_n^0}{\omega_n}, \tag{6}$$

где $\omega_\nu \in \mathbb{C}$ — некоторые постоянные (не все равные 0). Обозначая общую величину отношений в (6) через ζ, мы можем переписать уравнение аналитической прямой в параметрической форме:

$$L: \quad z_\nu = z_\nu^0 + \omega_\nu \zeta \qquad (\zeta \in \mathbb{C};\ \nu = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

[1]) Чтобы перейти от системы (3) к (4), мы сложили μ-е уравнение (3) с $(n-r+\mu)$-м, умноженным на i, и сгруппировали коэффициенты при z_ν и $\bar{z}_\nu$.

В $\mathbb{C}^n$ естественно вводится структура *векторного пространства*: под суммой векторов $z'=\{z'_\nu\}$ и $z''=\{z''_\nu\}$ понимается вектор $z'+z''=\{z'_\nu+z''_\nu\}$, и под произведением вектора $z=\{z_\nu\}$ на число $\lambda\in\mathbb{C}$ — вектор $\lambda z=\{\lambda z_\nu\}$.

Пользуясь этими операциями, мы можем записать уравнения аналитической прямой в векторной форме:

$$L:\quad z=z^0+\omega\zeta, \tag{8}$$

где $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)\in\mathbb{C}^n$ — направляющий вектор прямой, а $\zeta\in\mathbb{C}$ — параметр. Таким образом, аналитическая прямая — это линейная вектор-функция комплексного переменного ζ со значениями в комплексном пространстве (L: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$).

В $\mathbb{C}^n$ можно ввести структуру *метрического пространства*. Обычно рассматривают две метрики: евклидову метрику $e(z', z'')$, или

$$|z'-z''|=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|z'_\nu-z''_\nu|^2}=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{2n}(x'_\nu-x''_\nu)^2}, \tag{9}$$

и еще одну метрику —

$$\rho(z',\ z'')=\max_\nu|z'_\nu-z''_\nu|, \tag{10}$$

которую мы будем называть ρ-*метрикой*. Очевидно, что ρ-метрика, как и евклидова, удовлетворяет обычным аксиомам:

а) $\rho(z',\ z'')=\rho(z'',\ z')$ — аксиома симметрии;

б) $\rho(z',\ z'')>0$ при $z'\neq z''$, $\rho(z,\ z)=0$;

в) $\rho(z',\ z''')\leqslant\rho(z',\ z'')+\rho(z'',\ z''')$ — аксиома треугольника.

В соответствии с этими метриками в $\mathbb{C}^n$ вводятся и топологии[1]). Это делается указанием системы окрестностей: в евклидовой метрике под ε-окрестностью точки z^0 понимается *шар*:

$$B(z^0,\ \varepsilon)=\{z\in\mathbb{C}^n:\ \ |z-z^0|<\varepsilon\}, \tag{11}$$

а в ρ-метрике — *поликруг* (или *полицилиндр*):

$$U(z^0,\ \varepsilon)=\{z\in\mathbb{C}^n:\ \rho(z,\ z^0)<\varepsilon\}. \tag{12}$$

Очевидное двойное неравенство

$$\rho(z',\ z'')\leqslant|z'-z''|\leqslant\sqrt{n}\,\rho(z',\ z'') \tag{13}$$

показывает, что метрики (9) и (10) вводят в $\mathbb{C}^n$ эквивалентные топологии.

В заключение этого пункта опишем коротко *компактификацию* пространства $\mathbb{C}^n$, т. е. пополнение его бесконечными

[1]) Подробнее об этом см. начало следующей главы (п. 9).

элементами. Наиболее простой способ компактификации приводит к так называемому *пространству теории функций* $\overline{\mathbb{C}}^n$. Мы уже говорили, что $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как произведение n комплексных плоскостей $\mathbb{C}$. Но плоскость $\mathbb{C}$ присоединением бесконечной точки пополняется до замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, гомеоморфной сфере (п. 1 ч. I). Естественно поэтому пополнить $\mathbb{C}^n$ до произведения n замкнутых плоскостей (сфер) — так мы и приходим к пространству теории функций

$$\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{\overline{\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{C}}}_{n \text{ раз}}. \tag{14}$$

Таким образом, по определению точками $\overline{\mathbb{C}}^n$ являются упорядоченные наборы из n точек, принадлежащих замкнутым плоскостям $\overline{\mathbb{C}}$. Бесконечными (несобственными) точками будут те точки, хотя бы одна координата которых является бесконечной. Множество всех бесконечных точек $\overline{\mathbb{C}}^n$ естественным образом разбивается на n множеств $M^\nu = \{z \in \overline{\mathbb{C}}^n\colon z_\nu = \infty,\ z_\mu \in \overline{\mathbb{C}},\ \mu \neq \nu\}$. Точки из M^ν имеют, следовательно, вид $(z_1, \ldots, z_{\nu-1}, \infty, z_{\nu+1}, \ldots, z_n)$, где z_μ $(\mu \neq \nu)$ — конечные или бесконечные комплексные числа. Каждое M^ν, а значит и множество всех бесконечных точек $\overline{\mathbb{C}}^n$, имеет комплексную размерность $n-1$. Все M^ν пересекаются в точке $(\infty, \ldots, \infty)$.

Топология в $\overline{\mathbb{C}}^n$ вводится, как в произведении пространств: под окрестностью точки $z^0 = \{z_\nu^0\} \in \overline{\mathbb{C}}^n$ понимается произведение окрестностей точек z_ν^0 в замкнутых плоскостях переменных z_ν. В этой топологии пространство $\overline{\mathbb{C}}^n$ оказывается компактным: из каждой последовательности точек $z^\mu \in \overline{\mathbb{C}}^n$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $z^0 \in \overline{\mathbb{C}}^n$ [1]).

Другой способ компактификации $\mathbb{C}^n$ приводит к так называемому *комплексному проективному пространству* $\mathbb{P}^n$. Введем в пространстве $\mathbb{C}^n$ *однородные координаты* $(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$, положив

$$z_\nu = \frac{\omega_\nu}{\omega_{n+1}} \qquad \left(\nu = 1, \ldots, n,\ |\omega| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n+1} |\omega_\nu|^2} \neq 0\right). \tag{15}$$

Однородные координаты точки $z \in \mathbb{C}^n$ определяются с точностью до множителя пропорциональности (т. е. наряду с $(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$

---

[1]) Компактность $\overline{\mathbb{C}}^n$ доказывается совсем просто. Можно также воспользоваться тем, что $\overline{\mathbb{C}}^n$ является произведением компактных множеств — замкнутых сфер.

координатами точки z будут и $(\lambda\omega_1, \ldots, \lambda\omega_{n+1})$, где $\lambda\neq 0$ — любое комплексное число). Обратно, любому набору однородных координат $(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$, где $\omega_{n+1}\neq 0$, по формулам (15) соответствует точка $z\in\mathbb{C}^n$ (причем координатам с разными отношениями (15) соответствуют различные точки). Чтобы устранить особое положение последней однородной координаты ω_{n+1}, мы пополним $\mathbb{C}^n$ несобственными (бесконечными) точками, и тогда любым наборам однородных координат $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$, $|\omega|\neq 0$, будут соответствовать точки некоторого пространства $\mathbb{P}^n$, которое и называется комплексным проективным пространством. Точкам $\mathbb{P}^n$, для которых $\omega_{n+1}\neq 0$, по формулам (15) соответствуют точки $z\in\mathbb{C}^n$, поэтому $\mathbb{P}^n$ действительно пополняет $\mathbb{C}^n$. Точкам ω, для которых $\omega_{n+1}=0$, отвечают бесконечные (несобственные) точки.

Точнее, точками $\mathbb{P}^n$ служат не сами наборы $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$, $|\omega|\neq 0$, а классы эквивалентных наборов, если считать два набора ω' и ω'' эквивалентными, когда координаты ω'_ν и ω''_ν пропорциональны $(\omega''_\nu=\lambda\omega'_\nu,\ \lambda\neq 0)$. В самом деле, любому представителю такого класса эквивалентности (для которого $\omega_{n+1}\neq 0$) мы ставим в соответствие одну точку $z\in\mathbb{C}^n$, причем представителям различных классов эквивалентности сопоставляются различные точки. Такие классы эквивалентности можно наглядно представить при помощи аналитических прямых в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Действительно, эквивалентные наборы $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$, $|\omega|\neq 0$, характеризуют аналитическую прямую в $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\frac{z_1}{\omega_1}=\ldots=\frac{z_{n+1}}{\omega_{n+1}}, \tag{16}$$

проходящую через начало координат (замена ω любым $\lambda\omega$, $\lambda\neq 0$, не меняет прямой; неэквивалентные ω определяют различные прямые). Поэтому и точки из $\mathbb{P}^n$ лучше представлять как такие прямые. В частности, любая аналитическая прямая (16), для которой $\omega_{n+1}=0$, представляет бесконечную точку.

Хорошо известна модель проективной плоскости, которая получается из сферы в $\mathbb{R}^3$ отождествлением диаметрально противоположных точек (пересечения сферы с прямыми из $\mathbb{R}^3$, изображающими точки проективной плоскости). Точно так же можно представлять при помощи сферы из $\mathbb{R}^{n+1}$ и действительное n-мерное проективное пространство. Мы опишем вкратце соответствующую модель для $\mathbb{P}^n$.

Так как каждая аналитическая прямая из $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящая через начало, вполне характеризуется единичным вектором $\omega^0=\frac{\omega}{|\omega|}$, то $\mathbb{P}^n$ можно представлять как множество точек сферы $S=\{|z|=1\}$ из $\mathbb{C}^{n+1}$. При этом, однако, следует отождествить

точки пересечения S с аналитической прямой, изображающей точку $\mathbb{P}^n$. Пусть такая прямая L задается параметрическими уравнениями $z_\nu = \omega_\nu^0 \zeta$ $(\nu = 1, \ldots, n+1, |\omega^0| = 1)$; так как уравнением сферы S служит $\sum_{\nu=1}^{n+1} z_\nu \bar{z}_\nu = 1$, то для точек пересечения L и S будем иметь $|\zeta|^2 \sum_{\nu=1}^{n+1} |\omega_\nu^0|^2 = 1$, или $|\zeta| = 1$. Отсюда видно, что L и S пересекаются по одномерному множеству — окружности $\{|\zeta| = 1\}$, лежащей на (двумерной) аналитической прямой и на $(2n+1)$-мерной сфере. Таким образом, точки $\mathbb{P}^n$ можно еще представлять как окружности на единичной сфере $S \subset \mathbb{C}^{n+1}$ (это находится в соответствии с тем, что $\mathbb{P}^n$ имеет действительную размерность $2n$). В частности, окружности, которые получаются в пересечении S с прямыми L, для которых $\omega_{n+1} = 0$, представляют бесконечные точки.

В пространстве $\mathbb{P}^n$ можно ввести топологию, объявляя «близкими» те прямые L, которые определяются «близкими» единичными векторами ω^0 (или те окружности на S, которые получаются при ее пересечении с «близкими» прямыми). В этой топологии $\mathbb{P}^n$ оказывается компактным пространством.

2. Простейшие области. Здесь мы опишем некоторые простейшие примеры областей в пространстве $\mathbb{C}^n$. Под областью, как всегда, понимается открытое связное множество, причем открытость множества означает, что каждая точка принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью, а связность открытого множества означает возможность связать каждые две его точки z' и z'' путем $z(t)\colon I \to \mathbb{C}^n$, где $I = [0, 1]$ — отрезок действительной оси, $z(t)$ — непрерывная функция, $z(0) = z'$, $z(1) = z''$, причем для любого $t \in I$ точка $z(t)$ принадлежит этому множеству.

1. Ш а р радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{C}^n$ определяется как множество точек

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z - a| < r\}. \tag{1}$$

Это — шар с центром a в евклидовой метрике. Границей шара ∂B служит $(2n-1)$-мерная сфера

$$S^{2n-1} = \left\{z \in \mathbb{C}^n\colon \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - a_\nu|^2 = r^2\right\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$.

2. П о л и к р у г (или п о л и ц и л и н д р) радиуса r с центром $a \in \mathbb{C}^n$ определяется как множество точек

$$U(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_\nu - a_\nu| < r,\ \nu = 1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Это — шар с центром a в метрике ρ. Он представляет собой произведение n плоских кругов радиуса r с центрами в точках a_ν. Можно рассматривать и более общий случай поликруга с центром a и векторным радиусом $r=(r_1, \ldots, r_n)$:

$$U(a,\ r)=\{z\in\mathbb{C}^n:\ \ |z_\nu-a_\nu|<r_\nu,\ \ \nu=1,\ \ldots,\ n\}. \qquad (3)$$

Границей ∂U поликруга является множество всех точек, у которых хотя бы одна координата z_ν принадлежит границе ν-го круга, образующего U, а остальные координаты z_μ $(\mu\neq\nu)$ произвольно меняются в замкнутых кругах. Эта граница естественным образом разбивается на n множеств

$$\Gamma^\nu=\{z:\ \ |z_\nu-a_\nu|=r_\nu,\ |z_\mu-a_\mu|\leqslant r_\mu,\ \mu\neq\nu\},$$

каждое из которых представляет $(2n-1)$-мерное образование (ибо $2n$ координат точки z связаны одним действительным соотношением $|z_\nu-a_\nu|=r_\nu$). Поэтому и вся граница поликруга $\partial U=\bigcup_{\nu=1}^{n}\Gamma^\nu$ является $(2n-1)$-мерной. Все множества Γ^ν пересекаются по n-мерному множеству

$$\Gamma=\{z:\ |z_\nu-a_\nu|=r_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\},$$

которое называется *остовом* поликруга и представляет собой произведение n окружностей.

Опишем подробнее бикруг радиуса 1 с центром в начале:

$$U=\{z\in\mathbb{C}^2:\ \ |z_1|<1,\ \ |z_2|<1\}.$$

Это четырехмерное тело является пересечением двух цилиндров:

$$x_1^2+x_3^2<1 \quad \text{и} \quad x_2^2+x_4^2<1.$$

Граница его — трехмерное тело $\partial U=\Gamma^1\cup\Gamma^2$, где $\Gamma^1=\{|z_1|=1,\ |z_2|\leqslant 1\}$ — также трехмерное тело, которое расслаивается в однопараметрическое семейство кругов: $\Gamma^1=\bigcup_{\theta=0}^{2\pi}\{z_1=e^{i\theta},\ |z_2|\leqslant 1\}$, и Γ^2 — аналогичное тело. Остов бикруга $\Gamma=\Gamma^1\cap\Gamma^2$ двумерен. Это — тор $\Gamma=\{|z_1|=1,\ \ |z_2|=1\}$; в самом деле, отображение $z_1=e^{i\theta_1}$, $z_2=e^{i\theta_2}$ гомеоморфно преобразует на Γ квадрат $\{0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi\}$ с отождествленными, как указано на рис. 75, противоположными сторонами (ибо $e^{i(\theta_\nu+2\pi)}=e^{i\theta_\nu}$), а такое отождествление дает тор. Тор Γ расслаивается на однопараметрические семейства окружностей $\{z_1=e^{i\theta_1},\ |z_2|=1\}$ и $\{|z_1|=1,\ z_2=e^{i\theta_2}\}$, $0\leqslant\theta_1,\ \theta_2<2\pi$ (на рис. 75 изображено по одному представителю каждого семейства). Он служит пересечением

двух трехмерных цилиндров $\{x_1^2+x_3^2=1\}$ и $\{x_2^2+x_4^2=1\}$ и, очевидно, лежит в $\mathbb{R}^4$ на (трехмерной) сфере $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2\}$.

Таким образом, бикруг геометрически следует представлять так. Нужно взять в $\mathbb{C}^2$ (трехмерную) сферу $\{|z|=\sqrt{2}\}$ и на ней выбрать тор $\Gamma=\{|z_1|=1,\ |z_2|=1\}$. На этот тор нужно натянуть два трехмерных тела $\Gamma^1=\{|z_1|=1,\ |z_2|\leqslant 1\}$ и $\Gamma^2=\{|z_1|\leqslant 1,\ |z_2|=1\}$, лежащих в шаровом слое $\{1\leqslant|z|\leqslant\sqrt{2}\}$; их совокупность $\Gamma^1\cup\Gamma^2$ и будет ограничивать бикруг.

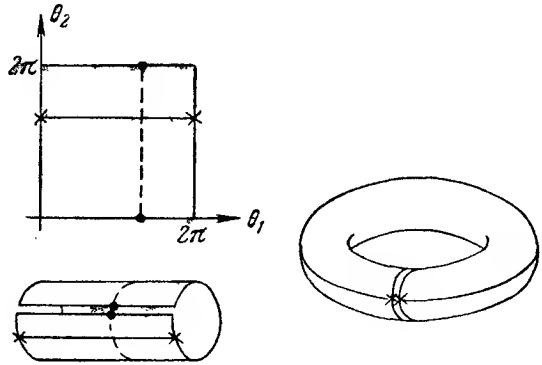


Рис. 75.

3. Поликруговые (или полицилиндрические) области в $\mathbb{C}^n$ определяются как произведения n плоских областей:

$$D=D_1\times\ldots\times D_n \tag{4}$$

(поликруги являются частными случаями таких областей). Если все D_ν — односвязные области, то D гомеоморфна шару. Граница ∂D поликруговой области D разбивается на n множеств размерности $(2n-1)$:

$$\Gamma^\nu=\{z:\ \ z_\nu\in\partial D_\nu,\ \ z_\mu\in\overline{D}_\mu,\ \mu\neq\nu\}.$$

Общей частью всех Γ^ν является n-мерное множество

$$\Gamma=\{z:\ \ z_\nu\in\partial D_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\},$$

которое называется *остовом* поликруговой области D.

4. Области Рейнхарта (или n-круговые области) с центром в точке $a\in\mathbb{C}^n$ определяются как области, обладающие следующим свойством: вместе с каждой точкой $z^0=\{z_\nu^0\}$ области

принадлежит и любая точка

$$z = \{a_\nu + (z_\nu^0 - a_\nu) e^{i\theta_\nu}\}, \quad 0 < \theta_\nu < 2\pi.$$

Область Рейнхарта с центром в a называется *полной*, если вместе с каждой точкой z^0 ей принадлежат и все точки $z = \{z_\nu\}$, для которых $|z_\nu - a_\nu| \leqslant |z_\nu^0 - a_\nu|$, $\nu = 1, \ldots, n$.

Очевидно, что шары и поликруги являются полными областями Рейнхарта. При $n=1$ неполными областями Рейнхарта будут кольца $\{r < |z-a| < R\}$, а полными областями — круги $\{|z-a| < R\}$.

Без ограничения общности можно считать, что центр области Рейнхарта $a=0$ (это достигается сдвигом). Такая область вместе с каждой точкой $\{z_\nu\}$ содержит все точки с теми же $|z_\nu|$,

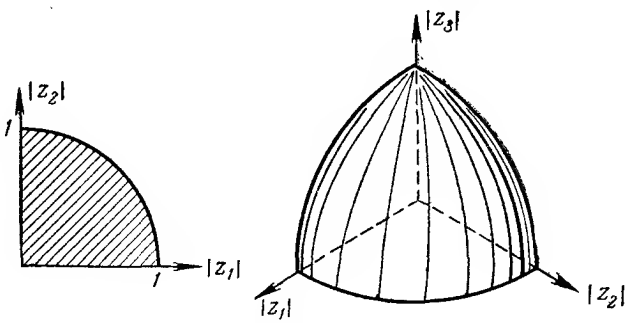


Рис. 76.

$\nu = 1, \ldots, n$, и всевозможными аргументами. Учитывая это замечание, мы можем рассмотреть отображение

$$z \to \alpha(z) = (|z_1|, \ldots, |z_n|) \tag{5}$$

$2n$-мерного пространства $\mathbb{C}^n$ в n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, точнее, в так называемый *абсолютный октант* $\mathbb{R}_+^n = \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \ldots \times \mathbb{R}_+}_{n \text{ раз}}$, где $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ — полуось неотрицательных чисел. Это отображение $\alpha\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+^n$ преобразует область Рейнхарта D во множество точек $D_+ \subset \mathbb{R}_+^n$, которое мы будем называть изображением (или диаграммой) по Рейнхарту области D. Если D — полная область Рейнхарта, то D_+ вместе с каждой точкой $\{|z_\nu^0|\}$ содержит весь прямоугольный параллелепипед $\{|z_\nu| \leqslant |z_\nu^0|, \nu = 1, \ldots, n\}$.

Описанная диаграмма полностью характеризует области Рейнхарта, а понижение размерности на n единиц для $n=2$ и $n=3$ делает это изображение наглядным. На рис. 76 и

77 изображены соответственно диаграммы Рейнхарта шара $\{|z|<1\}$ и поликруга $\{|z_\nu|<1\}$ для $n=2$ и 3; на втором из них показаны множества Γ^ν и остов Γ.

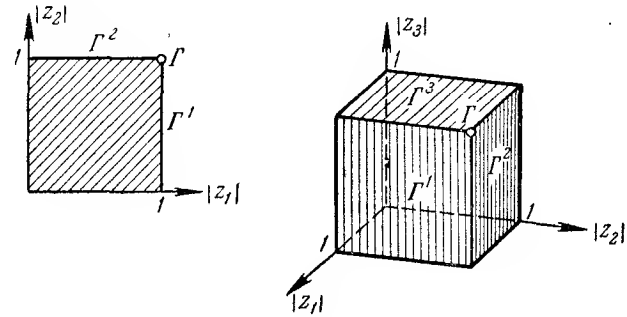


Рис. 77.

5. Области Хартогса (или полукруговые области) с плоскостью симметрии $\{z_n=a_n\}$ определяются как области, обладающие следующим свойством: вместе с каждой точкой $z^0=\{z_\nu^0\}$ области принадлежит и любая точка $z=(z_1^0, \ldots, z_{n-1}^0, a_n+(z_n^0-a_n)e^{i\theta_n})$, $0<\theta_n<2\pi$. Область Хартогса называется *полной*, если вместе с каждой точкой z^0 ей принадлежат и все точки z, для которых $z_\nu=z_\nu^0$ $(\nu=1, \ldots, n-1)$, а $|z_n-a_n|\leqslant|z_n^0-a_n|$. Очевидно, что области Хартогса составляют более широкий класс, чем области Рейнхарта [1]).

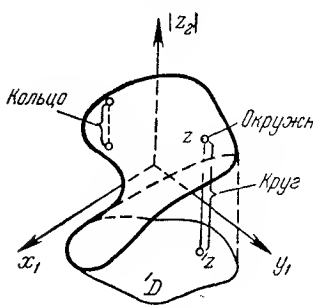


Рис. 78.

Области Хартогса с плоскостью симметрии $\{z_n=0\}$ можно изображать в пространстве размерности $(2n-1)$, если воспользоваться преобразованием β: $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$, определяемым формулой

$$z\to\beta(z)=\{z_1, \ldots, z_{n-1}, |z_n|\}. \quad (6)$$

Для краткости письма обозначим через $'z=(z_1, \ldots, z_{n-1})$ проекцию точки z в пространство $\mathbb{C}^{n-1}$ и через $'D$ проекцию D в $\mathbb{C}^{n-1}$ (т. е. совокупность всех $'z$ для $z\in D$). Изображение полной об-

[1]) Термин «полукруговые области» относится к начальному периоду, когда теория функций нескольких комплексных переменных была в основном теорией функций двух переменных. Такие области обладают «круговым свойством» по одному переменному, т. е. половине всех переменных в $\mathbb{C}^2$.

ласти Хартогса вместе с каждой точкой $('z^0, |z_n^0|)$ содержит весь отрезок $\{('z^0, |z_n|): |z_n| \leqslant |z_n^0|\}$.

Диаграмма Хартогса понижает размерность на 1 и при $n=2$ является вполне наглядной. На рис. 78 изображена неполная область Хартогса; следует иметь в виду, что точка на этой диаграмме изображает окружность, а вертикальный отрезок, опирающийся на $'D$, — круг. На рис. 79 изображены шар из $\mathbb{C}^2$ и

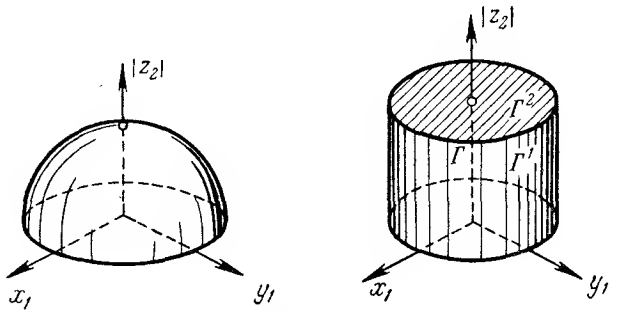


Рис. 79.

бикруг; на рисунке хорошо видны трехмерные куски границы Γ^1 и Γ^2 и остов Γ бикруга.

6. Трубчатые (или цилиндрические) области определяются как области, обладающие следующим свойством: вместе с каждой точкой $z^0 = \{z_\nu^0\}$ области принадлежит и любая точка $z = \{z_\nu^0 + iy_\nu\}$, $-\infty < y_\nu < \infty$, $\nu = 1, \ldots, n$. Любую трубчатую область можно представить в виде произведения $B \times \mathbb{R}^n(y)$, где B — так называемое *основание* области — некоторая область n-мерного действительного пространства $\mathbb{R}^n(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а $\mathbb{R}^n(y)$ — действительное пространство точек $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Таким образом, трубчатая область полностью характеризуется ее основанием B — областью n-мерного действительного пространства.

Положив $z = x + iy$, где x и y — действительные n-мерные векторы, трубчатую область можно символически записать в виде $T = B + i\mathbb{R}^n(y)$ или, подробнее, $T = \{x + iy: x \in B, y \in \mathbb{R}^n\}$. При $n=1$ трубчатыми областями будут, очевидно, полосы $\{\alpha < x < \beta, -\infty < y < \infty\}$, а также полуплоскости $\{x > \alpha\}$ или $\{x < \alpha\}$.

Заметим, что отображение φ: $z_\nu \to e^{z_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ преобразует трубчатую область T в некоторую область Рейнхарта D. При этом основанию области B соответствует D_+ — изображение D на диаграмме Рейнхарта.

7. Полутрубчатые области составляют более широкий класс областей, чем трубчатые. Это области, которые вместе с

каждой точкой $\{'z^0, z_n^0\}$ содержат все точки $\{'z^0, z_n^0 + iy_n\}$, $-\infty < y_n < \infty$. Иными словами, полутрубчатая область D — это область вида $G + i\mathbb{R}^1(y_n)$, где G — область в $(2n-1)$-мерном пространстве $\mathbb{C}^{n-1}('z) \times \mathbb{R}^1(x_n)$. Подробнее:

$$D = \{('z, z_n) \in \mathbb{C}^n: \quad ('z, x_n) \in G, \ y_n \in \mathbb{R}^1\}.$$

§ 2. Понятие голоморфности

3. Определение голоморфности. Пусть в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}^n$ задана комплексная функция f: $D \to \overline{\mathbb{C}}$. Пользуясь понятиями окрестности, введенными в пространстве теории функций $\overline{\mathbb{C}}^n$ и замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, мы обычным образом определяем понятия предела и непрерывности f в точке $z^0 \in D$ и в области D (см. п. 3 ч. I).

Чтобы ввести дальнейшие ограничения на функцию f, предположим, что D состоит из конечных точек ($D \subset \mathbb{C}^n$) и что f принимает в D лишь конечные значения (f: $D \to \mathbb{C}$). Предположим, что f дифференцируема в точке $z \in D$ в смысле действительного анализа (в смысле $\mathbb{R}^{2n}$), т. е. что существует дифференциал [1])

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} dx_{2n}. \tag{1}$$

Введя комплексные переменные z_ν и $\bar{z}_\nu$ по формулам

$$x_\nu = \frac{z_\nu + \bar{z}_\nu}{2}, \qquad x_{n+\nu} = \frac{z_\nu - \bar{z}_\nu}{2i}, \tag{2}$$

мы можем формально переписать (1) в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} d\bar{z}_n, \tag{3}$$

где положено для $\nu = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} - i\frac{\partial f}{\partial x_{n+\nu}}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + i\frac{\partial f}{\partial x_{n+\nu}}\right). \tag{4}$$

Определение 1. Функция f, определенная в некоторой окрестности точки $z \in \mathbb{C}^n$, называется *дифференцируемой* в этой точке в смысле комплексного анализа (в смысле $\mathbb{C}^n$), если она дифференцируема в ней в смысле $\mathbb{R}^{2n}$ и в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

---

[1]) Как и в случае одного переменного, мы считаем $f = u + iv$ и под df и $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ понимаем соответственно $du + i\,dv$ и $\frac{\partial u}{\partial x_\nu} + i\frac{\partial v}{\partial x_\nu}$.

т. е. дифференциал имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n. \tag{6}$$

Заметим, что условия (5) комплексной дифференцируемости содержат $2n$ действительных уравнений относительно двух действительных функций ($u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$). Таким образом, при $n > 1$ эта система дифференциальных уравнений переопределена: число уравнений в ней больше числа рассматриваемых функций. С некоторых точек зрения в качестве пространственного аналога комплексной функции одного комплексного переменного естественнее рассматривать не одну, а n комплексных функций от комплексных переменных, т. е. вектор-функцию $f = (f_1, \ldots, f_n)$ вектора $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Однако и это не спасает положения: записывая условия (5) для каждой компоненты f_ν, мы получим систему $2n^2$ действительных уравнений относительно $2n$ действительных функций, т. е. систему, также переопределенную при $n > 1$.

Переопределенность условий комплексной дифференцируемости функций нескольких переменных влечет за собой ряд принципиальных отличий пространственной теории от плоской; с некоторыми из них мы познакомимся в дальнейшем изложении. Отметим, что переопределенные системы играют важную роль в теории уравнений с частными производными и что система (5) является одним из основных примеров таких систем.

Определение 2. Функция, дифференцируемая в смысле $\mathbb{C}^n$ в каждой точке некоторой окрестности точки $z^0 \in \mathbb{C}^n$, называется *голоморфной в точке* z^0. Функция, голоморфная в каждой точке некоторого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (в частности, области), называется *голоморфной на множестве* Ω.

Заметим, что при определении понятия голоморфности на произвольном (не обязательно открытом) множестве M имеется тонкость, которая видна из следующего примера.

Пример. Пусть множество $M \subset \mathbb{C}^2$ состоит из двух замкнутых шаров $\bar{B}_1 = \left\{|z - (0, 1)| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ и $\bar{B}_2 = \left\{|z + (0, 1)| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, соединенных отрезком $L = \left\{z_1 = 0,\ z_2 = x_2,\ |x_2| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$. Определим на M функцию

$$f(z) = \begin{cases} z_1, & z \in \bar{B}_1, \\ 0, & z \in L, \\ -z_1, & z \in \bar{B}_2. \end{cases} \tag{7}$$

Она, очевидно, непрерывна на M, и для каждой точки $z^0 \in M$ можно построить окрестность U_{z^0}, в которую f продолжается,

как голоморфная функция. В самом деле, для точек $\overline{B}_1$, включая точку $(0, \frac{1}{2})$ пересечения $\overline{B}_1$ и L, в качестве таких окрестностей можно взять шары, не пересекающиеся с $\overline{B}_2$, и продолжить в них f, положив ее равной z_1. Для точек $\overline{B}_2$ сделаем аналогичное построение, только положим $f(z) = -z_1$. Наконец, для внутренних точек L возьмем шары, не содержащие концов этого отрезка, и положим в них $f=0$. Однако из теоремы единственности, которую мы докажем в п. 6, следует, что f нельзя продолжить до голоморфной функции ни в какую связную окрестность Ω всего множества M. В самом деле, из этой теоремы следует, что не существует голоморфной в Ω функции, которая на одном шаре из Ω равна z_1, а в другом $-z_1$.

Из этого примера видно, что необходимо различать *локально голоморфные* на множестве функции, которые в каждой точке множества можно локально продолжить до голоморфной функции, и функции *глобально голоморфные*, которые продолжаются до функций, голоморфных в окрестности всего множества. В дальнейшем, говоря о голоморфности функции на множестве, мы, как правило, будем иметь в виду глобальную голоморфность.

Очевидно, сумма и произведение двух функций, дифференцируемых (в смысле $\mathbb{C}^n$) в некоторой точке z, также дифференцируемы в этой точке, поэтому дифференцируемые в точке функции образуют кольцо. В частности, функции, голоморфные в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$, образуют кольцо, которое мы будем обозначать символом $H(D)$.

Справедливо также правило дифференцирования сложных функций, которое мы сформулируем в следующих двух видах. Пусть функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}^n$ в точке $z^0 = \{z_\nu^0\}$, а $w^0 = f(z^0)$.

(I) Если функция φ дифференцируема в w^0 в смысле $\mathbb{C}$, то $\varphi \circ f$ дифференцируема в смысле $\mathbb{C}^n$ в точке z^0.

(II) Если функции φ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ дифференцируемы в смысле $\mathbb{C}^m$ в точке ζ^0, причем $\varphi_\nu(\zeta^0) = z_\nu^0$, то функция $f \circ \varphi = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ дифференцируема в смысле $\mathbb{C}^m$ в точке ζ^0.

В частности, пусть f голоморфна в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$ и $z = L(\zeta)$ — аналитическая прямая, пересекающаяся с D (т. е. совокупность линейных функций $z_\nu = z_\nu^0 + \omega_\nu \zeta$, $\nu = 1, \ldots, n$, переменного $\zeta \in \mathbb{C}$ таких, что хотя бы одно значение $z \in D$). Тогда сужение f на эту прямую (т. е. сложная функция $f \circ L(\zeta)$) голоморфно, как функция одного комплексного переменного на том открытом множестве плоскости ζ, которое попадает в D при отображении L.

Еще более частный случай мы получим, если рассмотрим аналитические прямые, «параллельные ν-й оси», т. е. прямые

$z_\nu = \zeta$, $z_\mu = z_\mu^0$ $(\mu \neq \nu)$. Для этого случая сделанное только что утверждение означает, что если f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$, то функция $f(z_1^0, \ldots, z_{\nu-1}^0, \zeta, z_{\nu+1}^0, \ldots, z_n^0)$ будет голоморфной, как функция одного комплексного переменного, на соответствующем открытом множестве плоскости ζ. Иными словами, функция, голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}^n$, является голоморфной (в смысле $\mathbb{C}$) функцией по каждой координате z_ν в отдельности [1]).

Оказывается, что справедливо и обратное утверждение: если функция f в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$ голоморфна по каждому переменному z_ν в отдельности, то она автоматически будет дифференцируемой в D в смысле $\mathbb{R}^{2n}$ по совокупности переменных и, следовательно, голоморфной в смысле определения 2. Этот важный факт составляет содержание так называемой основной теоремы Хартогса и является далеко не тривиальным. Нетривиальность этой теоремы видна хотя бы из того, что ее действительный аналог неверен. В самом деле, из существования частных производных функции действительных переменных не следует даже непрерывности этой функции. Вот хорошо известный пример: функция $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$, разрывна в начале координат, хотя ее частные производные (всех порядков) всюду существуют. В некотором смысле теорема Хартогса представляет собой аналог утверждения о том, что функция нескольких переменных, которая является многочленом по каждому переменному, будет многочленом и по совокупности переменных (см. задачу 16 в конце главы).

Теорему Хартогса мы докажем в п. 5. Здесь же мы приведем перечень элементарных свойств голоморфных функций нескольких переменных, аналогичных свойствам функций одного переменного. Впрочем, нам удобнее вместо голоморфности рассматривать более общее условие:

(*A*) *Функция f непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}^n$ по совокупности переменных и в каждой точке $z^0 \in D$ голоморфна по каждой координате.*

(Мы сейчас же убедимся, что из этого условия вытекает и дифференцируемость по совокупности переменных, т. е. голоморфность функции. После доказательства теоремы Хартогса станет ясным, что требование непрерывности излишне, ибо оно вытекает из голоморфности по каждому переменному.)

1°. *Если функция f удовлетворяет условию* (A) *в замкнутом поликруге $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C}^n: |z_\nu - a_\nu| \leqslant r_\nu\}$* [2]), *то в каждой точке $z \in U$*

---

[1]) Этот вывод следует также непосредственно из определений 1 и 2.

[2]) Это означает, что f продолжается до функции, удовлетворяющей условию (A) в некотором открытом полукруге, содержащем $\bar{U}$.

она представляется кратным интегралом Коши

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\dots\int\frac{f(\zeta)\,d\zeta_1\dots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\dots(\zeta_n-z_n)}, \tag{8}$$

где Γ *— остов поликруга, т. е. произведение граничных окружностей* $\gamma_\nu=\{|\zeta_\nu-a_\nu|=r_\nu\}$.

◀При любом $'z\in{}'U$, где $'z$ и $'U$ обозначают проекции z и U в пространство $\mathbb{C}^{n-1}$ $(z_1,\dots,z_{n-1})$, функция $f=f('z,z_n)$ голоморфна по z_n в круге $\{|z_n-a_n|\leqslant r_n\}$; следовательно, по интегральной формуле Коши из ч. I

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{f('z,\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}\,d\zeta_n.$$

При любом $\zeta_n\in\gamma_n$ и любом $'z\in{}'U$ функцию, стоящую под знаком интеграла, можно представить интегралом Коши по переменному z_{n-1}, причем в силу непрерывности f по совокупности переменных повторный интеграл можно представить как кратный по произведению $\gamma_{n-1}\times\gamma_n$. Продолжая это рассуждение, мы и придем к (8) ▶

В дальнейшем мы будем записывать формулу (8) в сокращенном виде:

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \tag{9}$$

где будем считать $d\zeta=d\zeta_1\dots d\zeta_n$ и $\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{(\zeta_1-z_1)\dots(\zeta_n-z_n)}$.

Так же как в ч. I, из представления функции интегралом Коши выводится возможность разложения ее в степенной ряд. Для этого разложим ядро интеграла (9) в кратную геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{z_1-a_1}{\zeta_1-a_1}\right)\dots\left(1-\dfrac{z_n-a_n}{\zeta_n-a_n}\right)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{|k|=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k,$$

где $k=(k_1,\dots,k_n)$ — целочисленный вектор, $|k|=k_1+\dots+k_n$, $k_\nu\geqslant 0$ и

$$\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k=\left(\frac{z_1-a_1}{\zeta_1-a_1}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{z_n-a_n}{\zeta_n-a_n}\right)^{k_n}.$$

Разложение это можно переписать в виде

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{|k|=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}},$$

где $k+1=(k_1+1, \ldots, k_n+1)$; при любом $z \in U$ оно сходится абсолютно и равномерно по ζ на Γ. Умножая его на непрерывную (и, следовательно, ограниченную) на Γ функцию $\frac{f(\zeta)}{(2\pi i)^n}$ и интегрируя по Γ почленно, мы и получаем нужное утверждение:

2°. *Если функция f удовлетворяет условию* (А) *в замкнутом поликруге $\bar{U}$, то в каждой точке $z \in U$ она представляется кратным степенным рядом*

$$f(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{10}$$

с коэффициентами

$$c_k=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}, \tag{11}$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — целочисленный вектор ($k_\nu \geqslant 0$) и $(z-a)^k = (z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}$.

3° (Теорема Абеля). *Если степенной ряд* (10) *сходится в какой-либо точке $\zeta \in \mathbb{C}^n$, то на любом множестве $K \Subset \{z: |z_\nu - a_\nu| < |\zeta_\nu - a_\nu|\}$ этот ряд сходится абсолютно и равномерно.*

◀ Из сходимости ряда в точке ζ следует ограниченность его членов в этой точке: $|c_k(\zeta-a)^k| \leqslant M$ для всех $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $k_\nu \geqslant 0$. Обозначим

$$\max_{z\in K}\frac{|z_\nu-a_\nu|}{|\zeta_\nu-a_\nu|}=q_\nu \qquad (0\leqslant q_\nu<1,\ \nu=1, \ldots, n);$$

тогда в любой точке $z \in K$ будет $|c_k(z-a)^k| \leqslant q^k |c_k(\zeta-a)^k| \leqslant Mq^k$, где $q^k = q_1^{k_1}\ldots q_n^{k_n}$. Остается заметить, что кратная прогрессия $\sum Mq^k$ сходится ▶

Так как члены степенного ряда непрерывны по совокупности переменных, а дифференцирование по любому переменному z_ν не нарушает его сходимости, то из 2° и 3° следует

4°. *Если функция f удовлетворяет условию* (А) *в замкнутом поликруге $\bar{U}$, то в каждой точке $z \in U$ она имеет частные производные всех порядков, непрерывные по совокупности переменных.*

В частности, отсюда следует, что любая функция, удовлетворяющая условию (А), дифференцируема по совокупности переменных, т. е. голоморфна, а также что все частные производные голоморфной функции голоморфны.

Обычным образом доказывается теорема единственности разложения функции в степенной ряд с данным центром:

5°. *Если голоморфная в точке a функция f разложена в степенной ряд вида* (10), *то коэффициенты этого ряда определяются по формулам Тейлора*:

$$c_k = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}\Bigg|_{z=a} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}\Bigg|_{z=a}, \tag{12}$$

где $k! = k_1! \dots k_n!$.

Пользуясь формулами (11) для тех же коэффициентов и оценивая входящие в них интегралы, получим

6° (Неравенства Коши). *Если функция f голоморфна в замкнутом поликруге $\overline{U} = \{|z_\nu - a_\nu| \leqslant r_\nu\}$ и $|f| \leqslant M$ на его остове Γ, то коэффициенты тейлоровского разложения f в точке a удовлетворяют неравенствам*

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{r^k}, \tag{13}$$

где $r^k = r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n}$.

В заключение остановимся на понятии голоморфности в бесконечных точках, для чего, как и в теории функций одного переменного, воспользуемся простыми преобразованиями, переводящими бесконечные точки в конечные. Эти преобразования, однако, для пространств $\overline{\mathbb{C}}^n$ и $\mathbb{P}^n$ выбирают по-разному.

В случае пространства теории функций $\overline{\mathbb{C}}^n$ такими преобразованиями служат дробно-линейные преобразования отдельных переменных: функция f называется голоморфной в бесконечной точке $z^0 = (\infty, \dots, \infty, z^0_{m+1}, \dots, z^0_n)$, если функция

$$f\left(\frac{1}{\zeta_1}, \dots, \frac{1}{\zeta_m}, \zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n\right) = \varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

голоморфна в точке $(0, \dots, 0, z^0_{m+1}, \dots, z^0_n) \in \mathbb{C}^n$.

В случае комплексного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ пользуются так называемыми *проективными преобразованиями*, которые в однородных координатах имеют вид

$$\mu_t = \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_{st} \omega_s \qquad (t = 1, \dots, n+1, \ \operatorname{Det}(\alpha_{st}) \neq 0)$$

или в матричной записи

$$\mu = A\omega$$

(здесь $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n+1})$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n+1})$ — векторы, а $A = (\alpha_{st})$ — матрица). Такими преобразованиями бесконечные точки $\mathbb{P}^n$ (для которых $\omega_{n+1} = 0$) можно, очевидно, перевести в конечные ($\mu_{n+1} \neq 0$).

Функциями точек $\mathbb{P}^n$ будут такие функции $f(\omega)$, которые не меняются при замене ω на $\lambda\omega$, где $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, т. е. однородные функции (напомним, что точками $\mathbb{P}^n$ служат классы эквивалентных наборов ω, а не сами эти наборы). Голоморфность функции f в конечной точке $\omega=\{\omega_\nu\}\in\mathbb{P}^n$ понимают как голоморфность в точке $z\in\mathbb{C}^n$, для которой ω_ν служат однородными координатами, т. е. в точке $\left(\frac{\omega_1}{\omega_{n+1}}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}}\right)$. Под голоморфностью f в бесконечной точке из $\mathbb{P}^n$ понимается голоморфность функции $f(A\omega)$ в соответствующей конечной точке (в которую проективное преобразование $\omega\to A\omega$ переводит данную бесконечную).

4. Плюригармонические функции. Здесь мы рассмотрим вкратце действительные и мнимые части голоморфных функций. Начнем с простого замечания: если функция $f=u+iv$ голоморфна в точке $z\in\mathbb{C}^n$, то в окрестности этой точки $\frac{\partial f}{\partial\bar z_\nu}=0$ ($\nu=1, \ldots, n$), и поэтому функция $\bar f=u-iv$ дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^{2n}$ в этой окрестности, и там для любого $\nu=1, \ldots, n$

$$\frac{\partial\bar f}{\partial z_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar f}{\partial x_\nu}-i\,\frac{\partial\bar f}{\partial y_\nu}\right)=\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z_\nu}\right)}=0. \tag{1}$$

Такие функции $\bar f$ мы будем называть *антиголоморфными* в точке z.

Пусть f голоморфна в точке $z\in\mathbb{C}^n$, тогда в силу этого замечания для ее действительной части $u=\frac{1}{2}(f+\bar f)$ в окрестности точки z имеем $\frac{\partial u}{\partial z_\nu}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_\nu}$. Воспользуемся еще тем, что голоморфная функция имеет частные производные всех порядков, непрерывные по совокупности переменных (это будет доказано в п. 5). На этом основании можно утверждать, что существует $\frac{\partial^2 u}{\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu}$ и что можно менять порядок дифференцирования, т. е. $\frac{\partial^2 f}{\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu}=\frac{\partial}{\partial z_\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z_\mu}\right)=0$. Таким образом, для любых $\mu, \nu=1, \ldots, n$ мы имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\bar z_\mu\,\partial z_\nu}=0. \tag{2}$$

Разделив действительные и мнимые части оператора в левой части (2):

$$\frac{\partial}{\partial\bar z_\mu}\,\frac{\partial}{\partial z_\nu}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}+\frac{\partial^2}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu}\right)+\frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\nu\,\partial y_\mu}-\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial y_\nu}\right),$$

мы получим, что условие (2) распадается на n^2 уравнений с частными производными второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial y_\nu} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial y_\nu} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial y_\mu} = 0 \tag{3}$$

($\mu, \nu = 1, \ldots, n$; уравнения второй группы при $\mu = \nu$ тривиальны).

Определение. Функция $u(x, y)$ класса C^2 в области $D \subset \mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющая в каждой точке $(x, y) \in D$ уравнениям (3), называется *плюригармонической* в этой области.

При $n=2$ плюригармонические функции называют дигармоническими; условия дигармоничности выражаются следующими четырьмя уравнениями:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_1} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Плюригармонические функции связаны с голоморфными функциями нескольких переменных так же, как гармонические (в $\mathbb{R}^2$) с голоморфными функциями одного переменного. Именно, справедливы следующие две теоремы:

Теорема 1. *Действительная и мнимая части функции f, голоморфной в области $D \subset \mathbb{C}^n$, являются плюригармоническими в этой области.*

◀ Для действительной части $u = \operatorname{Re} f$ теорема уже доказана. Так как вместе с f и функция $-if \in H(D)$, а $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)$, то теорема справедлива и для мнимой части ▶

Обратная теорема справедлива, вообще говоря, лишь локально.

Теорема 2. *Для любой функции u, плюригармонической в окрестности U точки $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{2n}$, существует голоморфная в точке $z^0 = x^0 + iy^0$ функция f, действительная (или мнимая) часть которой равна u.*

◀ Дифференциальная форма $\omega = \sum_{\nu=1}^{2n} p_\nu dx_\nu$ называется замкнутой в некоторой области из $\mathbb{R}^{2n}$, если в этой области все $p_\nu \in C^1$ и выполняются условия

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, 2n). \tag{5}$$

Рассмотрим в U дифференциальную форму

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \left(-\frac{\partial u}{\partial y_\nu} dx_\nu + \frac{\partial u}{\partial x_\nu} dy_\nu \right); \tag{6}$$

так как $u \in C^2$, то ее коэффициенты принадлежат классу C^1; условия замкнутости этой формы имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial y_\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial y_\mu}, \qquad -\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial y_\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n)$$

и совпадают с условиями плюригармоничности (3).

Таким образом, форма (6) замкнута в U. Но в действительном анализе доказывается, что каждая замкнутая форма $\omega = \sum_{\nu=1}^{2n} p_\nu \, dx_\nu$ локально *точна*, т. е. существует функция $v \in C^1$ такая, что $\omega = dv$, или

$$p_\nu = \frac{\partial v}{\partial x_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, 2n); \tag{7}$$

эта функция выражается интегралом

$$v(x) = \int_{x^0}^{x} \omega = \int_{x^0}^{x} \sum_{\nu=1}^{2n} p_\nu \, dx_\nu,$$

который не зависит от пути и при фиксированной точке x^0 является функцией от x.

В случае формы (6) мы имеем

$$v(x, y) = \int_{(x^0, y^0)}^{(x, y)} \sum_{\nu=1}^{n} \left(-\frac{\partial u}{\partial y_\nu} \, dx_\nu + \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \, dy_\nu \right)$$

и уравнения (7) совпадают с условиями комплексной дифференцируемости функции $f = u + iv$. Так как еще $f \in C^1$ в некоторой окрестности точки $z^0 = x^0 + iy^0$, то f голоморфна в этой точке и $u = \operatorname{Re} f$.

Голоморфная в точке z^0 функция $if = iu - v$ имеет u своей мнимой частью ▶

Первая группа уравнений (3) при $\mu = \nu$ дает

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} = 0. \tag{8}$$

Складывая эти уравнения для $\nu = 1, \ldots, n$, найдем, что оператор Лапласа от функции u по переменным $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$

$$\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} \right) = 0.$$

Следовательно, *плюригармонические функции составляют подкласс класса гармонических функций* в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ (очевидно, правильный при $n > 1$).

Естественно возникает вопрос об определении плюригармонической в некоторой области $D\subset\mathbb{R}^{2n}$ функции по заданным граничным значениям (задача Дирихле). Этот вопрос решается не так просто, как в случае гармонических функций. Мы проиллюстрируем возникающие трудности на примере одной из простейших областей — поликруга $U=\{z\in\mathbb{C}^n\colon |z_\nu|<1\}$. Так как согласно (8) плюригармоническая функция является гармонической по каждому переменному $z_\nu=x_\nu+iy_\nu$ в круге $\{|z_\nu|<1\}$, то мы можем последовательно применять интеграл Пуассона из п. 45 ч. I. Мы получим для любого $z\in U$

$$u(z)=\int_0^{2\pi} P(\zeta_1,\ z_1)\,dt_1\ \ldots\ \int_0^{2\pi} u(\zeta)\,P(\zeta_n,\ z_n)\,dt_n,$$

где $\zeta_\nu=e^{it_\nu}$, $\zeta=\{\zeta_\nu\}$ и

$$P(\zeta_\nu,\ z_\nu)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-|z_\nu|^2}{|\zeta_\nu-z_\nu|^2}$$

— ядра Пуассона. Обозначая через

$$P_n(\zeta,\ z)=\prod_{\nu=1}^{n} P(\zeta_\nu,\ z_\nu) \tag{9}$$

n-мерное ядро Пуассона, через $Q_n=\underbrace{[0,\ 2\pi]\times\ldots\times[0,\ 2\pi]}_{n\text{ раз}}$ n-мерный куб и через $dt=dt_1\ \ldots\ dt_n$ элемент объема, перепишем формулу Пуассона в следующем сокращенном виде:

$$u(z)=\int_{Q_n} u(\zeta)\,P_n(\zeta,\ z)\,dt. \tag{10}$$

В правую часть этой формулы входят лишь значения u на о с т о в е поликруга $\Gamma=\{\zeta\colon |\zeta_\nu|=1\}$, т. е. на n-мерной части границы ∂U (вся граница $(2n-1)$-мерна). Отсюда ясно, что нельзя произвольно задавать значения плюригармонической функции u на всей границе поликруга. Если подставить в правую часть (10) значения какой-либо непрерывной на Γ функции $u(\zeta)$, то функция $u(z)$, определяемая в U этой формулой, как нетрудно проверить, будет для всех $\nu=1,\ \ldots,\ n$ удовлетворять уравнениям (8). Однако эта функция, вообще говоря, не будет удовлетворять другим уравнениям (3), т. е. не будет плюригармонической в U. Для плюригармоничности $u(z)$ на значения $u(\zeta)$ нужно наложить дополнительные условия, на которых мы не останавливаемся.

5. Основная теорема Хартогса. Здесь мы докажем теорему о том, что из голоморфности функции по каждому переменному

следует ее голоморфность по совокупности переменных, — об этой теореме уже шла речь в п. 3. Там же было установлено, что для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что всякая функция, голоморфная по каждому переменному, является непрерывной по совокупности переменных, т. е. обладает свойством (A).

Доказательству мы предпошлем ряд лемм. Первая из них утверждает, что достаточно установить лишь ограниченность рассматриваемой функции. При этом нам понадобится лемма Шварца в виде несколько более общем, чем в п. 35 ч. I.

Пусть функция φ голоморфна в круге $U_r=\{|z|<r\}\subset\mathbb{C}$, причем $\varphi=0$ в некоторой точке $z_0\in U_r$ и $|\varphi|\leqslant M$ всюду в U_r; тогда всюду в U_r

$$|\varphi(z)|\leqslant Mr\frac{|z-z_0|}{|r^2-\bar{z}_0z|} \tag{1}$$

(при $r=M=1$ и $z_0=0$ получаем обычную формулировку). Для доказательства возьмем дробно-линейное отображение U_r на единичный круг U:

$$\lambda:\quad z\to r\frac{z-z_0}{r^2-\bar{z}_0z},$$

обозначим через λ^{-1} обратное отображение $U\to U_r$ и рассмотрим функцию $\psi=\frac{1}{M}\varphi\circ\lambda^{-1}$. Она удовлетворяет условиям обычной леммы Шварца, и по этой лемме $|\psi(z)|\leqslant|z|$ всюду в U. Заменяя здесь z на $\lambda(z)$, получим неравенство (1).

Лемма 1. *Если функция f голоморфна по каждому переменному z_ν в поликруге $U=U(a,\ r)$* [1]) *и ограничена в U, то она непрерывна в каждой точке U по совокупности переменных.*

◀ Пусть $z^0,\ z\in U$ — произвольные точки; распишем приращение f как сумму приращений по отдельным координатам

$$f(z)-f(z^0)=\sum_{\nu=1}^{n}\{f(z_1^0,\ \ldots,\ z_{\nu-1}^0,\ z_\nu,\ \ldots,\ z_n)-$$
$$-f(z_1^0,\ \ldots,\ z_\nu^0,\ z_{\nu+1},\ \ldots,\ z_n)\} \tag{2}$$

и рассмотрим ν-е слагаемое как функцию φ_ν переменного z_ν при фиксированных остальных значениях аргументов. Если $|f|\leqslant\frac{M}{2}$ в U, то функция φ_ν удовлетворяет условиям леммы Шварца в только что приведенной форме, и, применяя неравенство

[1]) Это означает, что для любой $a\in U$ и любого $\nu=1,\ \ldots,\ n$ функция $f(a_1,\ \ldots,\ a_{\nu-1},\ z_\nu,\ a_{\nu+1},\ \ldots,\ a_n)$ переменного z_ν голоморфна в круге $\{|z_\nu|<r_\nu\}\subset\mathbb{C}$.

(1) к каждому слагаемому суммы (2), мы найдем, что

$$|f(z)-f(z^0)|\leqslant M\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{|z_\nu - z_\nu^0|}{|r_\nu^2 - \bar{z}_\nu^0 z_\nu|}.$$

Отсюда и следует утверждение ▶

Итак, для доказательства теоремы Хартогса остается доказать ограниченность в некотором поликруге с центром в a функции, голоморфной по каждому переменному. Заметим, что ограниченность в каком-то поликруге, не обязательно с центром в a, следует из одной лишь непрерывности f по отдельным переменным. Этот факт составляет содержание так называемой леммы Осгуда:

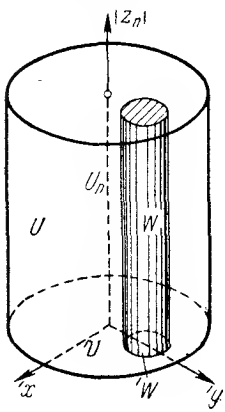


Рис. 80.

Лемма 2. *Представим поликруг* $U=\{z\in\mathbb{C}^n\colon |z_\nu|<R\}$ *как произведение* $'U=\{'z\in\mathbb{C}^{n-1}\colon |z_\nu|<R\}$ [1]) *на круг* $U_n=\{z_n\in\mathbb{C}\colon |z_n|<R\}$. *Если функция* $f('z, z_n)$ *непрерывна по* $'z$ *в* $'\overline{U}$ *для любой* $z_n\in\overline{U}_n$ *и непрерывна по* z_n *в* $\overline{U}_n$ *для любой* $'z\in'\overline{U}$, *то существует поликруг* $W='W\times U_n\subset U$, *в котором* f *ограничена* (см. диаграмму Хартогса на рис. 80).

◀ Для фиксированного $'z\in'\overline{U}$ обозначим

$$M('z)=\max_{z_n\in\overline{U}_n}|f('z, z_n)|$$

и рассмотрим множества $\mathscr{E}_m=\{'z\in'\overline{U}\colon M('z)\leqslant m\}$. Эти множества замкнуты, ибо если $'z^{(\mu)}\in\mathscr{E}_m$ $(\mu=1, 2, \ldots)$ и $'z^{(\mu)}\to'z$, то и $'z\in\mathscr{E}_m$ (в самом деле, $|f('z^{(\mu)}, z_n)|\leqslant m$ для любого $z_n\in\overline{U}_n$, в силу непрерывности f по $'z$ тогда и $|f('z, z_n)|\leqslant m$ для любого $z_n\in\overline{U}_n$, т. е. $M('z)\leqslant m$). Очевидно, $\mathscr{E}_m$ образуют возрастающую последовательность и любая точка $'z\in'\overline{U}$ принадлежит всем $\mathscr{E}_m$, начиная с некоторого.

Существует $\mathscr{E}_M$, содержащее некоторую область $'G\subset'U$. В самом деле, в противном случае все $\mathscr{E}_m$ были бы нигде не плотными, но тогда в $'U$ существовал бы шар $\overline{B}^1\subset\mathbb{C}^{n-1}$, свободный от точек $\mathscr{E}_1$, в B^1 — шар $\overline{B}^2$, свободный от точек $\mathscr{E}_2$, и т. д.— мы построили бы последовательность шаров $\overline{B}^k\subset\mathbb{C}^{n-1}$, которые имеют общую точку $'z^0\in'\overline{U}$, и эта точка не принадлежала бы никакому $\mathscr{E}_m$.

---

[1]) Напомним, что через $'z=(z_1, \ldots, z_{n-1})$ мы условились обозначать проекцию в $\mathbb{C}^{n-1}$ точки $z\in\mathbb{C}^n$.

Таким образом, существует область $'G$, в которой $|f('z, z_n)| \leqslant M$ для любого $z_n \in U_n$. Остается выбрать в $'G$ поликруг $'W = \{'z: |z_\nu - z_\nu^0| < r\}$, и тогда в $W = 'W \times U_n$ будет $|f| \leqslant M$ ▶

Чтобы доказать ограниченность f в поликруге с центром в a, придется использовать голоморфность по отдельным переменным. При этом нам потребуется лемма Хартогса, существенно опирающаяся на свойства субгармонических функций. Для ее формулировки введем следующие обозначения: $'V = U('a, R)$, $'W = U('a, r)$ (r и R — скаляры, $r<R$), $U_n = \{|z_n| < R\}$, $V = 'V \times U_n$, $W = 'W \times U_n$ (рис. 81).

Лемма 3. *Если функция $f('z, z_n)$ голоморфна по $'z$ в $'\overline{V}$ для любого $z_n \in \overline{U}_n$ и голоморфна по z в $\overline{W}$, то она голоморфна во всем поликруге $\overline{V}$.*

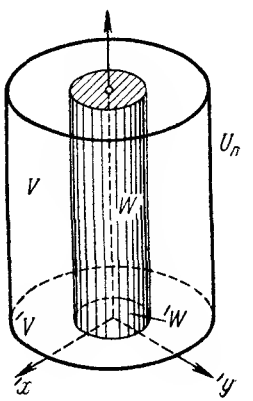


Рис. 81.

◀ Без ограничения общности считаем $'a = '0$. Для любого фиксированного $z_n \in U_n$ и любого $'z \in 'V$ функция f представляется (в силу голоморфности по $'z$) сходящимся степенным рядом

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(z_n)('z)^k, \qquad (3)$$

где $k = (k_1, \ldots, k_{n-1})$. Коэффициенты этого ряда

$$c_k(z_n) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f('0, z_n)}{(\partial 'z)^k}$$

голоморфны в круге U_n, как производные голоморфной по z_n функции (точка $('0, z_n) \in W$). Поэтому функции $\frac{1}{|k|} \ln |c_k(z_n)|$ субгармоничны в U_n.

Выберем произвольно число $\rho < R$; так как для любого $z_n \in U_n$

$$|c_k(z_n)| \rho^{|k|} \to 0$$

при $|k| \to \infty$, то для любого $z_n \in U_n$ найдется $|k|$, начиная с которого будет $\frac{1}{|k|} \ln |c_k(z_n)| + \ln \rho \leqslant 0$, т. е.

$$\overline{\lim_{|k| \to \infty}} \frac{1}{|k|} \ln |c_k(z_n)| \leqslant \ln \frac{1}{\rho}. \qquad (4)$$

Теперь воспользуемся голоморфностью f в $\overline{W}$: f ограничена в $\overline{W}$ (пусть $|f| \leqslant M$), и справедливы неравенства Коши

$$|c_k(z_n)| r^{|k|} \leqslant M$$

для любого $z_n \in U_n$. Поэтому для любого $z_n \in U_n$ и любого $|k|$

$$\frac{1}{|k|}\ln|c_k(z_n)| \leqslant \ln \frac{M^{\frac{1}{|k|}}}{r} \leqslant A. \tag{5}$$

Таким образом, рассматриваемые субгармонические функции удовлетворяют условиям теоремы о верхнем пределе (п. 46 ч. I). По этой теореме для любого $\sigma<\rho$ можно найти номер k_0 такой, что для всех $|k|>k_0$ и всех z_n, $|z_n| \leqslant \sigma$, имеем $\frac{1}{|k|}\ln|c_k(z_n)| \leqslant \ln\frac{1}{\sigma}$, т. е.

$$|c_k(z_n)|\sigma^{|k|} \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что ряд (3) сходится равномерно в любом поликруге $\overline{U}(0, \sigma')$, $\sigma'<\sigma$, но члены этого ряда непрерывны по z, поэтому и его сумма f непрерывна, а следовательно, ограничена в $U(0, \sigma')$. Этот поликруг можно считать сколь угодно близким к V, а так как V с самого начала можно было немного увеличить [1]), то f ограничена и, значит, по лемме 1 и утверждению 4° из п. 3 голоморфна в $\overline{V}$ ▶

Теперь все готово для доказательства основной теоремы.

Теорема Хартогса. *Если функция f голоморфна в любой точке области $D \subset \mathbb{C}^n$ по каждому из переменных z_ν, то она голоморфна в D.*

◀ Достаточно доказать голоморфность f в произвольной точке $z^0 \in D$, причем без ограничения общности можно считать, что $z^0=0$. Итак, пусть f голоморфна по каждому переменному в поликруге $\overline{U(0, R)}$; требуется доказать, что она голоморфна в некотором поликруге с центром в 0.

Это утверждение будем доказывать индукцией по числу комплексных переменных. Для одного переменного оно тривиально; предположим, что оно верно для функций $(n-1)$-го переменного, и обозначим $'U = U\left('0, \frac{R}{3}\right)$. Из предположения следует, что функция $f('z, z_n)$ непрерывна по $'z$ в $'\overline{U}$ для любого $z_n \in \overline{U}_n = \{|z_n| \leqslant R\}$ и по z_n в $\overline{U}_n$ для любого $'z \in '\overline{U}$. По лемме Осгуда f ограничена, а значит, и голоморфна в некотором поликруге $\overline{W} = '\overline{W} \times \overline{U}_n$, где $'W = U('a, r) \subset 'U$ (рис. 82).

Рассмотрим теперь поликруг $V = 'V \times U_n$, где $'V = U\left('a, \frac{2}{3}R\right)$. Очевидно, $\overline{V} \subset \overline{U(0, R)}$, следовательно, f голоморфна по $'z$ в $'\overline{V}$

[1]) В условия леммы входит голоморфность в замкнутых поликругах.

для любого $z_n \in \overline{U}_n$, а по только что доказанному она голоморфна по z в $\overline{W}$. По лемме Хартогса отсюда следует, что она голоморфна по z и в поликруге V, который уже содержит точку $z=0$. Таким образом, утверждение доказано и для функций n переменных ▶

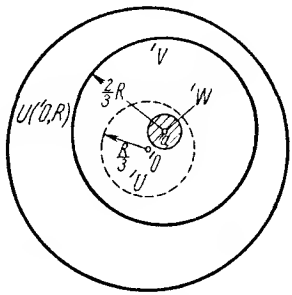


Рис. 82.

Приведем еще одну формулировку теоремы Хартогса.

Будем говорить, что функция f голоморфна в точке $a \in \mathbb{C}^n$ в смысле Римана, если

(R) f голоморфна по каждому переменному z_ν в некотором поликруге $U(a, r)$.

Будем говорить, что f голоморфна в этой точке в смысле Вейерштрасса, если

(W) f разлагается в некотором поликруге $U(a, r)$ в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Импликация (W) $\Rightarrow$ (R) очевидна, импликация (R) $\Rightarrow$ (W) составляет содержание основной теоремы Хартогса. Эту теорему можно, следовательно, сформулировать так:

Понятия голоморфности в смысле Римана и в смысле Вейерштрасса эквивалентны.

§ 3. Голоморфные функции

6. Простейшие свойства. В предыдущем параграфе был отмечен ряд свойств голоморфных функций нескольких переменных, которые являются распространением соответствующих свойств функций одного переменного (интегральная формула Коши для поликругов, разложимость в степенной ряд, бесконечная дифференцируемость, неравенства Коши). Здесь мы продолжим изучение таких свойств.

Начнем с теоремы единственности. В формулировке п. 21 ч. I она на пространственный случай не распространяется: функция $z_1 z_2$, голоморфная в $\mathbb{C}^2$ и не равная тождественно нулю, обращается в нуль на множестве с предельными точками (аналитических плоскостях $\{z_1=0\}$ и $\{z_2=0\}$). Верна такая

Теорема 1 (единственности). *Если функция $f \in H(D)$ в некоторой точке z^0 области $D \subset \mathbb{C}^n$ обращается в нуль вместе со всеми частными производными, то $f \equiv 0$ в D.*

◀ Все коэффициенты тейлоровского разложения f в точке z^0 равны 0, следовательно, $f\equiv 0$ в некоторой окрестности этой точки. Обозначим $\mathscr{E}=\{z\in D\colon f(z)=0\}$ и $\mathring{\mathscr{E}}$ — открытое ядро $\mathscr{E}$ (совокупность внутренних точек этого множества). Множество $\mathring{\mathscr{E}}$ открыто и непусто (оно содержит z^0); как и в ч. I, доказывается, что оно замкнуто в D; поэтому $\mathring{\mathscr{E}}\equiv D$ ▶

В доказанной теореме, по существу, требуется, чтобы f обращалась в нуль в $2n$-мерной окрестности точки z^0. Даже из обращения в нуль в $(2n-2)$-мерной окрестности точки, вообще говоря, не следует тождественного обращения функции в нуль (пример: $f(z)=z_n$ обращается в нуль на $(2n-2)$-мерном множестве $\{z\in\mathbb{C}^n\colon z^n=0\}$). Имеются, однако, случаи, когда обращение функции в нуль в n-мерной окрестности точки влечет за собой тождественное ее равенство нулю:

Если функция $f\in H(D)$ обращается в нуль в действительной окрестности точки $z^0\in D$, т. е. на множестве $\{z=x+iy\in\mathbb{C}^n\colon |x-x^0|<r,\ y=y^0\}$, то $f\equiv 0$ в D.

◀ В некотором поликруге с центром z^0 функция f разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(z-z^0)^k.$$

Полагая здесь $y=y^0$, найдем, что

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(x-x^0)^k\equiv 0$$

для всех $x\in\{|x-x^0|<r\}$. Дифференцируя это тождество по $x^k=x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$, а затем полагая $x=x^0$, найдем, что все $c_k=0$. По теореме 1 тогда $f\equiv 0$ в D ▶

Теорема 2 (принцип максимума модуля). *Если функция $f\in H(D)$ и $|f|$ достигает максимума в некоторой точке $a\in D$, то $f\equiv\text{const}$ в D.*

◀ Рассмотрим любую аналитическую прямую $z=l(\zeta)=a+\omega\zeta$, проходящую через точку a. Сужение f на эту прямую — функция $\varphi_\omega(\zeta)=f\circ l(\zeta)$ — голоморфно в некотором круге $\{|\zeta|<\rho\}$, а $|\varphi_\omega|$ достигает максимума при $\zeta=0$. По принципу максимума модуля для функций одного переменного $\varphi_\omega(\zeta)=c(\omega)$ — постоянная, зависящая от ω. Но $\varphi_\omega(0)=f(a)$ не зависит от ω, поэтому $c(\omega)=\text{const}$ и $f=\text{const}$ в окрестности точки a. По теореме 1 $f=\text{const}$ в D ▶

Если f голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}^n$ и непрерывна в $\overline{D}$, то максимум $|f|$ достигается на границе ∂D. Однако в $\mathbb{C}^n$ при $n>1$ существуют такие области, в которых $|f|$ для любой

$f \subset H(D)$, непрерывной в $\bar{D}$, фактически достигается не на всей ∂D, а лишь на некотором ее подмножестве. Наименьшее такое замкнутое подмножество называется *границей Шилова* области D. Точнее, границей Шилова области D называется такое замкнутое множество $S \subset \partial D$, что: 1) для любой $f \in H(D)$, непрерывной в $\bar{D}$,

$$\max_{z \in \bar{D}} |f(z)| = \max_{z \in S} |f(z)| \tag{1}$$

и 2) любое замкнутое множество $\tilde{S}$, обладающее свойством 1), содержит S.

Примеры.

1. Шар $B = \{z \in \mathbb{C}^n: |z| < 1\}$. Покажем, что здесь граница Шилова совпадает с топологической границей. Для этого возьмем произвольную точку $\zeta \in \partial B$ и построим функцию f, голоморфную в B, непрерывную в $\bar{B}$ и такую, что $|f(\zeta)| > |f(z)|$ для всех $z \in \bar{B} \setminus \zeta$. Обозначим через

$$(z, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \bar{\zeta}_\nu$$

скалярное произведение векторов z и ζ в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. По неравенству Буняковского — Шварца

$$\operatorname{Re}(z, \zeta) \leqslant |(z, \zeta)| \leqslant |z|,$$

ибо $|\zeta| = 1$, причем равенство $\operatorname{Re}(z, \zeta) = |z| = 1$ достигается в $\bar{B}$ лишь при $z = \zeta$. Поэтому функция $f(z) = e^{(z, \zeta)}$ обладает нужным свойством.

2. Поликруг $U = \{z \in \mathbb{C}^n: |z_\nu| < 1\}$. Здесь граница Шилова составляет лишь n-мерную часть $(2n-1)$-мерной топологической границы, именно, она совпадает с остовом поликруга. Для доказательства рассмотрим любую функцию f, голоморфную в U и непрерывную в $\bar{U}$. Прежде всего заметим, что функция $f('z, \zeta_n)$ для любого фиксированного ζ_n, $|\zeta_n| = 1$, является голоморфной функцией $'z$ в поликруге $'U \in \mathbb{C}^{n-1}$. В самом деле, ее можно представить как предел последовательности функций $\varphi_\mu('z) = f('z, z_n^{(\mu)})$, где $z_n^{(\mu)}$ — какая-либо последовательность точек круга $\{|z_n| < 1\}$, сходящаяся к точке ζ_n. Так как $('z, z_n^{(\mu)}) \in U$ то все φ_μ голоморфны в $'U$, а в силу равномерной непрерывности f в $\bar{U}$ последовательность φ_μ сходится равномерно в $'\bar{U}$. По теореме Вейерштрасса (см. ниже, теорема 4) отсюда и следует сделанное утверждение. Точно так же доказывается, что все функции $f(z_1, \ldots, z_m, \zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_n)$, где $m = 1, \ldots, n-1$ при фиксированных $\zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_n$, по модулю равных 1, голоморфны по $(z_1, \ldots, z_m)$ в соответствующих поликругах.

Пусть $M=\max\limits_{z\in\bar{U}}|f(z)|$ достигается в некоторой точке $\zeta\in\partial U$, которая принадлежит одному из множеств $\Gamma^\nu=\{|\zeta_\nu|=1,\ |\zeta_\mu|\leqslant 1,\ \mu\neq\nu\}$; перенумеровывая в случае надобности переменные, можно считать, что оно совпадает с Γ^n. Либо $|\zeta_{n-1}|=1$, либо по принципу максимума модуля (он применим по доказанному выше) f постоянна по переменному z_{n-1}, и тогда значение M достигается в некоторой точке, две последние координаты которой по модулю равны 1. Продолжая это рассуждение, мы получим, что значение M достигается на остове поликруга $\Gamma=\{|z_\nu|=1,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\}$. Таким образом, граница Шилова поликруга U принадлежит Γ.

Но для любой точки $\zeta\in\Gamma$ найдется функция f, голоморфная в U и непрерывная в $\bar{U}$, для которой $|f(\zeta)|>|f(z)|$ для всех $z\in\bar{U}\setminus\zeta$: в качестве такой функции можно взять произведение $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1+\bar{\zeta}_\nu z_\nu)$. Таким образом, граница Шилова совпадает с Γ.

Теорема 3 (Лиувилль). *Если функция f голоморфна в $\mathbb{C}^n$ и ограничена, то она постоянна.*

◀ Воспользуемся индукцией по n. При $n=1$ теорема доказана в первой части, пусть она верна для функций $(n-1)$-го переменного. Возьмем произвольные точки $a,\ b\in\mathbb{C}^n$; так как функция $f('z,\ a_n)$ по индуктивному предположению постоянна, то $f(a)=f('b,\ a_n)$. Но функция $f('b,\ z_n)$ также постоянна, следовательно, $f('b,\ a_n)=f(b)$. Таким образом, $f(a)=f(b)$, т. е. теорема верна для функций n переменных ▶

В дальнейшем теорема будет усилена (см. п. 18, а также задачу 9).

Теорема 4 (Вейерштрасс). *Пусть последовательность функций $f_\mu\in H(D)$ сходится к функции f равномерно на каждом компактном подмножестве D; тогда $f\in H(D)$ и для любого $k=(k_1,\ \ldots,\ k_n)$*

$$\frac{\partial^{|k|}f_\mu}{\partial z^k}\to\frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k} \tag{2}$$

на любом $K\Subset D$.

◀ По теореме п. 22 ч. I функция голоморфна по каждому переменному в любой точке $z\in D$ и по теореме Хартогса принадлежит $H(D)$. Вторую часть теоремы достаточно доказать для окрестности произвольной точки $z^0\in D$ и производной по одному переменному z_ν. Возьмем поликруг $U=U(z^0,\ r)\Subset D$ и воспользуемся формулой Коши

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}-\frac{\partial f}{\partial z_\nu}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma\frac{f_\mu(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}_\nu-\bar{z}_\nu)}\,d\zeta, \tag{3}$$

где Γ — остов U. Так как $f_\mu \to f$ равномерно на Γ, то для любого $\varepsilon>0$ найдется μ_0 такое, что $\|f_\mu - f\|_\Gamma < \varepsilon$ для всех $\mu \geqslant \mu_0$. Если $K \Subset U$, то из (3) будем иметь для всех $z \in K$ и $\mu \geqslant \mu_0$

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} - \frac{\partial f}{\partial z_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{(2\pi)^n} \frac{(2\pi)^n r_1 \dots r_n}{\min\limits_{z\in K,\ \zeta\in\Gamma} |\zeta - z|\,|\zeta_\nu - z_\nu|};$$

отсюда следует, что $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \to \dfrac{\partial f}{\partial z_\nu}$ равномерно на K ▶

Приведем теперь наиболее содержательное из обобщений на пространственный случай свойство голоморфных функций — так называемую подготовительную теорему (Vorbereitungsatz) Вейерштрасса. Эта теорема обобщает известное свойство голоморфных функций одного переменного обращаться в нуль как целые степени $z-a$: если $f(a)=0$ (но $f \not\equiv 0$), то в некоторой окрестности точки a

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z), \tag{4}$$

где φ голоморфна и не обращается в нуль.

Теорема 5. *Пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности U точки $a \in \mathbb{C}^n$ и $f(a)=0$, но $f('a, z_n) \not\equiv 0$; тогда в некоторой окрестности V этой точки*

$$f(z) = \{(z_n - a_n)^k + c_1('z)(z_n - a_n)^{k-1} + \dots + c_k('z)\}\varphi(z), \tag{5}$$

где $k \geqslant 1$ — порядок нуля $f('a, z_n)$ в точке $z_n = a_n$, функции c_ν голоморфны в $'V$, $c_\nu('a)=0$, а φ голоморфна в V и не обращается там в нуль.

◀ Без ограничения общности считаем, что $a=0$. По теореме единственности для функций одного переменного можно выбрать $r_n>0$ так, чтобы $f('0, z_n) \neq 0$ при $0<|z_n| \leqslant r_n$, а в силу непрерывности f найдется поликруг $'V = U('0, r)$ такой, что $f \neq 0$ при $'z \in 'V$, $|z_n| = r_n$. Для любого фиксированного $'z^0 \in 'V$ число нулей функции $f('z^0, z_n)$ в круге $V_n = \{|z_n| < r_n\}$ равно

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V_n} \frac{\dfrac{\partial}{\partial z_n} f('z^0, z_n)}{f('z^0, z_n)}\, dz_n = k, \tag{6}$$

ибо левая часть (6) — целочисленная и непрерывная функция точки $'z^0$ в $'V$[1]) и, следовательно, постоянная, а при $'z^0 = '0$ она равна порядку нуля функции $f('0, z_n)$ в точке $z_n=0$, т. е. k.

[1]) См. лемму в конце пункта.

Фиксируем $'z \in {}'V$, обозначим через $z_n^{(\nu)} = z_n^{(\nu)}('z)$, $\nu = 1, \ldots, k$, нули функции $f('z, z_n)$ в круге V_n и построим многочлен относительно z_n

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{k} (z_n - z_n^{(\nu)}) = z_n^k + c_1('z)\, z_n^{k-1} + \ldots + c_k('z), \qquad (7)$$

имеющий эти нули своими корнями. Его коэффициенты голоморфны в ${}'V$. В самом деле, для любой голоморфной в $\overline{V}_n$ функции $\omega(z_n)$ по обобщенному принципу аргумента (см. задачу 1 к гл. IV ч. I)

$$\sum_{\nu=1}^{k} \omega(z_n^{(\nu)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_n} \omega(z_n) \frac{\frac{\partial}{\partial z_n} f('z, z_n)}{f('z, z_n)}\, dz_n,$$

откуда видно, что суммы в левой части — голоморфные функции переменного $'z$ в ${}'V$ (мы учитываем, что $f \neq 0$ при $'z \in {}'V$ и $z_n \in \partial V_n$). Полагая здесь $\omega(z_n) = z_n^{\mu}$, $\mu = 1, \ldots, k$, найдем, что суммы μ-х степеней корней многочлена (7) голоморфны в ${}'V$, а через эти суммы (как известно из алгебры) рационально выражаются его коэффициенты, следовательно, $c_\nu('z) \in H({}'V)$. При $'z = {}'0$ все k корней многочлена равны нулю, поэтому и все $c_\nu({}'0) = 0$.

Функция

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{P(z)}$$

при любом фиксированном $'z \in {}'V$ является голоморфной функцией z_n в круге V_n и не обращается в нуль, ибо P обращается в нуль того же порядка лишь в точках $z_n^{(\nu)}('z)$, в которых и $f = 0$. При фиксированном $z_n \in V_n$ и $'z \in {}'V$ имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_n} \frac{f('z, \zeta_n)}{P('z, \zeta_n)} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n},$$

а так как $P \neq 0$ на ∂V_n (ибо там $f \neq 0$), то правая часть, а значит и φ, голоморфно зависит от $'z$ [1]). По теореме Хартогса φ голоморфна в поликруге $V = {}'V \times V_n$ ▶

Подготовительная теорема Вейерштрасса показывает, что голоморфная функция обращается в нуль как многочлен относительно переменного z_n с коэффициентами из кольца $H('a)$ функций от $'z$, голоморфных в точке $'a$. Точнее, все коэффициенты,

[1]) См. лемму в конце пункта.

кроме старшего, принадлежат идеалу[1]), который образуют в $H('a)$ функции, обращающиеся в нуль в этой точке. Таким образом, эта теорема позволяет привлечь для исследования множества нулей голоморфных функций алгебраические методы.

Замечание. Если $f \not\equiv 0$ и выполняются все условия теоремы Вейерштрасса, кроме условия $f('a, z_n) \not\equiv 0$, то существует линейная замена переменных $z - a = Aw$, $\operatorname{Det} A \neq 0$, или, в подробной записи,

$$z_\nu - a_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu} w_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

после которой f переходит в функцию $g(w)$ такую, что $g('0, w_n) \not\equiv 0$.

Для доказательства выпишем группу членов

$$\sum_{|k|=\varkappa} c_{k_1 \ldots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \ldots (z_n - a_n)^{k_n}$$

тейлоровского разложения f в точке a наименьшего порядка $|k| = \varkappa$, при котором не все коэффициенты группы равны 0. Сделаем в ней замену переменных (8), причем матрицу A подберем так, чтобы $\operatorname{Det} A \neq 0$ и чтобы коэффициент при $w_n^\varkappa$

$$d_{'0\varkappa} = \sum_{|k|=\varkappa} c_{k_1 \ldots k_n} \alpha_{n1}^{k_1} \ldots \alpha_{nn}^{k_n} \not\equiv 0.$$

После такой замены $f(z)$ перейдет в функцию $g(w)$, для которой $g('0, w_n) = d_{'0\varkappa} w_n^\varkappa + \ldots \not\equiv 0$, что и требуется.

Заметим еще, что при $n=2$ разложению Вейерштрасса функции $f \not\equiv 0$ можно придать вид

$$f(z, w) = (z - a)^k \{(w - b)^l + c_1(z)(w - b)^{l-1} + \ldots + c_k(z)\} \varphi(z, w), \tag{9}$$

для которого условие $f(a, w) \not\equiv 0$ не требуется (здесь c_ν — голоморфные в точке $a \in \mathbb{C}$ функции, $c_\nu(a) = 0$, k и l — целые числа, φ — голоморфная в точке $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ функция, не обращающаяся в нуль). В самом деле, если $f(a, w) \not\equiv 0$, то мы имеем разложение (9) с $k=0$; если же $f(a, w) \equiv 0$, то из тейлоровского разложения мы получим, что $f(z, w) = (z - a)^k g(z, w)$, где уже $g(a, w) \not\equiv 0$, и, применяя теорему к функции g, придем к разложению (9).

В заключение этого пункта докажем лемму о голоморфной зависимости интегралов от параметра, которой мы несколько раз пользовались при доказательстве подготовительной теоремы

---

[1]) Напомним, что *идеалом* кольца R называется множество J его элементов, которое: 1) является подгруппой аддитивной группы кольца (для этого разность любых двух элементов из J должна снова принадлежать J) и 2) для любого элемента $j \in J$ и любого $r \in R$ произведение $jr \in J$. Множество всех функций из $H('a)$, равных нулю в $'a$, удовлетворяет обоим этим условиям, т. е. является идеалом в конце $H('a)$.

Вейерштрасса. Мы рассмотрим ее в несколько более общей ситуации.

Лемма. *Пусть* L_μ: $\zeta_\mu=\zeta_\mu(t)$ — *спрямляемая кривая в плоскости* ζ_μ $(\mu=1, \ldots, m)$, $L=L_1\times\ldots\times L_m$ *и* D — *область в* $\mathbb{C}^n$; *пусть* $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ *и* $z=(z_1, \ldots, z_n)$. *Если функция* $g(\zeta, z)$ *непрерывна на* $L\times D$, *голоморфна по* z *в* D *при любом* $\zeta\in L$ *и имеет на* $L\times D$ *непрерывные частные производные* $\frac{\partial g}{\partial z_\nu}$, *то интеграл*

$$G(z)=\int\limits_{L_1} d\zeta_1 \ldots \int\limits_{L_m} g(\zeta, z)\, d\zeta_m=\int\limits_L g(\zeta, z)\, d\zeta \tag{10}$$

голоморфен в D *и*

$$\frac{\partial G}{\partial z_\nu}=\int\limits_L \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial z_\nu}\, d\zeta \qquad (\nu=1, \ldots, n). \tag{11}$$

◀ Для любого $z\in D$ выберем $r>0$ так, чтобы поликруг $U(z, r)\subset D$; пусть $|h_\nu|<r$ и $h=(0, \ldots, h_\nu, \ldots, 0)\in\mathbb{C}^n$ — вектор, у которого все координаты, кроме ν-й, равны 0. Имеем

$$\frac{1}{h_\nu}\{G(z+h)-G(z)\}=\frac{1}{h_\nu}\int\limits_L \{g(\zeta, z+h)-g(\zeta, z)\}\, d\zeta=$$

$$=\int\limits_L d\zeta \int\limits_0^1 \frac{\partial g(\zeta, z+\theta h)}{\partial z_\nu}\, d\theta$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{h_\nu}\{G(z+h)-G(z)\}-\int\limits_L \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial z_\nu}\, d\zeta=$$

$$=\int\limits_L d\zeta \int\limits_0^1 \left\{\frac{\partial g(\zeta, z+\theta h)}{\partial z_\nu}-\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial z_\nu}\right\} d\theta. \tag{12}$$

В силу того, что $\frac{\partial g(\zeta, z+\theta h)}{\partial z_\nu}$ при фиксированном z равномерно непрерывна на компактном множестве $L\times[0, 1]$, то для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать $\delta>0$ столь малым, что для всех $(\zeta, \theta)\in L\times[0, 1]$ при $|h|<\delta$ будет

$$\left|\frac{\partial g(\zeta, z+\theta h)}{\partial z_\nu}-\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial z_\nu}\right|<\varepsilon.$$

Поэтому, оценивая последовательно интегралы в правой части (12), мы найдем, что левая часть этого равенства при $|h|<\delta$

не превосходит по модулю $\varepsilon|L_1|\ldots|L_m|$. Таким образом, в каждой точке $z\in D$ все частные производные $\frac{\partial G}{\partial z_\nu}$ существуют и выражаются формулами (11) ▶

7. Степенные ряды. Здесь мы рассмотрим основные вопросы, связанные с разложением голоморфных функций в ряды. В п. 5 мы доказали, что любую функцию, голоморфную в поликруге $U(a, r)$, можно в этом поликруге разложить в кратный степенной ряд с центром в a. Возникает вопрос о множестве точек сходимости такого ряда. По аналогии с функциями одного переменного хочется ожидать, что таким множеством будет поликруг, дополненный некоторой совокупностью точек его границы. Однако самые простые примеры показывают, что дело обстоит иначе.

Примеры. Множество сходимости степенного ряда

$$\frac{1}{1-z_1z_2}=\sum_{\mu=0}^{\infty} z_1^\mu z_2^\mu \tag{1}$$

(μ — скалярный индекс) в $\mathbb{C}^2$ представляет собой полную область Рейнхарта $\{|z_1z_2|<1\}$. Для ряда

$$\frac{z_1}{(1-z_1)(1-z_2)}=\sum_{|k|=0}^{\infty} z_1^{k_1+1}z_2^{k_2} \tag{2}$$

множеством сходимости в $\mathbb{C}^2$ является бикруг $\{|z_1|<1,\ |z_2|<1\}$, дополненный аналитической плоскостью $\{z_1=0\}$.

Из последнего примера видно, что теорема Абеля в обычной формулировке (п. 19 ч. I) на функции нескольких переменных не переносится. Однако можно получить ее аналог, если вместо множества сходимости рассматривать его открытое ядро, т. е. совокупность внутренних точек этого множества.

Определение. *Областью сходимости* степенного ряда

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \tag{3}$$

называется открытое ядро $\mathring{S}$ множества S точек $z\in\mathbb{C}^n$, в которых этот ряд сходится при каком-либо порядке следования его членов.

Из леммы 3° п. 3 аналог теоремы Абеля выводится в следующем виде:

Теорема 1. *Если точка z^0 принадлежит области сходимости $\mathring{S}$ ряда* (3), *то замкнутый поликруг* $\overline{U}=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_\nu-a_\nu|\leqslant$

$\leqslant |z_\nu^0 - a_\nu|\}$ *также принадлежит* $\mathring{S}$ *и ряд* (3) *сходится в* $\overline{U}$ *абсолютно и равномерно* [1]).

◀ Так как $z^0 \in \mathring{S}$ и $\mathring{S}$ открыто, существует точка $\zeta \in \mathring{S}$ такая, что $|\zeta_\nu - a_\nu| > |z_\nu^0 - a_\nu|$, $\nu = 1, \ldots, n$, и ряд (3) сходится в этой точке. Так как $U \Subset \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_\nu - a_\nu| < |\zeta_\nu - a_\nu|\}$, то по цитированной лемме ряд (3) сходится в $\overline{U}$ абсолютно и равномерно ▶

Теорему 1 можно сформулировать еще и так: *область сходимости* $\mathring{S}$ *ряда* (3) *является полной областью Рейнхарта с центром в* a. Таким образом, полные области Рейнхарта в случае функций нескольких переменных играют ту же роль, что круги в случае одного переменного. Эту аналогию подчеркивает и следующая

Теорема 2. *Любая функция* f, *голоморфная в полной области Рейнхарта* $D \subset \mathbb{C}^n$ *с центром в* a, *представляется в этой области тейлоровским разложением*

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k. \tag{4}$$

◀ Пусть z^0 — произвольная точка D, тогда поликруг $\overline{U} = \{|z_\nu - a_\nu| \leqslant |z_\nu^0 - a_\nu|\} \Subset D$ и по лемме 2° п. 3 функция f представляется в U тейлоровским разложением с центром в a. Коэффициенты последнего вычисляются через производные f в точке a и, значит, совпадают с c_k, т. е. это разложение совпадает с (4) ▶

Естественно возникает вопрос: всякая ли полная область Рейнхарта является областью сходимости какого-либо степенного ряда? Ответ на него отрицателен, ибо, как мы сейчас докажем, области сходимости обладают некоторым дополнительным свойством.

Определение. Обозначим через

$$z \to \lambda(z) = (\ln|z_1|, \ldots, \ln|z_n|) \tag{5}$$

отображение множества $\{z \in \mathbb{C}^n\colon z_1 \ldots z_n \neq 0\}$ в пространство $\mathbb{R}^n$; *логарифмическим образом* множества $M \subset \mathbb{C}^n$ мы будем называть множество $M^* = \lambda(M_0)$, где $M_0 = \{z \in M\colon z_1 \ldots z_n \neq 0\}$. Множество M называется *логарифмически выпуклым*, если его логарифмический образ M^* является выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$.

---

[1]) Из теоремы 1 следует, что множество $\mathring{S}$ связано: любые две его точки z' и z'' можно соединить с центром (а значит, и друг с другом) кривой, принадлежащей $\mathring{S}$. Так как $\mathring{S}$ еще и открыто, то оно в самом деле является областью.

Пример. Множество $M\subset\mathbb{C}^2$, диаграмма Рейнхарта $\alpha(M)$ которого изображена на рис. 83, *а*, не является логарифмически выпуклым; его логарифмический образ $\lambda(M)$ [1]) приведен на рис. 83, *б*. Логарифмически выпуклую оболочку M (т. е. пересечение всех логарифмически выпуклых множеств, содержащих M) мы получим, если рассмотрим прообраз выпуклой оболочки множества $\lambda(M)$. Диаграмма Рейнхарта такой оболочки $\widetilde{M}_L$ отличается от $\alpha(M)$ сегментом, ограниченным отрезком гиперболы $|z_1||z_2|=rR$ (изображена пунктиром на рис. 83).

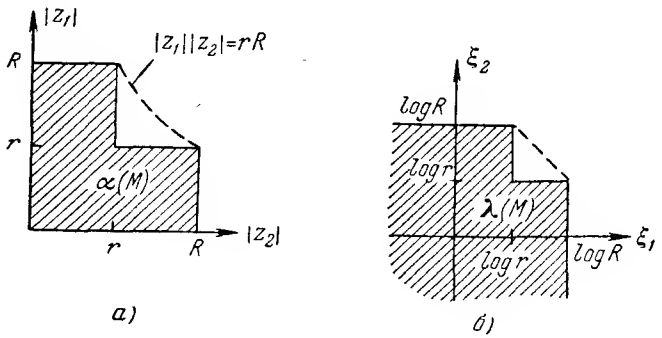


Рис. 83.

Теорема 3. *Область сходимости* $\overset{\circ}{S}$ *степенного ряда* (3) *логарифмически выпукла.*

◀ Без ограничения общности считаем $a=0$. Нам нужно доказать, что если ξ' и ξ'' — произвольные точки $S^*=\lambda(\overset{\circ}{S})$, то и $\xi=t\xi'+(1-t)\xi''\in S^*$ для любого t, $0<t<1$. В S^* существуют точки $\hat{\xi}'$, $\hat{\xi}''$ такие, что $\hat{\xi}'_\nu>\xi'_\nu$ и $\hat{\xi}''_\nu>\xi''_\nu$ $(\nu=1, \ldots, n)$; точки $\hat{z}'=\left\{e^{\hat{\xi}'_\nu}\right\}$ и $\hat{z}''=\left\{e^{\hat{\xi}''_\nu}\right\}$ принадлежат $\overset{\circ}{S}$. Рассмотрим теперь точку $\hat{\xi}=t\hat{\xi}'+(1-t)\hat{\xi}''$ и ее прообраз $\hat{z}=\left\{e^{\hat{\xi}_\nu}\right\}$, где $e^{\hat{\xi}_\nu}=(\hat{z}'_\nu)^t(\hat{z}''_\nu)^{1-t}$. Имеем

$$c_k(\hat{z})^k=[c_k(\hat{z}')^k]^t[c_k(\hat{z}'')^k]^{1-t},$$

а так как $\hat{z}'$, $\hat{z}''\in\overset{\circ}{S}$, то ряд (3) в этих точках сходится и выражения в квадратных скобках ограничены; следовательно, и члены $c_k(\hat{z})^k$ ограничены. По лемме 3° п. 3 отсюда вытекает, что $z=\left\{e^{\xi_\nu}\right\}\in\overset{\circ}{S}$, ибо у нас $\xi_\nu<\hat{\xi}_\nu$ и поэтому $e^{\xi_\nu}<e^{\hat{\xi}_\nu}$. Но это означает, что $\xi=\lambda(z)\in S^*$ ▶

[1]) Для простоты мы пишем $\lambda(M)$ вместо $\lambda(M_0)$.

В дальнейшем мы докажем, что это дополнительное свойство уже характеризует области сходимости: любая логарифмически выпуклая полная область Рейнхарта является областью сходимости некоторого степенного ряда (см. п. 27).

А сейчас отметим одно важное обстоятельство. Рассмотрим полную, но не логарифмически выпуклую область Рейнхарта (скажем, из приведенного выше примера). По теореме 2 любую функцию $f\in H(D)$ можно представить в D степенным рядом. Но по теореме 3 область сходимости этого ряда логарифмически выпукла, следовательно, он сходится по крайней мере в логарифмически выпуклой оболочке $\hat{D}_L$ области D. Сумма нашего ряда осуществляет аналитическое продолжение f из D в $\hat{D}_L$. Мы наблюдаем эффект, принципиально отличающий пространственный случай от плоского: в то время как в $\mathbb{C}^1$ любая область является областью голоморфности некоторой функции (см. п. 43 ч. I), в $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ существуют области, из которых каждая голоморфная функция непременно аналитически продолжается в более широкую область. Этот эффект обязательного аналитического продолжения мы подробно рассмотрим в гл. III.

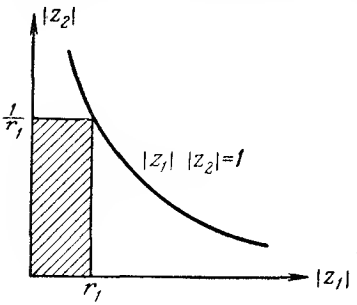


Рис. 84.

Приведем теперь более конструктивный метод описания области сходимости $\overset{\circ}{S}$ данного степенного ряда (3). Эта область исчерпывается поликругами, которые называются поликругами сходимости. Например, для ряда (1), областью сходимости которого служит $\overset{\circ}{S}=\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z_1z_2|<1\}$, такими поликругами будут $\left\{|z_1|<r_1,\ |z_2|<\frac{1}{r_1}\right\}$, $0<r_1<\infty$ (рис. 84). Приведем точное

Определение. Поликруг $U(a, r)$ называется *поликругом сходимости* ряда (3), если $U\subset\overset{\circ}{S}$, но в любом поликруге $\{z\in\mathbb{C}^n\colon |z_\nu-a_\nu|<r'_\nu\}$, где $r'_\nu\geqslant r_\nu$ $(\nu=1, \ldots, n)$ и по крайней мере одно неравенство строгое, имеются точки, в которых ряд (3) расходится. Радиусы r_ν этого поликруга называются *сопряженными радиусами сходимости.*

Теорема 4. *Сопряженные радиусы сходимости ряда* (3) *удовлетворяют соотношению*

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty}}\sqrt[|k|]{|c_k|r^k}=1 \tag{6}$$

(пространственный аналог формулы Коши—Адамара).

◀ Положим $z=a+\zeta r$ (т. е. $z_\nu=a_\nu+\zeta r_\nu$); при $|\zeta|<1$ точка z принадлежит поликругу сходимости U, ряд (3) сходится в U абсолютно, и после перегруппировки членов

$$\sum_{|k|=0}^{\infty}|c_k|(z-a)^k=\sum_{|k|=0}^{\infty}|c_k|r^k\zeta^{|k|}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(\sum_{|k|=\mu}|c_k|r^k\Big)\zeta^\mu$$

мы получим ряд по степеням ζ, сходящийся при $|\zeta|<1$. При $|\zeta|>1$ этот ряд расходится, ибо в противном случае по лемме 3° п. 3 ряд сходился бы в некотором поликруге, содержащем U. Поэтому по формуле Коши — Адамара для рядов с одним переменным

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{\sum_{|k|=\mu}|c_k|r^k}=1. \tag{7}$$

В группе членов ряда (3) с данным $|k|=\mu$ выберем максимальный член $|c_m|r^m=\max\limits_{|k|=\mu}|c_k|r^k$. Пользуясь очевидной оценкой

$$|c_m|r^m\leqslant\sum_{|k|=\mu}|c_k|r^k\leqslant(\mu+1)^n|c_m|r^m$$

и тем, что $(\mu+1)^{n/\mu}\to 1$ при $\mu\to\infty$, мы можем переписать (7) в виде соотношения

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|c_m|r^m}=1,$$

равносильного (6) ▶

Соотношение (6), которое можно записать в виде уравнения

$$\Phi(r_1,\ \ldots,\ r_n)=0, \tag{8}$$

связывающего сопряженные радиусы сходимости ряда (3), определяет границу области $\alpha(\overset{\circ}{S})$, которая изображает область сходимости $\overset{\circ}{S}$ на диаграмме Рейнхарта. Подставив в (8) $r_\nu=e^{\xi_\nu}$, получим уравнение

$$\Psi(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)=0 \tag{9}$$

границы $\lambda(\overset{\circ}{S})$ — логарифмического образа $\overset{\circ}{S}$, некоторой выпуклой области в пространстве $\mathbb{R}^n$.

8. Ряды Хартогса и Лорана. Кроме степенных рядов в теории функций нескольких комплексных переменных рассматривают и ряды других типов. Важнейшими из них являются так называемые ряды Хартогса. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{|k|=0}^{\infty}c_k(z-a)^k \tag{1}$$

и в произвольной точке z его области сходимости $\overset{\circ}{S}$ перегруппируем члены этого ряда, расположив их по степеням одной из разностей $z_\nu - a_\nu$, скажем n-й (это законно в силу абсолютной сходимости). Мы получим ряд

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu ('z)(z_n - a_n)^\mu \tag{2}$$

(μ — скалярный индекс), коэффициенты которого g_μ голоморфны в $'\overset{\circ}{S}$ — проекции области $\overset{\circ}{S}$ в пространство $\mathbb{C}^{n-1}$.

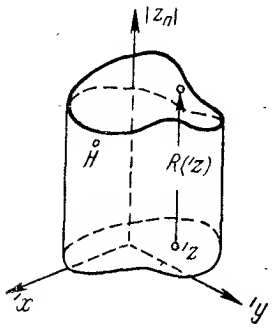


Рис. 85.

Заметим, что такая перегруппировка членов ряда может привести к расширению области сходимости. Например, степенной ряд

$$\frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)} = \sum_{|k|=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

сходится в бикруге $\{|z_1|<1,\ |z_2|<1\}$. После перегруппировки членов получаем ряд

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1}\right) z_2^\mu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z_2^\mu}{1-z_1},$$

сходящийся в области $\{z_1 \neq 1,\ |z_2|<1\}$.

Определение. Ряд вида (2), коэффициенты g_μ которого — голоморфные функции $'z=(z_1, \ldots, z_{n-1})$, называется *рядом Хартогса* с плоскостью центров $\{z_n=a_n\}$. *Областью сходимости* этого ряда называется открытое ядро $\overset{\circ}{H}$ множества точек $('z, z_n)$ таких, что ряд (2) с коэффициентами $g_\mu('z)$ сходится в точке z_n и коэффициенты голоморфны в точке $'z$. Радиус сходимости $R('z)$ этого ряда (рассматриваемого как степенной при фиксированном $'z$) называется радиусом Хартогса.

Так как вместе с каждой точкой z^0 области сходимости $\overset{\circ}{H}$ ряда Хартогса принадлежат и все точки $z=('z^0, z_n)$, где $|z_n - a_n| \leqslant |z_n^0 - a_n|$, то $\overset{\circ}{H}$ всегда является полной областью Хартогса с плоскостью симметрии $\{z_n=a_n\}$ (см. рис. 85, где $a_n=0$). Области этого типа играют для рядов Хартогса такую же роль, как области Рейнхарта для степенных рядов. В частности, справедлива

Теорема 1. *Любая функция f, голоморфная в полной области Хартогса D с плоскостью симметрии $\{z_n=a_n\}$,*

представляется в D разложением

$$f(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu('z)(z_n-a_n)^\mu \tag{3}$$

с коэффициентами, голоморфными в проекции $'D$ этой области в $\mathbb{C}^{n-1}$.

◀ Вместе с каждой точкой z области D принадлежит и поликруг $U={}'U\times U_n$, где ${}'U\subset\mathbb{C}^{n-1}$ — достаточно малый поликруг с центром в проекции $'z$ точки z, а $U_n\subset\mathbb{C}$ — круг с центром a_n, содержащий точку z_n. В U функция f голоморфна по z_n при любом $'z\in{}'U$ и, следовательно, разлагается в ряд (3) с коэффициентами

$$g_\mu('z)=\frac{1}{\mu!}\frac{\partial^\mu f('z,\ a_n)}{\partial z_n^\mu}.$$

Эти коэффициенты, однако, определены и голоморфны не только в $'U$, но и во всей проекции $'D$ области D, поэтому и разложение (3) действует во всей области D ▶

Далее, не каждая полная область Хартогса оказывается областью сходимости некоторого ряда Хартогса: в п. 27 мы покажем, что области сходимости характеризуются дополнительным свойством, которым должен обладать радиус $R('z)$.

В заключение опишем вкратце пространственные аналоги рядов Лорана.

Теорема 2. *Всякую функцию f, голоморфную в произведении круговых колец $\Pi=\{z\in\mathbb{C}^n:\ r_\nu<|z_\nu-a_\nu|<R_\nu\}$, можно представить в Π в виде кратного ряда Лорана*

$$f(z)=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k, \tag{4}$$

в котором суммирование распространяется на все целочисленные векторы $k=(k_1,\ \ldots,\ k_n)$, а коэффициенты

$$c_k=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{k+1}}, \tag{5}$$

где Γ — произведение окружностей γ_ν: $\zeta_\nu=a_\nu+\rho_\nu e^{it}$ $(\nu=1,\ \ldots,\ n;$ $r_\nu<\rho_\nu<R_\nu;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

◀ Разложение (4) получается обычным образом: мы выбираем $\rho_\nu^\pm$ так, чтобы $(\rho_\nu^-,\ \rho_\nu^+)\in(r_\nu,\ R_\nu)$, и функцию f в произведении колец $\{\rho_\nu^-\leqslant|z_\nu-a_\nu|\leqslant\rho_\nu^+\}$ представляем интегральной формулой Коши:

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_\varepsilon\int_{\Gamma^\varepsilon}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \tag{6}$$

Здесь $\varepsilon=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — набор, состоящий из $+$ и $-$, $\Gamma^{\varepsilon}=\gamma_1^{\varepsilon_1}\times$ $\times \ldots \times\gamma_n^{\varepsilon_n}$, где $\gamma_\nu^{\varepsilon_\nu}=\{|\zeta_\nu-a_\nu|=\rho_\nu^{\varepsilon_\nu}\}$ — окружность, ориентированная положительно, если $\varepsilon_\nu=+$, и отрицательно, если $\varepsilon_\nu=-$; суммирование распространяется на все наборы ε из n знаков. Далее мы разлагаем $\frac{1}{\zeta-z}$ в соответствующие геометрические прогрессии, интегрируем почленно и заменяем интегралы по $\gamma_\nu^{\varepsilon_\nu}$ интегралами по γ_ν (с изменением знака, если $\varepsilon_\nu=-$) ▶

Особенно интересны лорановские разложения в окрестности бесконечных точек пространства $\overline{\mathbb{C}}^n$. Они характеризуются тем, что радиусы R_ν с индексами, соответствующими бесконечным координатам точки, равны бесконечности. Такими разложениями, в частности, представляются функции, голоморфные в бесконечных точках $\overline{\mathbb{C}}_n$. Напишем для примера разложение функции f, голоморфной в точке $(a_1,\infty)\in\overline{\mathbb{C}}^2$, где $a_1\neq\infty$. По определению п. 3 функция $f\left(\zeta_1, \frac{1}{\zeta_2}\right)=\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$ голоморфна в точке $(a_1, 0)$ и, значит, представляется рядом Тейлора

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2)=\sum_{k_1,\ k_2=0}^{\infty} c_{k_1k_2}(\zeta_1-a_1)^{k_1}\zeta_2^{k_2},$$

сходящимся в некотором бикруге $\{|\zeta_1-a_1|<r_1, |\zeta_2|<r_2\}$. Подставляя сюда $\zeta_1=z_1$, $\zeta_2=\frac{1}{z_2}$, получим нужное разложение Лорана функции f:

$$f(z_1, z_2)=\sum_{k_1,\ k_2=0}^{\infty} c_{k_1k_2}\frac{(z_1-a_1)^{k_1}}{z_2^{k_2}};$$

оно сходится в окрестности $\left\{|z_1-a_1|<r_1, |z_2|>\frac{1}{r_2}\right\}$ точки (a_1, ∞).

Области сходимости рядов Лорана (4) являются, очевидно, областями Рейнхарта. Кроме того, если область сходимости содержит какую-либо точку z^0 с координатой $z_\nu^0=a_\nu$, то в разложении (4) не может быть отрицательных степеней разности $z_\nu-a_\nu$, т. е. относительно этой разности (4) является тейлоровским разложением. Поэтому области сходимости рядов Лорана являются так называемыми *относительно полными* областями Рейнхарта. Область Рейнхарта называют относительно полной, если она при фиксированном ν либо не пересекается с плоскостью $\{z_\nu=a_\nu\}$, либо вместе с каждой точкой z^0 содержит и все точки z, для которых $|z_\nu-a_\nu|\leqslant|z_\nu^0-a_\nu|$, а остальные координаты те же, что z^0 (это условие выполняется для всех ν).

Таким образом, если область Рейнхарта не пересекается ни с одной из плоскостей $\{z_\nu = a_\nu\}$, то условие относительной полноты не накладывает никаких ограничений, пересечение же с каждой из таких областей влечет за собой дополнительное условие. Для примера на рис. 86, *а* и *б* изображены относительно полные, а на рис. 86, *в* — неполная область Рейнхарта.

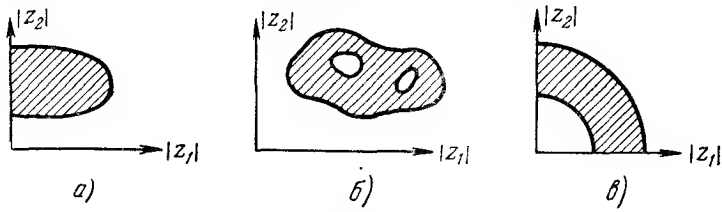


Рис. 86.

Так же как в случае рядов Тейлора, доказывается, что области сходимости рядов Лорана являются еще логарифмически выпуклыми. Всякая функция f, голоморфная в относительно полной области Рейнхарта D, представляется в D рядом Лорана (4) (и такое представление осуществляет аналитическое продолжение f в логарифмически выпуклую оболочку D, если D не логарифмически выпукла).

Можно рассматривать и другой аналог рядов Лорана. Именно, всякую функцию f, голоморфную в области Хартогса вида $\{z \in \mathbb{C}^n: {}'z \in {}'D, r({}'z) < |z_n - a_n| < R({}'z)\}$, где ${}'D$ — область из $\mathbb{C}^{n-1}$ (рис. 87), можно представить в этой области рядом *Хартогса — Лорана*

$$f(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} g_\mu({}'z)(z_n - a_n)^\mu, \qquad (7)$$

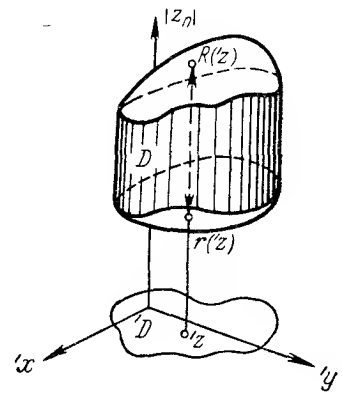


Рис. 87.

где $g_\mu \in H({}'D)$. Области сходимости таких рядов характеризуются дополнительными свойствами радиусов $r({}'z)$ и $R({}'z)$, которые мы укажем в п. 27.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что в $\mathbb{C}^n$ всякая действительная гиперплоскость (т. е. гиперплоскость в $\mathbb{R}^{2n}$) задается уравнением $\operatorname{Re} l(z) = \alpha$, где $l(z) = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$ — комплексная линейная функция и $\alpha \in \mathbb{R}$. Получить из этого, что

через любую точку действительной гиперплоскости $S\subset\mathbb{C}^n$ проходит принадлежащая S аналитическая (комплексная) гиперплоскость.

2. Построить пространственный аналог стереографической проекции и ввести с ее помощью сферическую метрику в $\overline{\mathbb{C}}^n$.

3. Рассмотреть все случаи пересечения сферы $\{|z|=1\}\subset\mathbb{C}^n$ с аналитическими прямыми $z=a+\omega\zeta$ $(a, \omega\in\mathbb{C}^n, \zeta\in\mathbb{C})$.

4. Описать сечения шара $\{|z|<1\}\subset\mathbb{C}^2$ и бикруга $\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$ трехмерными плоскостями $y_2=\alpha$ при различных $\alpha\in\mathbb{R}$.

5. Доказать, что преобразование Рейнхарта $\alpha(z)=(|z_1|, \ldots, |z_n|)$ переводит любую область $D\subset\mathbb{C}^n$, не пересекающуюся с множеством $\{z_1\ldots z_n=0\}$, в область пространства $\mathbb{R}^n$.

6. Доказать, что область Хартогса $D\subset\mathbb{C}^n$ выпукла тогда и только тогда, когда ее образ $\beta(D)$ при преобразовании $\beta(z)=('z, |z_n|)$ является выпуклой областью в $\mathbb{R}^{2n-1}$.

7. Доказать, что каждая комплексно одномерная аналитическая плоскость из $\mathbb{C}^n$ имеет в $\mathbb{P}^n$ ровно одну бесконечную точку.

8. Доказать, что любая функция f, голоморфная во всех точках комплексно $(n-1)$-мерной проективной плоскости $\mathbb{P}^{n-1}$ из $\mathbb{P}^n$, постоянна.

9. Пусть $f(z)$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$ такая, что $|f(z)|\leqslant c(1+|z|)^m$ для некоторых констант c, $m\geqslant 0$ и всех $z\in\mathbb{C}^n$. Доказать, что $f(z)$ — многочлен степени не выше m.

10. Пусть $f(z)$ голоморфна в окрестности точки $a\in\mathbb{C}^n$ и равна нулю на некоторой $(2n-1)$-мерной плоскости, проходящей через эту точку. Доказать, что $f(z)\equiv 0$ в окрестности a.

11. Доказать, что всякая функция, голоморфная в окрестности точки $0\in\mathbb{C}^2$ и равная нулю на двумерной плоскости $z_1=\bar{z}_2$, равна нулю тождественно в окрестности $0\in\mathbb{C}^2$.

12. Пусть $f(z)$ голоморфна в бикруге $U=\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$ и равна нулю на дуге $\left\{z_2=\bar{z}_1,\ y_1=x_1\sin\dfrac{1}{x_1}\right\}$. Доказать, что $f(z)\equiv 0$ в U.

13. Привести пример последовательности точек в единичном поликруге, сходящейся к началу координат и являющейся множеством единственности для функций, голоморфных в этом поликруге.

14. Построить пример замкнутого множества на остове бикруга, которое имеет двумерную меру нуль и является множеством единственности для функций, голоморфных в бикруге и непрерывных в его замыкании.

15. Доказать, что если функции f и g голоморфны в окрестности замкнутого бикруга $\overline{U}$ и совпадают на подмножестве его остова, имеющем положительную меру размерности 2, то эти f и g совпадают тождественно в $\overline{U}$.

16. Доказать, что если при каждом фиксированном $(z_1^0, \ldots, z_{\nu-1}^0, z_{\nu+1}^0, \ldots, z_n^0)$, $\nu=1, \ldots, n$, функция $f(z_1, \ldots, z_n)$

а) является многочленом относительно z_ν, то она — многочлен;

б) является рациональной функцией от z_ν, то она — рациональная функция.

17. Привести пример функции $f(z_1, z_2)$, голоморфной по z_1 в $\{|z_1|<1\}$ для любого z_2, $|z_2|<1$, непрерывной по z_2 в $\{|z_2|<1\}$ для любого z_1, $|z_1|<1$, и не являющейся непрерывной по $z=(z_1, z_2)$ в бикруге $\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$.

18. Показать, что гармоническая по каждому переменному функция x_1x_2 в $\mathbb{C}^2$ не является действительной частью никакой голоморфной функции. Доказать, что функция является действительной частью голоморфной функции тогда и только тогда, когда она гармонична на каждой аналитической прямой.

19. Пусть $f(z)$ голоморфна в поликруге $U\subset\mathbb{C}^n$ и $f(0)=0$. Доказать, что $|f(z)|\leqslant\rho(z)\sup\limits_U|f|$ для всех $z\in U$, где $\rho(z)=\max\limits_\nu|z_\nu|$. Когда имеет место равенство?

20. Доказать, что если f голоморфна в бикруге $U=\{|z_1|<1,\ |z_2|<1\}$, непрерывна в его замыкании, а на остове Γ этого бикруга $|f|=\text{const}$, то f — рациональная функция.

21. Для функций $f\in C^2(\overline{U})$ в бикруге $\overline{U}$ вывести аналог формулы Коши — Грина для функций на плоскости (п. 17 ч. I).

22. Пусть $f(z)$ голоморфна в окрестности $0\in\mathbb{C}^n$ и $f(0, z_n)/z_n^m$ голоморфна и не равна нулю в окрестности 0. Доказать, что для всякой функции g, голоморфной в окрестности 0, найдется голоморфная функция $r(z)$, которая по z_n является многочленом степени $<m$, такая, что $g\equiv r\pmod f$, т. е. $g=qf+r$ для некоторой функции q, голоморфной в окрестности 0.

23. Пусть I — замкнутый идеал в кольце K всех функций, голоморфных в окрестности $0\in\mathbb{C}^n$ (каждая — в своей). Доказать, существование конечного числа функций $f_1, \ldots, f_k\in I$ таких, что $I=f_1K+\ldots+f_kK$ (т. е. всякая функция $f\in I$ представима в виде $f=f_1g_1+\ldots+f_kg_k$, где все $g_i\in K$).

24. Назовем границей Бергмана области D минимальное замкнутое множество $B\subset\partial D$ такое, что $\sup\limits_{z\in B}|f(z)|=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|$ для всех функций, голоморфных в $\overline{D}$. Очевидно, что B содержится в границе Шилова S области D. Доказать, что для области $D=\{0<|z_1|<1,\ |z_2|<|z_1|^{-\ln|z_1|}\}\subset\mathbb{C}^2$ эти границы различны: $S=\{|z_1|\leqslant 1,\ |z_2|=|z_1|^{-\ln|z_1|}\}$, а $B=\{|z_1|=1,\ |z_2|=1\}$.

25. Построить степенные ряды, для которых областью сходимости являются

а) шар $\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$,

б) область $\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z_1|+|z_2|<1\}$.

Построить степенные ряды, для которых множеством сходимости являются

а) $\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z|<1\}\cup\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z|<2,\ z_2=0\}$,

б) $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\{z\in\mathbb{C}^2\colon |z|<1,\ z_2=nz_1\}$.

26. Доказать, что любая выпуклая область Рейнхарта является логарифмически выпуклой.

ГЛАВА II

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В предыдущей главе мы уже рассматривали интегральную формулу Коши для функций нескольких комплексных переменных. Однако мы писали ее только для поликругов, и в таком виде она распространяется лишь на поликруговые области. Чтобы распространить эту формулу на области более общего вида, нужно развить соответствующий топологический и аналитический аппарат.

§ 4. Многообразия и формы

Что и по каким объектам мы будем интегрировать? Здесь мы дадим ответы на эти вопросы. Интегрировать мы будем по многообразиям некоторые комбинации произведений дифференциалов, называемые дифференциальными формами. Выясним подробнее эти понятия.

9. Понятие многообразия. Хотя в этой главе мы будем рассматривать многообразия только в евклидовом пространстве, но в дальнейшем нам встретится более общая ситуация многообразий в некотором абстрактном пространстве элементов аналитических функций (пространственный аналог римановых поверхностей, ср. п. 32 ч. I). Поэтому мы сразу даем общее

Определение 1. Множество M в хаусдорфовом пространстве X называется *m-мерным многообразием*, если выполнены следующие условия:

1°. Существует семейство окрестностей U_j в относительной топологии M ($j\in J$, множество индексов J не обязательно счетное), покрывающих M ($M=\bigcup\limits_{j\in J} U_j$) и гомеоморфных m-мерному евклидову шару, т. е. для всех $j\in J$ определены гомеоморфизмы

$$T_j\colon\quad U_j \to B_j \tag{1}$$

на шары $B_j=\{t^j\in\mathbb{R}^m\colon |t^j|<(1)\}$; переменное $t^j=(t_1^j, \ldots, t_m^j)$ называется *локальным параметром*, действующим в окрестности U_j.

2°. Если $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, то отображение

$$T_j\circ T_i^{-1} \tag{2}$$

открытого подмножества шара B_i, которое соответствует пересечению $U_i\cap U_j$, в шар B_j гомеоморфно; отображения (2) на-

зываются *соотношениями соседства*, связывающими окрестности U_i и U_j.

3°. Из покрытия $M=\bigcup_{j\in J} U_j$, о котором говорится в 1°, можно выделить не более чем счетное покрытие $M=\bigcup_{\mu=1}^{\infty} U_{j_\mu}$.

(Приведем некоторые пояснения. Хаусдорфово пространство — это топологическое пространство, для которого справедлива аксиома отделимости (см. п. 32 ч. I). Относительной топологией на множестве M топологического пространства X называется топология на M, в которой окрестностями объявляются пересечения с M окрестностей пространства X. То, что в качестве образов $T(U)$ окрестностей $U\subset M$ в условии 1° приняты шары радиуса 1, несущественно; их можно заменить любыми гомеоморфными им множествами в $\mathbb{R}^m$, например самим $\mathbb{R}^m$. Гомеоморфность соотношений соседства (2) очевидным образом следует из условия 1°; мы выделили это условие лишь для удобства дальнейших формулировок.)

Итак, m-мерное многообразие локально устроено так же, как m-мерный евклидов шар. В каждой окрестности U оно описывается локальным параметром $t=(t_1, \ldots, t_m)$, причем параметры, действующие в пересекающихся окрестностях, связаны гомеоморфными соотношениями соседства. Локальные параметры часто называют также *локальными координатами*.

Функции, заданные на многообразии M, мы можем локально рассматривать как функции параметра. Однако не всякий набор функций локальных координат определяет функцию на многообразии: мы должны потребовать независимость этих локальных функций от выбора параметра, или, иначе, их инвариантность при изменениях параметра. (Сравните: когда в физике вводят какие-либо величины как функции координат, то точно так же требуют их независимости от координат, иначе они не будут иметь физического смысла. Например, вводя понятие дивергенции или ротора векторного поля при помощи координат, дают инвариантные определения этих величин, не зависящие от выбора координат, и тем самым устанавливают, что эти величины являются физическими.)

Определение 2. Говорят, что на многообразии M задана *функция* f, если в каждой окрестности $U_i\subset M$ задана функция локального параметра t^i, действующего в U_i:

$$f|_{U_i}=f_i(t^i),\quad t^i\in B_i, \tag{3}$$

причем это задание инвариантно относительно замены параметра: если $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, то в части шара B_i, соответствующей

в силу гомеоморфизма T_i пересечению $U_i \cap U_j$, имеем

$$f_i(t^i) = f_j \circ T_j \circ T_i^{-1}(t^i). \tag{4}$$

Поскольку функция на m-мерном многообразии в локальных координатах выражается как функция m действительных переменных, мы можем говорить о ее дифференцируемости, гладкости, наличии у нее вторых частных производных и т. д. Однако если мы не налагаем на соотношения соседства (2) никаких дополнительных ограничений, то лишь свойство непрерывности функции является инвариантным, а уже свойство дифференцируемости, вообще говоря, неинвариантно. В самом деле, если какое-либо соотношение соседства (2) недифференцируемо, то функция f, дифференцируемая в зависимости от локальных координат t^i, может оказаться недифференцируемой в зависимости от координат t^j.

Таким образом, мы приходим к необходимости введения дополнительных ограничений на соотношения соседства.

Определение 3. Многообразие M называется *дифференцируемым*, *гладким* или многообразием *класса* C^p, если все соотношения соседства $T_j \circ T_i^{-1}$, его определяющие, соответственно дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы или имеют непрерывные частные производные до порядка p включительно.

Многообразие в смысле определения 1 можно считать многообразием класса C^0, гладкое многообразие является многообразием класса C^1. Можно ввести также понятие многообразия *класса* C^∞, имея в виду многообразия, все соотношения соседства которых и бесконечно дифференцируемы, т. е. имеют непрерывные частные производные всех порядков.

На гладком многообразии M можно рассматривать дифференцируемые и непрерывно дифференцируемые функции, понимая под ними функции, которые в любой окрестности $U \subset M$ дифференцируемо или непрерывно дифференцируемо зависят от соответствующего локального параметра (это свойство, очевидно, является инвариантным относительно замены параметров). Точно так же на многообразии класса C^p можно рассматривать функции классов C^q $(q \leqslant p)$, а на многообразии класса C^∞ — функции любых классов C^p и бесконечно дифференцируемые функции.

До сих пор мы говорили о действительных многообразиях и о дифференцируемости многообразий и функций в смысле действительных переменных. Однако в четномерном многообразии M, пусть размерности $2m$, можно ввести *комплексную структуру*, если в каждой окрестности $U \subset M$ вместо действи-

тельных координат $t=(t_1, \ldots, t_{2m})$ рассматривать комплексные координаты

$$\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_m); \quad \zeta_\nu=t_\nu+it_{m+\nu} \qquad (\nu=1, \ldots, m) \tag{5}$$

и гомеоморфизмы T: $U\to B$ на шары $\{|\zeta|<1\}$ в комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$.

Соотношение соседства $T_j\circ T_i^{-1}$ для такого многообразия будет осуществлять гомеоморфное отображение открытого подмножества шара $B_i\subset\mathbb{C}^m$ в шар $B_j\subset\mathbb{C}^m$. Это отображение задается посредством m функций m комплексных переменных

$$\zeta_\nu^j=\varphi_\nu^{ij}(\zeta^i); \qquad \nu=1, \ldots, m; \ i, \ j\in J, \tag{6}$$

которые можно записать при помощи одной векторной функции $\varphi^{ij}=(\varphi_1^{ij}, \ldots, \varphi_m^{ij})$ в виде

$$\zeta^j=\varphi^{ij}(\zeta^i); \qquad i, \ j\in J \tag{7}$$

(у нас, следовательно, $\varphi^{ij}=T_j\circ T_i^{-1}$). Наиболее интересным для нас случаем является тот, когда все φ_ν^{ij} являются голоморфными функциями m комплексных переменных, т. е. отображения $\varphi^{ij}=T_j\circ T_i^{-1}$ — голоморфными гомеоморфизмами, или, как короче говорят, — *голоморфизмами*.

Определение 4. Четномерное многообразие M (размерности $2m$) называют *комплексно аналитическим* или, короче, комплексным многообразием (комплексной) размерности m, если в нем введена комплексная структура так, что все соотношения соседства $\varphi^{ij}=T_j\circ T_i^{-1}$ являются голоморфизмами соответствующих открытых подмножеств шаров $B_i\subset\mathbb{C}^m$ в шары B_j.

Очевидно, что комплексно аналитические многообразия являются многообразиями класса C^∞.

Примеры.

1. Пространство $\mathbb{C}^n$ является комплексно аналитическим многообразием размерности n. Оно покрывается одной окрестностью — самим $\mathbb{C}^n$; в качестве локальных координат можно принять комплексные координаты $z_1, \ldots, z_n$ (они действуют во всем $\mathbb{C}^n$).

2. Комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^n$. Точками его служат классы пропорциональных наборов комплексных чисел $(\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$. Обозначим через U_1 множество всех точек из $\mathbb{P}^n$, для которых $\omega_1\neq 0$. Каждой точке из U_1 можно сопоставить n чисел $z_1^1=\frac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, z_n^1=\frac{\omega_{n+1}}{\omega_1}$, т. е. точку $z^1=\{z_\nu^1\}\in\mathbb{C}^n$, причем это соответствие $U_1\to\mathbb{C}^n$ является гомеоморфизмом. Аналогично определяются множества U_μ точек из $\mathbb{P}^n$, для которых $\omega_\mu\neq 0$, а также координаты $z^\mu=\{z_\nu^\mu\}$ (где z_ν^μ — отношения

к ω_μ остальных ω_ν) и гомеоморфизмы $U_\mu \to \mathbb{C}^n$ $(\mu = 2, \ldots, n)$. Таким образом, $\mathbb{P}^n$ покрывается конечной системой окрестностей, гомеоморфных пространству $\mathbb{C}^n$. Легко проверить, что соотношения соседства, возникающие при этом, являются голоморфизмами. Следовательно, $\mathbb{P}^n$ является комплексно аналитическим многообразием размерности n.

3. Римановы поверхности аналитических функций одного переменного являются комплексно аналитическими многообразиями размерности 1 (см. п. 32 ч. I). Для функций нескольких переменных аналогичное понятие будет рассмотрено в п. 28.

На комплексно аналитическом многообразии можно ввести понятие голоморфной функции:

Определение 5. Функция f называется *голоморфной* на m-мерном комплексно аналитическом многообразии M, если в каждой окрестности $U \subset M$ она представляется как голоморфная функция локального параметра $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in \mathbb{C}^m$, действующего в этой окрестности.

Это определение инвариантно относительно замены параметров при помощи соотношений соседства, ибо голоморфизмы сохраняют свойство голоморфности.

Отметим два простых свойства функций, голоморфных на связных [1]) аналитических многообразиях.

Теорема 1 (единственности). *Если две функции f и g, голоморфные на связном комплексно аналитическом многообразии M, совпадают на непустом открытом (в топологии M) подмножестве M, то они совпадают всюду на M.*

◀ Обозначим через $\mathscr{E}$ открытое ядро совокупности всех точек $P \in M$, в которых $f(P) = g(P)$; оно по условию непусто. Покажем, что $\mathscr{E}$ является и замкнутым множеством. В самом деле, пусть точка $P_0 \in M$ является предельной точкой $\mathscr{E}$. В окрестности $U \subset M$ этой точки действует локальный параметр $\zeta = T(P)$, и функции $f \circ T^{-1}(\zeta)$, $g \circ T^{-1}(\zeta)$ голоморфны в точке $\zeta^0 = T(P_0)$ шара $B \subset \mathbb{C}^m$. В любой окрестности $V \subset B$ точки ζ^0 найдется точка ζ^1 такая, что $P_1 = T^{-1}(\zeta^1) \in \mathscr{E}$, и так как $f \equiv g$ в некоторой окрестности P_1, то $f \circ T^{-1} \equiv g \circ T^{-1}$ в некоторой окрестности ζ^1. По теореме единственности из п. 6 последнее тождество справедливо всюду в V, поэтому $P_0 \in \mathscr{E}$.

Итак, $\mathscr{E}$ непусто и одновременно замкнуто и открыто. Так как M по условию связно, то отсюда следует, что $\mathscr{E} \equiv M$, т. е. $f \equiv g$ всюду на M ▶

[1]) Определение связности, данное в п. 2 ч. I, годится для множеств любого топологического пространства. Напомним его: множество M называется *связным*, если его нельзя разбить на две непустые части M_1 и M_2 так, что оба пересечения $\overline{M_1} \cap M_2$ и $M_1 \cap \overline{M_2}$ пусты (через $\overline{M_i}$ обозначено замыкание множества M_i).

Теорема 2 (принцип максимума). *Если функция f голоморфна на связном комплексно аналитическом многообразии M и $|f|$ достигает максимума во внутренней точке M, то f постоянна всюду на M.*

◀ Пусть $|f|$ достигает максимума в точке $P_0 \in M$; рассмотрим локальный параметр $\zeta = T(P)$, действующий в окрестности этой точки. Модуль функции $f \circ T^{-1}(\zeta)$, голоморфной в точке $\zeta^0 = T(P_0)$, достигает максимума в этой точке; следовательно, по принципу максимума из п. 6 функция $f \circ T^{-1}$ постоянна в некоторой окрестности ζ^0, и, значит, f постоянна в некоторой окрестности точки P_0. По предыдущей теореме f постоянна на всем M ▶

Как уже говорилось в начале пункта, наиболее важен для нас случай многообразий, расположенных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом случае гомеоморфизмы окрестностей m-мерного многообразия M и шаров пространства $\mathbb{R}^m$ можно задавать при помощи функций

$$x_\nu = x_\nu(t_1, \ldots, t_m), \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Впрочем, имеет место теорема Уитни[1]), по которой произвольное дифференцируемое многообразие размерности m можно реализовать как многообразие в пространстве $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Определение 6. Гладкое m-мерное многообразие $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *m-мерной поверхностью*, если: 1) S связно; 2) для любой координатной окрестности $U \subset S$ отображение $B \to U$, определяемое по формулам (8), непрерывно дифференцируемо; 3) матрица $\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t_\mu}\right)$ имеет ранг m; 4) все соотношения соседства являются непрерывно дифференцируемыми гомеоморфизмами с не обращающимися в нуль якобианами.

10. Дифференциальные формы. Функции на многообразиях можно рассматривать как формы нулевой степени. Примерами форм первой степени являются дифференциалы функций. Пусть M — гладкое m-мерное многообразие и f — дифференцируемая функция на нем. В локальных координатах $t = \{t_\mu\}$ дифференциал этой функции имеет вид

$$\omega = df = \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial t_\mu}\, dt_\mu. \tag{1}$$

---

[1]) Точную формулировку и доказательство теоремы Уитни можно найти в книге: Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956, стр. 32—36.

При переходе к новым локальным координатам $t \to \tau$ дифференциал преобразуется к виду $\omega = \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_\mu} d\tau_\mu$, где

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_\mu} = \sum_\nu \frac{\partial f}{\partial t_\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial \tau_\mu}. \tag{2}$$

Обобщая этот пример, мы будем называть *дифференциальной формой первой степени* на гладком многообразии M любое выражение, которое в локальных координатах $t=\{t_\mu\}$, действующих в окрестности $U \subset M$, имеет вид

$$\omega = \sum_\mu a_\mu \, dt_\mu, \tag{3}$$

а при переходе к новым локальным координатам $t \to \tau$ меняется так же, как дифференциал, т. е. преобразуется к виду $\omega = \sum_\mu \alpha_\mu \, d\tau_\mu$, где

$$\alpha_\mu = \sum_\nu a_\nu \frac{\partial t_\nu}{\partial \tau_\mu}. \tag{4}$$

От форм первой степени можно брать криволинейные интегралы (т. е. интегралы по одномерным многообразиям). Мы введем формы второй степени так, чтобы от них можно было брать интегралы по двумерным многообразиям. Мы будем задавать такие формы в локальных координатах и должны выяснить, как меняются их выражения при переходе к другим координатам.

В простейшем случае плоских областей подынтегральные выражения двойных интегралов $a\,dx\,dy$ при замене переменных $(x, y) \to (u, v)$ умножаются на якобиан: форма $a\,dx\,dy$ переходит в форму $a \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} du\,dv$. Имея в виду более общие случаи, удобно ввести алгоритм умножения дифференциалов, который приводит к такому правилу замены на основании формальных выкладок. Этот алгоритм был найден Э. Картаном и называется внешним умножением дифференциалов. Мы поясним его сначала на рассматриваемом простейшем случае.

Условимся считать, что внешнее произведение одинаковых дифференциалов равно нулю: $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ ($\wedge$ — знак внешнего умножения), а различных дифференциалов — антикоммутативно: $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. Кроме того, будем предполагать, что для внешнего умножения соблюдаются обычные правила раскрытия скобок. Тогда умножение двух дифференциалов

$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$ и $dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$ формально приведет к нужному правилу замены:

$$dx\wedge dy=\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)=$$
$$=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}du\wedge dv+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}dv\wedge du=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\wedge dv.$$

Приведем теперь точное определение в более общем случае.

Определение 1. *Внешним умножением* дифференциальных форм от переменных $t_1, \ldots, t_m$ называется умножение, подчиняющееся следующим законам:

1°. Умножение на скаляр (функцию) коммутативно и ассоциативно:

$$a\wedge dt_\nu=dt_\nu\wedge a=a\,dt_\nu,\qquad dt_\mu\wedge a\,dt_\nu=a\,dt_\mu\wedge dt_\nu. \tag{5}$$

2°. Умножение дифференциалов антикоммутативно:

$$dt_\mu\wedge dt_\nu=-dt_\nu\wedge dt_\mu\quad(\mu\neq\nu),\quad dt_\nu\wedge dt_\nu=0. \tag{6}$$

3°. Умножение линейных комбинаций произведений дифференциалов (со скалярными коэффициентами) подчиняется ассоциативному и дистрибутивному законам.

Таким образом, внешнее произведение двух форм первой степени $\omega_1=\sum_{\nu=1}^{m}a_\nu dt_\nu$ и $\omega_2=\sum_{\nu=1}^{m}b_\nu dt_\nu$ имеет следующий вид:

$$(a_1dt_1+\ldots+a_mdt_m)\wedge(b_1dt_1+\ldots+b_mdt_m)=(a_1b_2-a_2b_1)dt_1\wedge dt_2+\ldots$$
$$\ldots+(a_{m-1}b_m-a_mb_{m-1})dt_{m-1}\wedge dt_m.$$

При замене переменных $t\to\tau$ коэффициенты при произведении дифференциалов, как нетрудно проверить прямой выкладкой, умножаются на соответствующие якобианы. Например, при произведении $d\tau_1\wedge d\tau_2$ будет стоять коэффициент

$$a'_1b'_2-a'_2b'_1=\sum_{\mu<\nu}{}'(a_\mu b_\nu-a_\nu b_\mu)\frac{\partial(t_\mu,t_\nu)}{\partial(\tau_1,\tau_2)},$$

где штрих в обозначении суммы показывает, что суммирование надо вести по всем индексам μ, ν при условии $1\leqslant\mu<\nu\leqslant m$ (упорядоченное суммирование).

Произведение двух форм первой степени является примером форм второй степени. Вообще же под *формой второй степени* на гладком многообразии M мы будем понимать выражение, которое в локальных координатах t имеет вид

$$\omega=\sum{}'a_{\mu\nu}dt_\mu\wedge dt_\nu, \tag{7}$$

где штрих обозначает упорядоченное суммирование ($\mu<\nu$), а при замене координат $t \to \tau$ переходит в аналогичное выражение с коэффициентами

$$\alpha_{\mu\nu} = \sum{}' a_{ij} \frac{\partial (t_i, t_j)}{\partial (\tau_\mu, \tau_\nu)}. \tag{8}$$

Мы можем пользоваться и неупорядоченным суммированием (без штриха). Для этого условимся считать, что матрица $(a_{\mu\nu})$ кососимметрична, т. е. что $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$, и тогда перепишем форму (7) в виде

$$\omega = \frac{1}{2} \sum a_{\mu\nu}\, dt_\mu \wedge dt_\nu. \tag{7'}$$

Закон изменения коэффициентов можно тогда переписать так:

$$\alpha_{\mu\nu} = \sum a_{ij} \frac{\partial t_i}{\partial \tau_\mu} \frac{\partial t_j}{\partial \tau_\nu} \tag{8'}$$

— очевидно, что это равносильно соотношению (8).

Теперь мы можем дать общее определение формы.

Определение 2. *Дифференциальной формой степени* p на гладком многообразии M называется выражение, которое в произвольной системе локальных координат t имеет вид [1])

$$\omega = \sum{}' a_{\nu_1 \dots \nu_p}\, dt_{\nu_1} \wedge \dots \wedge dt_{\nu_p} = \frac{1}{p!} \sum a_{\nu_1 \dots \nu_p}\, dt_{\nu_1} \wedge \dots \wedge dt_{\nu_p}, \tag{9}$$

а при замене переменных $t \to \tau$ переходит в аналогичное выражение с коэффициентами [2])

$$\alpha_{\nu_1 \dots \nu_p} = \sum a_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial t_{i_1}}{\partial \tau_{\nu_1}} \dots \frac{\partial t_{i_p}}{\partial \tau_{\nu_p}} = \sum{}' a_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial (t_{i_1}, \dots, t_{i_p})}{\partial (\tau_{\nu_1}, \dots, \tau_{\nu_p})}. \tag{10}$$

Форма ω называется *формой класса* C^q, если ее коэффициенты (как функции локальных параметров) имеют непрерывные частные производные q-го порядка, — это определение инвариант-

---

[1]) В первой сумме (9) суммирование ведется по упорядоченным системам индексов $1 \leqslant \gamma_1 < \dots < \gamma_p \leqslant m$, а во второй — по всем системам, но матрица (a) предполагается кососимметрической по индексам: при четной перестановке индексов коэффициенты не меняются, а при нечетной меняют знак.

[2]) Закон изменения коэффициентов дифференциальных форм имеет тензорный характер. Совокупность этих коэффициентов (a) образует тензор (кососимметрический, ковариантный).

но лишь для многообразий класса C^q (см. определение 3 п. 9).

Дифференциальные формы можно складывать, умножать на функцию (скаляр), а также умножать друг на друга внешним образом (при этом произведение формы степени p на форму степени q является формой степени $p+q$). Совокупность всех форм степени p на многообразии M образует группу по сложению, которую мы будем обозначать через Ω^p.

До сих пор мы пользовались записью форм в действительных координатах, однако для дальнейшего удобнее комплексная форма записи. Рассмотрим случай гладкого m-мерного многообразия M, расположенного в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Если обозначить $z_\nu = x_\nu + ix_{n+\nu}$, то эти величины на M будут функциями локальных координат: $z_\nu = z_\nu(t_1, \ldots, t_m)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Дифференциальная форма степени $p \leqslant m$ на многообразии M:

$$\omega = \sum{}' a_{i_1 \ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = \sum{}' a_I\, dx_I, \tag{11}$$

где $I = (i_1, \ldots, i_p)$ — векторный индекс и $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, в этих локальных координатах принимает вид $\omega = \sum{}' \alpha_I\, dt_I$, где

$$\alpha_I = \sum{}' a_{I_1 \ldots I_p} \frac{\partial(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p})}{\partial(t_{i_1}, \ldots, t_{i_p})}. \tag{12}$$

Чтобы переписать форму (11) в комплексном виде, мы можем формально перейти от $2n$ действительных координат x_ν в $\mathbb{C}^n$ к такому же числу комплексных координат z_ν, $\bar{z}_\nu$. Для упрощения записей мы положим

$$Z_\nu = z_\nu = x_\nu + ix_{n+\nu}, \qquad Z_{n+\nu} = \bar{z}_\nu = x_\nu - ix_{n+\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

и будем рассматривать переход от x_ν к Z_ν как обычную замену переменных.

Подставляя в (11) $dx_\nu = \frac{1}{2}(dZ_\nu + dZ_{n+\nu})$ и $dx_{n+\nu} = \frac{1}{2i}(dZ_\nu - dZ_{n+\nu})$, перепишем эту форму в виде

$$\omega = \sum{}' f_I\, dZ_I, \tag{14}$$

где

$$f_I = \sum{}' a_{I_1 \ldots I_p} \frac{\partial(x_{I_1}, \ldots, x_{I_p})}{\partial(Z_{i_1}, \ldots, Z_{i_p})}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial Z_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - i\frac{\partial}{\partial x_{n+\nu}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial Z_{n+\nu}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + i\frac{\partial}{\partial x_{n+\nu}}\right)$$
$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

Часто бывает важно различать степени формы (14) по переменным z_ν и $\bar{z}_\nu$. Поэтому вводят понятие *бистепени формы*, понимая под формой бистепени (p, q) выражение вида

$$\omega = \sum{}' f_{I,J}\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q} = \\ = \sum{}' f_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad (15)$$

где $I = (i_1, \ldots, i_p)$ и $J = (j_1, \ldots, j_q)$ — векторные индексы размерности соответственно p и q.

Наиболее важен частный случай форм бистепени $(p, 0)$, коэффициенты которых являются голоморфными функциями n переменных на множестве $M \subset \mathbb{C}^n$ (т. е. голоморфными в $2n$-мерной окрестности этого множества). Такие формы записываются в виде

$$\omega = \sum{}' f_{i_1 \ldots i_p}\, dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} = \sum{}' f_I\, dz_I, \quad (16)$$

где участвуют только «малые» переменные z_ν; они называются *голоморфными формами*.

Можно рассматривать также формы на комплексно аналитическом многообразии M комплексной размерности m в произвольном хаусдорфовом пространстве. Здесь также наиболее интересен случай форм бистепени $(p, 0)$, $p \leqslant m$, которые имеют вид (16) в локальных координатах $(z_1, \ldots, z_m)$, действующих в окрестности $U \subset M$, причем коэффициенты являются голоморфными функциями на M и при замене переменных $z \to \zeta$ меняются по тензорному закону

$$f_I \to \sum{}' f_J \frac{\partial(\zeta_{I_1}, \ldots, \zeta_{I_p})}{\partial(z_{i_1}, \ldots, z_{i_p})}, \quad (17)$$

где $J = (j_1, \ldots, j_p)$.

Такие формы называются *голоморфными формами на многообразии M*.

11. Понятие интеграла от формы. Дифференциальные формы степени m введены так, чтобы от них можно было брать интегралы по m-мерным многообразиям. Интегралы берутся по ориентированным многообразиям, поэтому мы должны начать с этого понятия.

Введем сначала ориентацию в окрестности $U \subset M$. Для этого будем считать, что параметр t, действующий в U, меняется не в шаре, как раньше, а в m-мерном симплексе S^m (т. е. что задается гомеоморфизм T: $U \to S^m$). Для определенности предположим, что одна из вершин симплекса P_0 лежит в начале координат, а другие вершины P_ν имеют ν-ю координату, равную 1, и остальные 0 ($\nu = 1, \ldots, m$). Введем на S^m *ориентацию*

следующим образом: симплекс $(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ и все, получающиеся из него четной перестановкой номеров вершин, будем считать ориентированными *положительно*; симплексы, номера вершин которых образуют нечетную перестановку, — ориентированными *отрицательно*.

Часто неориентированный симплекс мы будем обозначать через S^m, ориентированные — через S^m_ε, где $\varepsilon = +$ или $\varepsilon = -$ в зависимости от ориентации. На рис. 88 изображены двумерные симплексы $S^2_+ = (P_0, P_1, P_2)$ и $S^2_- = (P_0, P_2, P_1)$.

При заданном отображении T: $U \to S^m$ мы введем две *ориентации окрестности* U в зависимости от той или иной ориентации симплекса S^m; ориентированную окрестность будет иногда обозначать через U_ε.

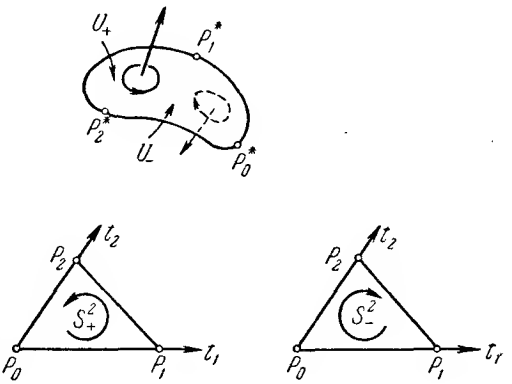


Рис. 88.

Пример. Нагляднее всего представляется ориентация в одномерном случае. Пусть $S^1 = [0, 1]$ и U — гомеоморфный образ S^1, скажем в $\mathbb{C}^n$, т. е. жорданов путь $z = z(t): S^1 \to U$. Положительной ориентацией U мы будем считать ту, которая соответствует возрастанию параметра t, т. е. положительной ориентации отрезка [0, 1]; отрицательной — ту, которая соответствует убыванию t. Ориентацию гомеоморфного образа в $\mathbb{C}^n$ двумерного симплекса S^2 при заданном отображении $z = z(t_1, t_2): S^2 \to U$ можно представлять как указание одной из двух сторон U; положительной считается та, с которой образы $P^*_\nu = z(P_\nu)$ вершин симплекса обходятся в порядке (0, 1, 2), и отрицательной — та, с которой они обходятся в порядке (0, 2, 1) (см. рис. 88).

Пусть теперь M — связное гладкое многообразие. Назовем M ориентируемым, если все соотношения соседства, его определяющие, имеют положительные якобианы. На каждом ориентируемом многообразии можно ввести две ориентации — положительную и отрицательную. Для этого достаточно ввести ту или иную ориентацию в какой-либо окрестности $U \subset M$; соотношения соседства позволяют перенести эту ориентацию во все окрестности на M, а условие ориентируемости M обеспечивает, что при этом мы не придем к противоречию: какой бы цепочкой окрестностей, связывающих U с некоторой окрестностью $V \subset M$, ни пользоваться, всегда получим одну и ту же ориентацию V. То же условие обеспечивает независимость ориентации от выбора

начальной окрестности U. На доказательстве этих утверждений мы не останавливаемся [1]).

Пример. Представим окружность на плоскости (x, y) как одномерное многообразие, покрываемое четырьмя окрестностями U_i (в U_1 и U_3 действует локальная координата x, в U_2 и U_4 — координата y; рис. 89). Ориентируем U_1 положительно (т. е. условием возрастания параметра x) и примем, что все соотношения соседства имеют положительные якобианы. Тогда на пересечении $U_1 \cap U_2$ параметр y должен возрастать вместе с x (соотношение соседства U_1 и U_2 имеет вид $y = \frac{1}{2} - \sqrt{x - x^2}$), и на U_2 вводится ориентация снизу вверх. Эта ориентация вводит на U_3 ориентацию справа налево (в самом деле, условие положительности якобиана на пересечении $U_2 \cap U_3$ влечет за собой, что y должен убывать вместе с x). Далее, U_4 окажется ориентированной сверху вниз и U_1 — слева направо. Мы снова пришли к исходной ориентации U_1.

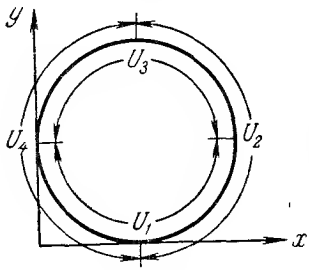


Рис. 89.

Перейдем к определению интеграла. Начнем с интеграла по одной окрестности многообразия.

Определение 1. Пусть U — ориентированная окрестность m-мерного многообразия $M \in C^1$, t — параметр, действующий в U и меняющийся в симплексе S^m; *интегралом по окрестности* U от формы $\omega \in C^0(U)$ степени m назовем

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_{S^m_\varepsilon} f(t)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m = \varepsilon \int\limits_{S^m} f(t)\, dt_1 \ldots dt_m, \tag{1}$$

где ε означает ориентацию симплекса и окрестности относительно координат $t_1, \ldots, t_m$, S^m — неориентированный симплекс.

Теорема 1. *Определение интеграла инвариантно относительно допустимой замены параметра.*

◀ Пусть $t \to \tau$ — допустимая (т. е. гомеоморфная и класса C^1) замена параметра, преобразующая S^m на S^m, и

$$J = \frac{\partial(t_1, \ldots, t_m)}{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_m)}$$

— ее якобиан (непрерывная функция τ). По правилам замены переменных в (неориентированных) кратных интегралах

$$\int\limits_{S^m} f(t)\, dt_1 \ldots dt_m = \int\limits_{S^m} f \circ t\,(\tau) |J|\, d\tau_1 \ldots d\tau_m. \tag{2}$$

[1]) См. П. С. Александров, Комбинаторная топология, Гостехиздат, М. — Л., 1947.

В силу гомеоморфности отображения $t \to \tau$ якобиан J в S^m не меняет знака. Если $J \geqslant 0$, то отображение сохраняет ориентацию, т. е. переводит S^m_ε в S^m_ε, а так как форма ω в новых координатах имеют вид $f \circ t(\tau) J d\tau_1 \wedge \ldots \wedge d\tau_m$, то по определению 1 в новых координатах

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_{S^m_\varepsilon} fJ\, d\tau_1 \wedge \ldots \wedge d\tau_m = \varepsilon \int\limits_{S^m} f|J|\, d\tau_1 \ldots d\tau_m. \qquad (3)$$

Если же $J \leqslant 0$, то отображение меняет ориентацию, т. е. переводит S^m_ε в $S^m_{-\varepsilon}$, и по тем же соображениям в новых координатах

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_{S^m_{-\varepsilon}} fJ\, d\tau_1 \wedge \ldots \wedge d\tau_m =$$

$$= -\varepsilon \int\limits_{S^m} fJ\, d\tau_1 \ldots d\tau_m = \varepsilon \int\limits_{S^m} f|J|\, d\tau_1 \ldots d\tau_m. \qquad (4)$$

В силу (2) правые части (3) и (4) совпадают с правой частью (1) ▶

Замечание. Мы вводим дифференциальные формы так, чтобы при замене переменных они менялись, как подинтегральные выражения соответствующих интегралов. Однако имеется некоторое отличие: формы при замене переменных умножаются на якобиан преобразования, а подинтегральные выражения — на модуль якобиана. Сейчас мы убедились, что именно так и надо было вводить формы, если желать, чтобы были инвариантными относительно замены переменных интегралы по ориентированным окрестностям.

Можно было бы рассматривать так называемые *нечетные* дифференциальные формы, которые (в отличие от введенных выше *четных* форм) при замене переменных умножаются на модуль якобиана. Точнее, нечетной формой степени p на многообразии M называется выражение, которое в локальных координатах t имеет вид $\omega = \sum{}' a_{\nu_1 \ldots \nu_p}\, dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_p}$, а при замене переменных $t \to \tau$ переходит в такое же выражение с коэффициентами

$$a_{\nu_1 \ldots \nu_p} = \operatorname{sgn} \frac{\partial(t_1, \ldots, t_m)}{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_m)} \sum{}' a_{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial(t_{i_1}, \ldots, t_{i_p})}{\partial(\tau_{\nu_1}, \ldots, \tau_{\nu_p})}$$

(ср. с формулами (10) п. 10). Нечетные формы приспособлены для интегрирования по неориентированным многообразиям.

Переход от интеграла по окрестности к интегралу по компактному подмножеству многообразия просто осуществляется при помощи так называемого разбиения единицы. Пусть M —

многообразие класса C^1 и $\{U_i\}$, $i\in I$, — его локально конечное[1]) покрытие окрестностями; *разбиением единицы*, соответствующим этому покрытию, называется система функций $e_i\in C^1(M)$ таких, что

1) $\sum\limits_{i\in I} e_i(x)=1$, $0\leqslant e_i(x)\leqslant 1$, для всех $x\in M$;

2) носитель e_i, т. е. замыкание множества $\{x\in M\colon e_i(x)\neq 0\}$, является компактным подмножеством U_i.

Доказательство существования разбиения единицы мы приведем для многообразий M, расположенных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Лемма. *Для любого открытого множества $U\subset\mathbb{R}^n$ и любого множества $K\Subset U$ существует функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n\to[0,1]\subset\mathbb{R}$ класса C^∞ такая, что*

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{для всех } x\in K,\\ 0 & \text{для всех } x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{U}.\end{cases}\tag{5}$$

◀ Сначала рассмотрим частный случай, когда $K=\{|x|<r\}$ и $U=\{|x|<R\}$ — концентрические шары $(0<r<R)$. Построим функцию

$$g(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t-r}}e^{-\frac{1}{R-t}}, & t\in[r,\ R],\\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus[r,\ R]\end{cases}$$

и возьмем

$$h(t)=\frac{\int\limits_t^R g(\tau)\,d\tau}{\int\limits_r^R g(\tau)\,d\tau};$$

она принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R})$, равна 1 на отрезке $(-\infty,\ r]$ и 0 на отрезке $[R,\ \infty)$. Поэтому функция $\varphi(x)=h(|x|)$ обладает нужными свойствами.

В общем случае мы устраиваем конечное (по лемме Хейне — Бореля) покрытие K шарами K_i такими, что для каждого K_i найдется концентрический с ним шар $U_i\subset U$ большего радиуса. Для каждой пары $(K_i,\ U_i)$ строим, как выше, функцию φ_i, и тогда

$$\varphi(x)=1-\prod_i\{1-\varphi_i(x)\}$$

обладает нужными свойствами ▶

---

[1]) Покрытие $\{U_i\}$ называется локально конечным, если любая точка имеет окрестность, покрываемую лишь конечным числом U_i.

Теорема 2. *Пусть $M\subset\mathbb{R}^n$ — многообразие класса C^∞. Для любого его локально конечного покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$ открытыми множествами из $\mathbb{R}^n$ существует соответствующее этому покрытию разбиение единицы $\{e_i\}$.*

◀ Каждая точка $x\in M$ имеет окрестность, пересекающуюся с конечным числом U_i. В каждой U_i мы выберем компактно принадлежащее ей множество K_i так, чтобы объединение K_i покрывало M, и для каждой пары (K_i, U_i) строим (по лемме) функцию φ_i, равную 1 в K_i и 0 вне $\overline{U}_i$. Далее рассматриваем сумму $\sum\limits_{i\in I}\varphi_i(x)$ и замечаем, что она определена в окрестности каждой точки $x\in M$ (ибо там лишь конечное число φ_i отлично от нуля) и положительна в каждой такой точке (ибо эта точка покрывается хотя бы одним K_i, а там $\varphi_i(x)=1$, остальные же $\varphi_j(x)\geqslant 0$). Функции

$$e_i(x)=\frac{\varphi_i(x)}{\sum\limits_{j\in I}\varphi_j(x)}, \tag{6}$$

очевидно, дают разбиение единицы, соответствующее покрытию $\{U_i\}$ ▶

Определение 2. Пусть K — компактное подмножество m-мерного ориентируемого многообразия M; *интегралом* по K от формы $\omega\in C^0(K)$ степени m называется

$$\int\limits_K\omega=\sum_{i\in I}\int\limits_K e_i\omega=\sum_{i\in I}\int\limits_{K\cap U_i} e_i\omega, \tag{7}$$

где $\{e_i\}$ — разбиение единицы, соответствующее некоторому покрытию $\bigcup\limits_{i\in I}U_i=M$. (Интеграл по пересечению $K\cap U_i$, где действуют локальные координаты $t^i=(t^i_1, \ldots, t^i_m)$, определен выше; в силу локальной конечности покрытия сумма в правой части содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых.)

Чтобы убедиться в корректности этого определения, нужно доказать его независимость от выбора покрытия и разбиения единицы.

Теорема 3. *Пусть $\{U_i\}$, $\{U'_j\}$ — два (локально конечных) покрытия ориентируемого многообразия M и $\{e_i\}$, $\{e'_j\}$ — соответствующие им разбиения единицы. Для любого $K\Subset M$ и формы $\omega\in C^0(K)$ интегралы от ω по K, вычисленные по этим разбиениям, совпадают.*

◀ Интеграл, вычисленный по разбиению $\{e_i\}$,

$$\int\limits_K\omega=\sum_i\int\limits_{K\cap U_i}e_i\omega$$

в силу тождества $\sum_j e'_j \equiv 1$ можно переписать так:

$$\int_K \omega = \sum_i \int_{K \cap U_i} e_i \sum_j e'_j \omega = \sum_i \sum_j \int_{K \cap U_i \cap U'_j} e_i e'_j \omega.$$

В пересечении $K \cap U_i \cap U'_j$ введем новые локальные координаты, соответствующие окрестности U'_j; в силу инвариантности интеграла и тождества $\sum_i e_i \equiv 1$ будем иметь

$$\int_K \omega = \sum_j \int_{K \cap U'_j} e'_j \sum_i e_i \omega = \sum_j \int_{K \cap U'_j} e'_j \omega.$$

Мы получили интеграл, вычисленный по разбиению $\{e'_j\}$ ▶

Если M — некомпактное многообразие и N — его некомпактное подмножество (в частности, $N = M$), то надо построить исчерпывание K_μ компактными множествами ($K_1 \subset K_2 \subset \ldots$; $\bigcup_\mu K_\mu = N$). Интеграл по N тогда определяется как предел при $\mu \to \infty$ интегралов по компактным множествам $N \cap K_\mu$, если этот предел существует и не зависит от исчерпывания (несобственный интеграл).

Примеры. 1. Пусть γ — гладкий путь $z = z(t)$: $[0, 1] \to \mathbb{C}^n$, а f — функция, голоморфная на множестве γ (т. е. голоморфная в каждой точке $z \in \gamma$); рассмотрим на γ дифференциальную форму 1-й степени $\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu$. Если отображение $z = z(t)$ гомеоморфно, то γ можно рассматривать как окрестность, а t — как локальный параметр, действующий в ней. По определению 1

$$\int_\gamma \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu = \int_0^1 \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \frac{dz_\nu}{dt} \right) dt$$

(мы считаем γ положительно ориентированным). Так как функция f голоморфна (т. е. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$), то подинтегральная функция справа является производной функции $f \circ z(t)$, и по формуле Ньютона—Лейбница (для функций действительного переменного) мы получаем

$$\int_\gamma \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu = f(z^1) - f(z^0), \tag{8}$$

где $z^0=z(0)$ и $z^1=z(1)$ — концы пути. В общем случае отображение $z=z(t)$ локально гомеоморфно (в силу условия $z'(t)\neq 0$, принятого нами для гладких путей); разбивая $[0, 1]$ на конечное число отрезков, мы придем к тому же соотношению (8).

2. Пусть D_ν — односвязные плоские области с гладкими границами ∂D_ν: $z_\nu=z_\nu(t_\nu), t_\nu\in[0, 1]$, и $D=D_1\times\ldots\times D_n$ — поликруговая область в $\mathbb{C}^n$. Остов этой области $\Gamma=\partial D_1\times\ldots\times\partial D_n$ можно рассматривать как гладкое n-мерное многообразие. Оно является гладким образом куба $Q^n=\{t\in\mathbb{R}^n: 0\leqslant t_\nu\leqslant 1\}$ при отображении $z=z(t)$: $Q^n\to\mathbb{C}^n$; ориентацию на Q^n и, следовательно, на Γ мы введем условием возрастания всех координат t_ν. Параметр $t=(t_1, \ldots, t_n)$, меняющийся в Q^n, можно использовать при вычислении интегралов по Γ, как в определении 1, хотя Γ и не является гомеоморфным образом Q^n (это доказывается разбиением единицы). Пусть $\omega\in C^0(\Gamma)$ — форма бистепени $(n, 0)$, т. е. имеющая вид $\omega=f\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$, где f — непрерывная на Γ функция. После введения параметра t форма принимает вид

$$\omega=f\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}\,dt_1\wedge\ldots\wedge dt_n=f\frac{dz_1}{dt_1}\ldots\frac{dz_n}{dt_n}\,dt_1\wedge\ldots\wedge dt_n,$$

поэтому, согласно сказанному выше,

$$\int\limits_\Gamma f\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n=\int\limits_{Q^n} f\frac{dz_1}{dt_1}\ldots\frac{dz_n}{dt_n}\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{dz_1}{dt_1}\,dt_1\ldots\int\limits_0^1 f\frac{dz_n}{dt_n}\,dt_n=\int\limits_{\partial D_1} dz_1\ldots\int\limits_{\partial D_n} f\,dz_n.$$

Таким образом, интеграл от ω по Γ совпадает с повторным интегралом. Точно так же повторный интеграл Коши, введенный в предыдущей главе, можно рассматривать как интеграл по n-мерному многообразию:

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\ldots\int\limits_{\partial D_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta_n}{\zeta_n-z_n}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\qquad(9)$$

где мы для краткости обозначили $d\zeta=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$ и $\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)}$.

§ 5. Теорема Коши — Пуанкаре

В этом параграфе мы рассмотрим многомерный аналог основной теоремы теории аналитических функций — теоремы Коши. Центральную роль здесь играет формула Стокса,

связывающая две операции: топологическую операцию взятия границы и аналитическую операцию дифференцирования форм. Начнем изучение с операции взятия границы.

12. Цепи и их границы. Рассмотрим (замкнутый) ориентированный m-мерный симплекс $S_m = \{P_{i_0} P_{i_1} \dots P_{i_m}\}$, где P_ν — вершины симплекса, взятые в каком-либо порядке; предполагается, что они находятся в общем положении [1]). Индексы $i_0, i_1, \dots, i_m$ образуют перестановку из чисел $0, 1, \dots, m$; четность этой перестановки определяет положительную или отрицательную ориентацию.

Будем считать, что ориентация S_m *индуцирует* ориентацию граней этого симплекса по следующему правилу. Грань $S^{(0)}_{m-1} = \{P_{i_1} \dots P_{i_m}\}$, получаемую из S_m отбрасыванием вершины, которая стоит на первом месте, будем считать ориентированной так же, как S_m. Ориентацию других граней будем вводить так: отбрасываемую вершину P_{i_ν} переводим на первое место и приписываем соответствующей грани ту ориентацию, которую имеет симплекс $\{P_{i_\nu} P_{i_0} \dots P_{i_{\nu-1}} P_{i_{\nu+1}} \dots P_{i_m}\}$.

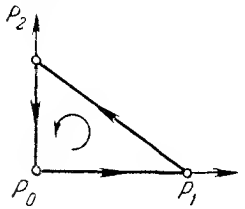


Рис. 90.

На рис. 90 изображен для примера двумерный симплекс $\{P_0P_1P_2\}$, ориентированный положительно. Индуцированная ориентация его одномерных граней следующая: $\{P_1P_2\}$, $-\{P_0\ P_2\} = \{P_2\ P_0\}$ и $\{P_0\ P_1\}$.

Определение 1. *Границей симплекса* S_m называется совокупность ∂S_m его $(m-1)$-мерных граней, взятых с индуцированной ориентацией. Условимся записывать эту совокупность как сумму:

$$\partial S = S^{(0)}_{m-1} + \dots + S^{(m)}_{m-1}. \tag{1}$$

Пример. Для симплекса $S_2 = \{P_0P_1P_2\}$ границей является

$$\partial S_2 = \{P_1\ P_2\} + \{P_2\ P_0\} + \{P_0\ P_1\}$$

(см. рис. 90). Граница одномерного симплекса $S_1 = \{P_0P_1\}$

$$\partial S_1 = P_1 - P_0.$$

Границу нульмерного симплекса (точки) будем считать равной нулю.

Определение 2. Будем называть *m-мерной цепью* отображение совокупности m-мерных симплексов $S^{(\nu)}_m$ $(\nu = 1, \dots, N)$

[1]) Это означает, что никакие 3 из P_ν не лежат на одной прямой, никакие 4 не лежат в одной двумерной плоскости и т. д.

в какую-либо коммутативную группу (например, группу $\mathbb{Z}$ целых чисел). Приписывая каждому $S_i^{(\nu)}$ его образ n_ν при этом отображении как формальный коэффициент, мы можем представить цепи как формальные линейные комбинации:

$$\gamma_m = \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu S_m^{(\nu)}. \tag{2}$$

Границей цепи γ_m назовем $(m-1)$-мерную цепь

$$\partial\gamma_m = \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu \partial S_m^{(\nu)}. \tag{3}$$

Цепи одной размерности мы условимся складывать между собой (покоэффициентно); в частности, будем приводить подобные члены (когда это возможно). Совокупность всех m-мерных цепей (с коэффициентами из данной группы) образует, следовательно, коммутативную группу, которую мы будем обозначать через Γ_m.

Оператор взятия границы можно рассматривать как оператор, преобразующий Γ_m в Γ_{m-1}:

$$\partial: \quad \Gamma_m \to \Gamma_{m-1}, \tag{4}$$

причем этот оператор сохраняет групповую операцию (∂: $\gamma_m^{(1)} + \gamma_m^{(2)} \to \partial\gamma_m^{(1)} + \partial\gamma_m^{(2)}$), т. е. является гомоморфизмом.

Теорема. *Квадрат оператора д равен нулю, т. е. для любой цепи* $\gamma_m \in \Gamma_m$

$$\partial^2\gamma_m = \partial(\partial\gamma_m) = 0. \tag{5}$$

◀ Теорему достаточно доказать для m-мерных симплексов S_m. При $m=0$ по определению принято $\partial S_0 = 0$, значит, и подавно $\partial^2 S_0 = 0$. Для $m=1$ имеем $S_1 = \{P_0P_1\}$, $\partial S_1 = P_1 - P_0$ и $\partial^2 S_1 = 0$ (опять используется, что граница точки равна нулю).

Пусть $m \geqslant 2$; рассмотрим симплекс $S_m = \{P_0P_1P_2\ldots\}$ и будем следить лишь за теми его гранями, которые вносят в $\partial^2 S_m$ симплексы, не содержащие одновременно вершин P_0 и P_1. Имеем

$$\partial S_m = \{P_1P_2\ldots\} - \{P_0P_2\ldots\} + \ldots,$$

причем невыписанные симплексы содержат обе вершины P_0 и P_1, и, далее,

$$\partial^2 S_m = \{P_2P_3\ldots\} - \{P_1P_3\ldots\} - \{P_2P_3\ldots\} + \{P_0P_3\ldots\} + \ldots = \\ = -\{P_1P_3\ldots\} + \{P_0P_3\ldots\} + \ldots$$

Мы видим, что в выражении $\partial^2 S_m$ симплексы, не содержащие вершин P_0 и P_1, сокращаются. Но перестановкой вершин (которая может переменить лишь знак) мы любые две вершины S_m

можем поставить на место P_0 и P_1, следовательно, в выражении $\partial^2 S_m$ сокращаются все симплексы, и $\partial^2 S_m = 0$ ▶

Определение 3. Будем называть *циклом* любую цепь γ_m, граница которой равна 0 ($\partial\gamma_m = 0$). Цепь γ_m, которая является границей какой-либо цепи γ_{m+1} ($\gamma_m = \partial\gamma_{m+1}$) и которая по доказанной теореме непременно является циклом, называется *циклом, гомологичным нулю.*

Циклы данной размерности m, очевидно, образуют группу Z_m, которая является подгруппой Γ_m. Точно так же циклы, гомологичные нулю, образуют подгруппу B_m группы Z_m. Эти подгруппы можно охарактеризовать еще так:

$$Z_m = \{\gamma_m \in \Gamma_m:\ \partial\gamma_m = 0\} \tag{6}$$

является *ядром* гомоморфизма ∂, т. е. совокупностью элементов, которые ∂ переводит в 0 (обозначение: $Z_m = \ker \partial$), а

$$B_m = \{\gamma_m \in \Gamma_m:\ \gamma_m = \partial\gamma_{m+1}\} \tag{7}$$

— *образом* этого гомоморфизма, т. е. совокупностью элементов Γ_m, в которые ∂ переводит элементы Γ_{m+1} (обозначение: $B_m = \operatorname{im} \partial$).

Рассмотрим последовательность двух гомоморфизмов

$$\Gamma_{m+1} \xrightarrow{\partial_{m+1}} \Gamma_m \xrightarrow{\partial_m} \Gamma_{m-1} \tag{8}$$

(для ясности мы снабжаем оператор ∂ индексом, указывающим размерность цепей, на которые он действует); доказанная выше теорема гласит, что

$$\operatorname{im} \partial_{m+1} \subset \ker \partial_m. \tag{9}$$

Последовательности гомоморфизмов, удовлетворяющие этому условию, называются *полуточными*; если же вместо включения имеет место равенство:

$$\operatorname{im} \partial_{m+1} = \ker \partial_m, \tag{10}$$

то последовательность называется *точной*. Точность последовательности (8) означает, следовательно, что в Γ_m каждый цикл гомологичен нулю.

Назовем два цикла $\gamma_m^{(1)}$, $\gamma_m^{(2)} \in Z_m$ *гомологичными* ($\gamma_m^{(1)} \sim \gamma_m^{(2)}$), если их разность гомологична нулю ($\gamma_m^{(1)} - \gamma_m^{(2)} \in B_m$, т. е. $\gamma_m^{(1)} - \gamma_m^{(2)} = \partial\gamma_{m+1}$). Классы гомологичных друг другу циклов образуют факторгруппу

$$H_m = Z_m / B_m, \tag{11}$$

которая называется *группой гомологий*. Точность последовательности (8) означает, очевидно, тривиальность этой группы ($H_m = 0$: все циклы гомологичны нулю).

Введенные понятия без труда переносятся на произвольное гладкое ориентируемое многообразие M. Именно, *криволинейным симплексом* на M мы будем называть пару $\sigma_m = (S_m, \Phi)$, где S_m — ориентированный симплекс и Φ: $S_m \to M$ — непрерывно дифференцируемое гомеоморфное отображение (сохраняющее или меняющее ориентацию). Далее, m-мерной *цепью* на M назовем любую линейную комбинацию $\sigma_m = \sum n_\nu \sigma_m^{(\nu)}$, где n_ν — элемент какой-либо группы, а $\sigma_m^{(\nu)} = (S_m^{(\nu)}, \Phi_\nu)$. *Границей цепи* σ_m назовем цепь $\sum n_\nu \partial\sigma_m^{(\nu)}$, где $\partial\sigma_m^{(\nu)} = (\partial S_m^{(\nu)}, \Phi_\nu)$. Без всяких изменений переносятся на многообразия определения цикла, гомологичных циклов и группы гомологий.

Всюду в дальнейшем (если не оговорено противное) мы будем рассматривать цепи с целочисленными коэффициентами $n_\nu \in \mathbb{Z}$ *на гладких ориентируемых поверхностях* M *пространства* $\mathbb{R}^n$ *или* $\mathbb{C}^n$.

Криволинейный симплекс (S, Φ) мы часто будем обозначать просто символом S. Мы будем рассматривать конечные наборы криволинейных симплексов $\{S\} = K$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) каждый симплекс S_p входит в K вместе со всеми своими гранями $S_{p-1}^{(\nu)}$;

2) любые два симплекса из K либо не пересекаются, либо их пересечение является гранью (какой-либо размерности) каждого из них.

Такие наборы мы будем называть *комплексами*; *размерностью* комплекса будем называть наибольшую из размерностей составляющих его симплексов. Объединение точек всех таких симплексов будем называть *носителем комплекса* или *полиэдром*.

Пусть дан комплекс K на m-мерной поверхности M; тогда p-мерную цепь $(0 \leqslant p \leqslant m)$ комплекса K, т. е. линейную комбинацию ориентированных p-мерных симплексов $S_p^{(\nu)} \in K$ с целочисленными коэффициентами:

$$\gamma = \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu S_p^{(\nu)},$$

мы будем наглядно представлять как набор этих симплексов, причем $S_p^{(\nu)}$ входит в набор n_ν раз с ориентацией M, если $n_\nu > 0$, и с противоположной, если $n_\nu < 0$.

На рис. 91 изображено несколько одномерных циклов на торе T в $\mathbb{R}^3$, который представляет собой носитель двумерного комплекса. Цикл γ_0 гомологичен нулю — он ограничивает

двумерную цепь, носитель которой заштрихован. Циклы γ_1 и γ_2 негомологичны нулю и негомологичны друг другу; цикл γ_2' гомологичен циклу $-\gamma_2$ (это видно из того, что $\gamma_2+\gamma_2'$ ограничивает двумерную цепь). Можно убедиться в том, что всякий одномерный цикл γ на торе гомологичен некоторой линейной комбинации циклов γ_1 и γ_2 с целыми коэффициентами (равными нулю, если $\gamma\sim 0$). Поэтому группа одномерных гомологий тора с целыми коэффициентами $H_1(T, \mathbb{Z})$ изоморфна прямой сумме двух групп $\mathbb{Z}$.

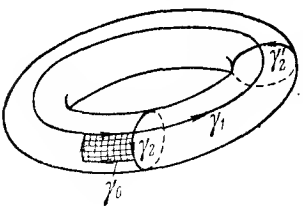


Рис. 91.

Любой двумерный цикл на торе преставляет собой целое кратное самого тора. Поэтому $H_2(T, \mathbb{Z})\approx\mathbb{Z}$.

13. Дифференцирование форм. Пусть M — многообразие размерности m класса C^2 и ω — гладкая форма степени $p<m$, заданная на M.

Определение 1. *Дифференциал* $d\omega$ формы ω определяется в локальных координатах $t=(t_1, \ldots, t_m)$ следующим образом: если в этих координатах

$$\omega=\sum{}' f_{\nu_1\ldots\nu_p}\,dt_{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dt_{\nu_p}, \tag{1}$$

то в них

$$d\omega=\sum{}' df_{\nu_1\ldots\nu_p}\wedge dt_{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dt_{\nu_p}, \tag{2}$$

где $df=\frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial t_m}dt_m$ — дифференциал функции $f=f_{\nu_1\ldots\nu_p}$.

Отметим два простых свойства дифференцирования форм:

$$\text{(I)}\quad d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2; \tag{3}$$

$$\text{(II)}\quad d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2, \tag{4}$$

где p — степень формы ω_1.

Первое свойство очевидно. Учитывая его, второе свойство достаточно доказать для случая, когда перемножаемые формы являются одночленами:

$$\omega_1=f\,dt_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dt_{\mu_p},$$

$$\omega_2=g\,dt_{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dt_{\nu_q}.$$

В этом случае мы имеем $\omega_1 \wedge \omega_2 = fg\, dt_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\mu_p} \wedge \wedge dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_q}$ и

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (g\,df + f\,dg) \wedge dt_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\mu_p} \wedge dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_q} =$$
$$= (df \wedge dt_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\mu_p}) \wedge (g\,dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_q}) + (f\,dt_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\mu_p}) \wedge$$
$$\wedge (-1)^p (dg \wedge dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_q}) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

что и требуется.

Теорема 1. *Для любой формы ω класса C^2 квадрат оператора d равен нулю:*

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0. \tag{5}$$

◀ Для форм $\omega = f\,dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m$ степени m, равной размерности многообразия, уже первый дифференциал равен нулю (это следует из того, что $df = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial t_\nu}\, dt_\nu$, а внешнее произведение одинаковых дифференциалов равно нулю). Для форм степени $m-1$ дифференциал $d\omega$ является формой степени m, и, следовательно, $d^2\omega = 0$. Для форм степени $p \leqslant m-2$ мы подсчитаем вклад, который вносит в $d^2\omega$ дифференцирование по t_1 и t_2. Очевидно, достаточно рассмотреть совокупность тех членов в выражении ω, которые не содержат dt_1 и dt_2, т. е. форму

$$\omega_1 = \sum{}'' f_{\nu_1 \ldots \nu_p}\, dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_p},$$

где два штриха у суммы означают, что суммирование ведется по всем индексам $\nu_1, \ldots, \nu_p$, для которых $2 < \nu_1 < \ldots < \nu_p \leqslant m$.

Мы имеем

$$d\omega_1 = \sum{}'' \frac{\partial f_\nu}{\partial t_1}\, dt_1 \wedge dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_p} +$$
$$+ \sum{}'' \frac{\partial f_\nu}{\partial t_2}\, dt_2 \wedge dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_p} + \ldots$$

(выписаны лишь те слагаемые, которые содержат либо dt_1, либо dt_2, для краткости положено $f_{\nu_1 \ldots \nu_p} = f_\nu$) и $d^2\omega_1 = \sum{}'' \left(\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial t_1\, \partial t_2} - \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial t_2\, \partial t_1} \right) dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_p} + \ldots$; в силу равенства смешанных производных выражение в скобках равно нулю, а так как члены, обозначенные многоточием, не содержат произведения $dt_1 \wedge dt_2$, то коэффициент в $d^2\omega_1$ при этом произведении равен 0.

Перестановкой индексов мы можем любые два дифференциала поставить на место $dt_1 \wedge dt_2$, поэтому можно утверждать, что $d^2\omega = 0$ ▶

Пример. В случае $m=3$ и $p=1$, т. е. формы $\omega=f_1dt_1+f_2dt_2+f_3dt_3$ имеем

$$d^2\omega=\left\{\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial t_2}-\frac{\partial f_2}{\partial t_3}\right)+\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t_3}-\frac{\partial f_3}{\partial t_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial t_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial t_1}-\frac{\partial f_1}{\partial t_2}\right)\right\}dt_1\wedge dt_2\wedge dt_3$$

и теорема 1 сводится к известному из векторного анализа тождеству

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} f=0, \tag{6}$$

где $f=(f_1, f_2, f_3)$ — вектор.

Наше определение дифференциала формы сформулировано в терминах локальных координат. Однако на самом деле дифференциал инвариантен относительно координат. Точнее, справедлива

Теорема 2. *Дифференциал гладкой формы на гладком многообразии меняется по закону изменения дифференциальных форм.*

◀ Нам нужно показать, что при гладкой (не обязательно гомеоморфной) замене координат $t\to\tau$ дифференциал $d\omega$ переходит в то самое выражение, которое получается при вычислении дифференциала формы ω в координатах τ.

По свойству (I) можно ограничиться формами вида

$$\omega=f\,dt_{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dt_{\nu_p}=f\varphi_p, \tag{7}$$

где $\varphi_p=dt_{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dt_{\nu_p}$. Будем рассматривать ω как произведение формы нулевой степени (функции) f на форму φ_p. По свойству (II) в новых координатах

$$d\omega(\tau)=df(\tau)\wedge\varphi_p(\tau)+f(\tau)d\varphi_p(\tau);$$

следовательно, все будет доказано, если мы докажем, что

$$d\varphi_p(\tau)=0. \tag{8}$$

Справедливость этого равенства легко доказывается индукцией по p. При $p=1$ форма $\varphi_1(t)=dt_\nu$, и при замене $t\to\tau$ по теореме об инвариантности дифференциала она переходит в дифференциал функции $t_\nu(\tau_1, \ldots, \tau_m)$; по теореме 1 имеем, следовательно, $d\varphi_1=d^2t_\nu(\tau)=0$. Пусть (8) верно для всех форм степени не выше $p-1$. Тогда φ_p можно рассматривать как произведение $\varphi_{p-1}\wedge dt_\nu$, и по свойству (II) и индуктивному предположению получаем, что

$$d\varphi_p(\tau)=d\varphi_{p-1}\wedge dt_{\nu_p}+(-1)^{p-1}\varphi_{p-1}\wedge d^2t_{\nu_p}=0\ \blacktriangleright$$

В качестве примера применения дифференцирования форм приведем доказательство теоремы существования неявных функций.

Теорема 3. *Пусть функции* $f_\mu(z)$, $\mu=1, \ldots, r'$ ($r'=n-r$, $1\leqslant r\leqslant n-1$), *голоморфны в точке* $a\in\mathbb{C}^n$ *и определитель* $\operatorname{Det}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right)$, $\nu=r+1, \ldots, n$, *отличен от нуля в точке* $(a_{r+1}, \ldots, a_n)$. *Тогда система уравнений*

$$f_\mu(z_1, \ldots, z_n)=0, \qquad \mu=1, \ldots, r', \tag{9}$$

разрешима в некоторой окрестности точки a *относительно переменных* z_ν, $\nu>r$, *т. е.*

$$z_\nu=g_\nu(z_1, \ldots, z_r), \qquad \nu=r+1, \ldots, n, \tag{10}$$

причем функции g_ν *голоморфны в точке* $(a_1, \ldots, a_r)$.

◀ Мы приведем эту теорему к соответствующей теореме из действительного анализа. Для этого положим $f_\mu=u_\mu+iv_\mu$, $z_\nu=x_\nu+iy_\nu$ и будем рассматривать (9) как систему $2r'$ уравнений относительно $2n$ неизвестных x_ν, y_ν.

Для вычисления якобиана $\dfrac{\partial(u_1, v_1, \ldots, u_{r'}, v_{r'})}{\partial(x_{r+1}, y_{r+1}, \ldots, x_n, y_n)}$ отвлечемся от системы (9), фиксируем переменные $z_1, \ldots, z_r$ и будем рассматривать $f_1, \ldots, f_{r'}$ как функции остальных переменных $z_{r+1}, \ldots, z_n$. Учитывая, что эти функции голоморфны, по правилам внешнего умножения дифференциалов получаем

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_{r'}=\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{r'})}{\partial(z_{r+1}, \ldots, z_n)}\, dz_{r+1} \wedge \ldots \wedge dz_n,$$

откуда, переходя к комплексно сопряженным величинам, находим

$$d\bar f_1 \wedge \ldots d\bar f_{r'}=\frac{\partial(\bar f_1, \ldots, \bar f_{r'})}{\partial(\bar z_{r+1}, \ldots, \bar z_n)}\, d\bar z_{r+1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_n.$$

По тем же правилам

$$dz_\nu \wedge d\bar z_\nu=(dx_\nu+i\,dy_\nu)\wedge(dx_\nu-i\,dy_\nu)=-2i\,dx_\nu\wedge dy_\nu$$

и аналогично $df_\mu\wedge d\bar f_\mu=-2i\,du_\mu\wedge dv_\mu$. Поэтому после перемножения последних соотношений мы получим

$$du_1 \wedge dv_1 \wedge \ldots du_{r'} \wedge dv_{r'}=$$

$$=\left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{r'})}{\partial(z_{r+1}, \ldots, z_n)}\right|^2 dx_{r+1} \wedge dy_{r+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

(мы произвели одинаковые перестановки в обеих частях этих соотношений). Остается заметить, что произведения дифференциалов в левой и правой частях последнего равенства представляют собой соответствующие $2r'$-мерные элементарные объемы

(взятые с каким-либо одинаковым для обеих частей знаком) и, следовательно, их отношение равно искомому якобиану:

$$\frac{\partial(u_1, v_1, \ldots, u_{r'}, v_{r'})}{\partial(x_{r+1}, y_{r+1}, \ldots, x_n, y_n)} = \left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{r'})}{\partial(z_{r+1}, \ldots, z_n)}\right|^2. \qquad (11)$$

По условию якобиан в правой части (11) отличен от нуля в точке $(a_{r+1}, \ldots, a_n)$, поэтому в силу теоремы о неявных функциях из действительного анализа система (9) разрешима в окрестности точки a относительно переменных $x_{r+1}, y_{r+1}, \ldots, x_n, y_n$ (условия непрерывности, требуемые в этой теореме, у нас заведомо выполняются). По той же теореме функции $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ ($\nu = r+1, \ldots, n$) дифференцируемы в смысле действительного анализа (по переменным $z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_r, \bar{z}_r$). Но, дифференцируя систему (9), находим

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} dz_\nu = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, r'$$

(мы воспользовались теоремой об инвариантности дифференциала), откуда в силу условия не равенства нулю определителя (11) видно, что в окрестности точки $(a_1, \ldots, a_r)$ дифференциалы $dz_{r+1}, \ldots, dz_n$ линейно выражаются через дифференциалы $dz_1, \ldots, dz_r$. Поэтому функции (10) голоморфны в точке $(a_1, \ldots, a_r)$ ▶

Замечание. Соотношение (11) обобщает на пространственный случай соотношение между якобианом и производной голоморфной функции одного переменного:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2$$

(см. п. 7 ч. I).

В заключение этого пункта приведем несколько замечаний и определений общего характера. Оператор дифференцирования d преобразует группу Ω^p всех дифференциальных форм степени p на многообразии M (рассматриваются формы и многообразия из класса C^1) в группу Ω^{p+1} форм степени $p+1$:

$$d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}. \qquad (12)$$

Это отображение является гомоморфизмом, ибо $\omega_1 + \omega_2 \to d\omega_1 + d\omega_2$, однако не на всю группу Ω^{p+1}, ибо не каждая форма степени $p+1$ является дифференциалом какой-либо формы степени p.

Определение 2. Дифференциальная форма ω называется *замкнутой*, если ее дифференциал $d\omega = 0$. Форма ω называется *точной*, если она является дифференциалом какой-либо формы: $\omega = d\Omega$.

Замкнутые формы степени p на многообразии M образуют группу (по сложению) Z^p, которая является подгруппой Ω^p. Мы имеем

$$Z^p=\{\omega\in\Omega^p:\ d\omega=0\}, \tag{13}$$

т. е. Z^p служит *ядром* гомоморфизма d ($Z^p=\ker d$). Точные формы образуют группу

$$B^p=\{\omega\in\Omega^p:\ \omega=d\Omega\}, \tag{14}$$

которая является *образом* гомоморфизма d ($B^p=\operatorname{im} d$).

По теореме 1 всякая точная форма замкнута (ибо если $\omega=d\omega_1$, то $d\omega=d^2\omega_1=0$), следовательно, B^p является подгруппой группы Z^p. По той же причине последовательность гомоморфизмов

$$\Omega^{p-1}\xrightarrow{d_{p-1}}\Omega^p\xrightarrow{d_p}\Omega^{p+1} \tag{15}$$

является *полуточной* ($\operatorname{im} d_{p-1}\subset\ker d_p$); точность этой последовательности ($\operatorname{im} d_{p-1}=\ker d_p$) означает, очевидно, что каждая замкнутая форма степени p на M является точной.

Факторгруппа

$$H^p=Z^p/B^p \tag{16}$$

состоит из классов эквивалентных форм: к одному классу относятся формы, разность которых принадлежит B^p, т. е. является точной формой. Точность последовательности (15) сводится к тривиальности группы H^p ($H^p=0$).

Очевидна аналогия оператора d дифференцирования форм с оператором ∂ взятия границы цепей, рассмотренным в предыдущем пункте; различие между этими операторами состоит лишь в том, что первый из них повышает размерность (степень) форм, а второй понижает размерность цепей. Это подчеркивает следующая часто применяемая терминология. Формы, дифференциалы которых равны нулю, называются *коциклами*, а формы, которые являются дифференциалами других форм, — *когомологичными нулю*; факторгруппа H^p называется p-мерной *группой когомологий*.

14. Формула Стокса. Аналогия, о которой мы сейчас говорили, является не только внешней. Глубокую связь между операторами d и ∂ выражает весьма важная

Теорема. *Пусть на ориентируемом m-мерном многообразии M задана p-мерная цепь σ, а на ней дифференциальная форма ω степени $p-1$; если M, σ, $d\sigma$ и ω принадлежат классу C^1, то*

$$\int_\sigma d\omega=\int_{\partial\sigma}\omega. \tag{17}$$

Это и есть формула Стокса.

◀ Из принятых нами определений цепи и интеграла следует, что доказательство теоремы достаточно провести для случая p-мерного симплекса $S=\{P_0P_1 \dots P_p\}$. Введем в $\bar{S}$ координаты $(t_1, \dots, t_p)$, в которых каждая точка $P\in\bar{S}$ представляется в виде суммы векторов:

$$P = P_0 + \sum_{\nu=1}^{p} t_\nu (P_\nu - P_0) = \sum_{\nu=0} t_\nu P_\nu \qquad (2)$$

$\left(\text{мы положили } t_0 = 1 - \sum_{\nu=1}^{p} t_\nu\right)$. В этих координатах форма записывается как сумма p членов; мы возьмем один такой член, например

$$\omega = f(t_1, \dots, t_p)\, dt_2 \wedge \dots \wedge dt_p. \qquad (3)$$

Пусть S_ν будет грань симплекса S, противоположная вершине P_ν; уравнением этой грани служит $t_\nu=0$ $(\nu=0, \dots, p)$. Эти грани ориентируем в соответствии с ориентацией S, в частности, грань S_0 получит ориентацию $\{P_1 \dots P_p\}$, а грань S_1 — ориентацию $-\{P_0P_2 \dots P_p\}$ (см. рис. 92, где $p=3$). Вычислим интеграл от формы (3) по ориентированной границе ∂S симплекса:

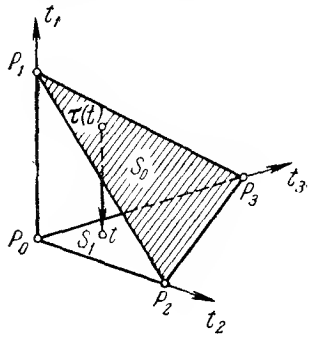


Рис. 92.

$$\int_{\partial S} \omega = \sum_{\nu=0}^{p} \int_{S_\nu} \omega = \int_{S_0} \omega + \int_{S_1} \omega \qquad (4)$$

(мы учли, что на остальных гранях S_ν, $\nu \geqslant 2$, форма $\omega=0$, ибо там $t_\nu=0$, $dt_\nu=0$). В обеих гранях S_0 и S_1 можно пользоваться координатами $(t_2, \dots, t_p)=t$. На грани S_0 порядок этих координат соответствует ориентации, а t_1 является (линейной) функцией $\tau(t)$ остальных координат, определяемой из уравнения грани $t_0 = 1 - \sum_{\nu=1}^{p} t_\nu = 0$. По определению интеграла от формы (п. 12) получаем, следовательно,

$$\int_{S_0} \omega = \int_{S_1'} f[\tau(t), t]\, dt, \qquad (5)$$

где S_1' — неориентированный симплекс (проекция S_0 в пространство переменных $(t_2, \dots, t_p)=t$, см. рис. 92), а $dt=dt_2 \dots dt_p$ — элемент объема. Вводя *характеристическую функцию*

$\chi(t)$ симплекса $\overline{S}_1'$ (т. е. функцию, равную 1 в $\overline{S}_1'$ и 0 вне $\overline{S}_1$), мы можем переписать правую часть (5) в виде интеграла по всему пространству

$$\int\limits_{S_0} \omega = \int f(\tau,\ t)\,\chi(t)\,dt.$$

На грани S_1 порядок координат $(t_2, \ldots, t_n)$ противоположен ориентации, а $t_1=0$, поэтому мы имеем

$$\int\limits_{S_1} \omega = -\int f(0,\ t)\,\chi(t)\,dt$$

и из (4) получаем

$$\int\limits_{\partial S} \omega = \int \{f(\tau,\ t) - f(0,\ t)\}\,\chi(t)\,dt, \tag{6}$$

где интеграл берется по всему пространству.

С другой стороны, $d\omega = \frac{\partial f}{\partial t_1}\,dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_p$, и, вычисляя интеграл по симплексу S, мы получаем

$$\int\limits_S d\omega = \int \chi(t)\,dt \int\limits_0^{\tau(t)} \frac{\partial f}{\partial t_1}\,dt_1 = \int \chi(t)\{f(\tau,\ t) - f(0,\ t)\}\,dt.$$

Этот интеграл совпадает с (6) ▶

Примеры.

1. $p=1$, m — любое; одномерная цепь σ представляет собой линию, ее граница $d\sigma$ состоит из двух точек, причем начало (a) ориентировано отрицательно, а конец (b) — положительно. Форма ω нулевой степени — это функция f. Формула Стокса сводится к формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_\sigma df = \int\limits_{\partial\sigma} f = f(b) - f(a).$$

2. $m=p=2$; цепь σ пусть представляет собой плоскую область D. Форма первого порядка имеет вид $\omega = f_1\,dt_1 + f_2\,dt_2$, а ее дифференциал $d\omega = \left(\frac{\partial f_2}{\partial t_1} - \frac{\partial f_1}{\partial t_2}\right) dt_1 \wedge dt_2$. Формула Стокса сводится к формуле Римана — Грина:

$$\int\limits_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial t_1} - \frac{\partial f_1}{\partial t_2}\right) dt_1 dt_2 = \int\limits_{\partial D} f_1\,dt_1 + f_2\,dt_2.$$

3. $m=3$, $p=2$; цепь σ пусть представляет поверхность S в $\mathbb{R}^3$. Формула (1) сводится к классической формуле Стокса:

$$\int \left(\frac{\partial f_2}{\partial t_1}-\frac{\partial f_1}{\partial t_2}\right) dt_1 \wedge dt_2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial t_1}-\frac{\partial f_1}{\partial t_3}\right) dt_1 \wedge dt_3 + \\ +\left(\frac{\partial f_1}{\partial t_2}-\frac{\partial f_2}{\partial t_1}\right) dt_2 \wedge dt_1 = \int\limits_{\partial S} f_1\, dt_1 + f_2\, dt_2 + f_3\, dt_3.$$

4. $m=p=3$; цепь σ — область D в $\mathbb{R}^3$; формула Стокса сводится к формуле Остроградского:

$$\int\limits_D \left(\frac{\partial f_{23}}{\partial t_1}-\frac{\partial f_{13}}{\partial t_2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial t_3}\right) dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3 = \\ = \int\limits_{\partial D} f_{23}\, dt_2 \wedge dt_3 + f_{13}\, dt_1 \wedge dt_3 + f_{12}\, dt_1 \wedge dt_2.$$

Приведем два важных следствия из формулы Стокса:

1) *Интеграл от замкнутой формы* ($d\omega=0$) *по циклу, гомологичному нулю* ($\sigma=\partial\Sigma$), *равен нулю*:

$$\int\limits_\sigma \omega = \int\limits_{\partial\Sigma} \omega = \int\limits_\Sigma d\omega = 0. \tag{7}$$

2) *Интеграл от точной формы* ($\omega=d\omega_1$) *по циклу* ($\partial\sigma=0$) *равен нулю*:

$$\int\limits_\sigma \omega = \int\limits_\sigma d\omega_1 = \int\limits_{\partial\sigma} \omega_1 = 0. \tag{8}$$

15. Теорема Коши — Пуанкаре. Эта теорема является распространением на многомерный случай основной теоремы Коши.

Теорема 1. *Пусть* ω *— голоморфная форма степени* n *на аналитическом многообразии* M *комплексной размерности* n; *тогда для любой* $(n+1)$*-мерной цепи* $\sigma\subset M$ *с гладкой границей*

$$\int\limits_{\partial\sigma} \omega = 0. \tag{1}$$

◀ В локальных координатах z_ν, $\bar{z}_\nu$ ($\nu=1, \ldots, n$) голоморфная форма ω имеет вид

$$\omega = f\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n, \tag{2}$$

где $f\in H(M)$. Она, очевидно, замкнута, ибо в силу голоморфности f дифференциал df выражается лишь через дифференциалы dz_ν и по свойствам внешних произведений $d\omega=0$. Отсюда следует, что $d\omega=0$ на всей σ, а так как цикл $\partial\sigma$ гомологичен нулю, то остается воспользоваться следствием 1) из формулы Стокса ▶

Особенно употребителен следующий частный случай теоремы 1:

Теорема Коши — Пуанкаре. *Если функция f голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}^n$, то для любой $(n+1)$-мерной поверхности $G\Subset D$ с гладкой границей ∂G*

$$\int\limits_{\partial G} f\,dz=0, \tag{3}$$

где для краткости положено $dz=dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$.

Отметим принципиальное отличие пространственного случая от плоского, относящееся к этой теореме: при $n=1$ области D и G имеют одинаковую размерность, а при $n>1$ размерность G ниже размерности D $(n+1<2n)$.

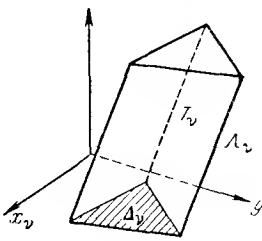


Рис. 93.

Укажем еще более частный случай теоремы. Пусть $f\in H(D)$ и $G=G_1\times\ldots\times G_n$ — поликруговая область (G_ν — плоские односвязные области с гладкими границами ∂G_ν), компактно принадлежащая D. Остов этой области $\Gamma=\partial G_1\times\ldots\times\partial G_n$ является n-мерным циклом, гомологичным нулю, ибо он является границей $(n+1)$-мерных замкнутых областей $S_\nu=\partial G_1\times\ldots\times\overline{G}_\nu\times\ldots\times\partial G_n\Subset D$. Поэтому для любой такой области G интеграл по ее остову

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dz=0 \tag{4}$$

(ср. с интегральной формулой Коши для поликруговых областей).

Теперь мы приведем пространственный аналог теоремы Морера, обратной к теореме Коши. В плоском случае для утверждения о голоморфности функции f в области D достаточно требовать равенства нулю интеграла по границам областей специального вида (треугольников $\Delta\Subset D$), но на функцию надо наложить дополнительное условие непрерывности (см. п. 20 ч. I). Аналогично обстоит дело и в пространственном случае. Роль треугольников здесь играют $(n+1)$-мерные «призмы» T_ν, которые являются произведением треугольника Δ_ν, лежащего в плоскости $\mathbb{C}^1(z_\nu)$, на произведение Λ_ν прямолинейных отрезков $[a_\mu, z_\mu]$, лежащих в остальных $n-1$ плоскостях $\mathbb{C}^1(z_\mu)$, $\mu\neq\nu$:

$$T_\nu=\Delta_\nu\times\Lambda_\nu\quad\left(\Lambda_\nu=\prod_{\mu\neq\nu}[a_\mu, z_\mu]\right) \tag{5}$$

(см. рис. 93, где выделена плоскость z_ν, а пространство остальных переменных z_μ изображено схематически).

Теорема 2. *Если функция f непрерывна в области $D\subset\mathbb{C}^n$ и для любой призмы T_ν вида* (5), *компактно принадлежащей D,*

$$\int\limits_{\partial T_\nu} f\,dz=0, \tag{6}$$

то $f\in H(D)$.

◀ Достаточно доказать голоморфность f в окрестности произвольной точки $a\in D$. Фиксируем a и рассмотрим функцию

$$F(z)=\int\limits_{[a_1,\,z_1]} d\zeta_1\ldots\int\limits_{[a_n,\,z_n]} f(\zeta)\,d\zeta_n; \tag{7}$$

она определена и непрерывна в некоторой окрестности точки a. Для любого ν ($\nu=1,\ldots,n$) ее можно представить в виде

$$F(z)=\int\limits_{[a_\nu,\,z_\nu]} F_\nu\,d\zeta_\nu,$$

где F_ν — интеграл от f по Λ_ν (произведению отрезков $[a_\mu, z_\mu]$, $\mu\neq\nu$). Функция F_ν, очевидно, непрерывна по ζ_ν в окрестности U_ν точки a_ν, и по условию (6) для любого треугольника $\Delta_\nu\Subset U_\nu$

$$\int\limits_{\partial\Delta_\nu} F_\nu\,d\zeta_\nu=0. \tag{8}$$

В самом деле, этот интеграл лишь знаком может отличаться от интеграла

$$\int\limits_{\partial\Delta_\nu\times\Lambda_\nu} f\,d\zeta=\int\limits_{\partial T_\nu} f\,d\zeta,$$

где $T_\nu=\Delta_\nu\times\Lambda_\nu$ и $d\zeta=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$ (мы воспользовались тем, что на части ∂T_ν, отличной от $\partial\Delta_\nu\times\Lambda_\nu$, т. е. на части $\Delta_\nu\times\partial\Lambda_\nu$ — совокупности «оснований» призмы T_ν, см. рис. 93, — координата $\zeta_\nu=\mathrm{const}$, следовательно, $d\zeta_\nu=0$, и интеграл от $f\,d\zeta$ по этой части границы исчезает).

По теореме Мореры для функций одного переменного отсюда вытекает, что F голоморфна по переменному z_ν. Так как рассуждение применимо для любого z_ν, то F голоморфна по каждому переменному в некоторой окрестности U точки a. По теореме Хартогса F голоморфна в этой окрестности, а значит, там голоморфна и функция

$$f(z)=\frac{\partial^n F}{\partial z_1\ldots\partial z_n}\ \blacktriangleright$$

§ 6. Интегральные представления

Теперь мы можем изучать интегральные представления голоморфных функций. Начнем с наиболее общего, справедливого для произвольных областей с гладкой границей.

16. Формулы Мартинелли — Бохнера и Лере. Нам понадобится формула Грина для областей $D \subset \mathbb{R}^m$ с гладкой границей ∂D. Она выводится очень просто: обозначим

$$\delta^\nu = (-1)^{\nu-1}\, dx_1 \wedge \ldots \overset{\wedge}{\underset{\nu}{\ldots}} \ldots \wedge dx_m \tag{1}$$

(дифференциал dx_ν пропускается) и рассмотрим дифференциальную форму степени $m-1$:

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{m} \left(f \frac{\partial g}{\partial x_\nu} - g \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \right) \delta^\nu, \tag{2}$$

где f, g — заданные в $\bar{D}$ функции класса C^2. Дифференциал этой формы, очевидно, равен

$$d\omega = \sum_{\nu=1}^{m} \left(f \frac{\partial^2 g}{\partial x_\nu^2} - g \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu^2} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m = (f \Delta g - g \Delta f)\, dx,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ — оператор Лапласа и $dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$. Применяя формулу Стокса, мы и получим искомую *формулу Грина*

$$\int_{\partial D} \sum_{\nu=1}^{m} \left(f \frac{\partial g}{\partial x_\nu} - g \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \right) \delta^\nu = \int_D (f \Delta g - g \Delta f)\, dx. \tag{3}$$

Для областей $D \subset \mathbb{C}^n$ эту формулу удобнее писать в комплексном виде. Для этого введем, как обычно, координаты $Z_1, \ldots, Z_{2n}$:

$$Z_\nu = z_\nu, \quad Z_{n+\nu} = \bar{z}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

положим для $\nu = 1, \ldots, 2n$

$$\delta^\nu = (-1)^{\nu-1}\, dZ_1 \wedge \ldots \overset{\wedge}{\underset{\nu}{\ldots}} \ldots \wedge dZ_{2n} \tag{4}$$

(dZ_ν пропускается) и вместо (2) рассмотрим форму

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} \left(f \frac{\partial g}{\partial z_\nu} \delta^{n+\nu} - g \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} \delta^\nu \right),$$

где f и g — заданные в $\overline{D}$ функции класса C^2 и, как всегда,

$$\frac{\partial}{\partial z_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}-i\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar z_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}+i\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)$$

($y_\nu=x_{n+\nu}$). Дифференциал этой формы равен

$$d\omega=\sum_{\nu=1}^{m}\left(f\frac{\partial^2 g}{\partial z_\nu\,\partial\bar z_\nu}-g\frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu\,\partial\bar z_\nu}\right)dZ_1\wedge\ldots\wedge dZ_{2n}=\frac{1}{4}(f\Delta g-g\Delta f)\,dZ$$

(мы воспользовались тем, что $\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_\nu^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z_\nu\,\partial\bar z_\nu}$, и положили $dZ=dZ_1\wedge\ldots\wedge dZ_{2n}$). Чтобы получить формулу Грина в комплексной записи:

$$\int\limits_{\partial D}\sum_{\nu=1}^{n}\left(f\frac{\partial g}{\partial z_\nu}\delta^{n+\nu}-g\frac{\partial f}{\partial\bar z_\nu}\delta^\nu\right)=\frac{1}{4}\int\limits_D(f\Delta g-g\Delta f)\,dZ,\qquad(5)$$

нужно лишь воспользоваться формулой Стокса.

Формула Мартинелли — Бохнера получается из (5) так же, как интеграл Коши для гладких функций одного переменного получается из формулы Римана — Грина (см. п. 18 ч. I). Выберем в качестве g фундаментальное решение уравнения Лапласа с особенностью в точке $z=0$ (мы предположим, что D содержит эту точку). Для $n>1$ оно имеет вид

$$g(z)=\frac{-1}{(n-1)\,|z|^{2n-2}}=\frac{-1}{(n-1)\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}z_\nu\bar z_\nu\right)^{n-1}},\qquad(6)$$

ибо при $z\neq 0$ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial z_\nu}=\frac{\bar z_\nu}{|z|^{2n}},\qquad\frac{\partial^2 g}{\partial\bar z_\nu\,\partial z_\nu}=\frac{|z|^2-nz_\nu\bar z_\nu}{|z|^{2n+2}},\qquad\Delta g=0.$$

Теперь воспользуемся формулой Грина (5), применив ее к области $D_\rho=D\setminus\{|z|<\rho\}$ (мы исключаем из D окрестность точки $z=0$, чтобы устранить особенность функции g) и к функции $f\in H(\overline{D})$. Так как при $z\in\overline{D}$ мы имеем $\frac{\partial f}{\partial\bar z_\nu}=0$, $\Delta f=0$, то эта формула запишется так:

$$\int\limits_{\partial D_\rho}\omega=\int\limits_{\partial D}f\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial z_\nu}\delta^{n+\nu}-\int\limits_{\{|z|=\rho\}}f\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial z_\nu}\delta^{n+\nu}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{D_\rho}(f\Delta g-g\Delta f)\,dz=0.\qquad(7)$$

Но на сфере $\{|z|=\rho\}$ имеем, очевидно, $\frac{\partial g}{\partial z_\nu}=\frac{\bar z_\nu}{\rho^{2n}}$ и, пользуясь непрерывностью функции f в точке $z=0$, мы можем написать, что

$$\int\limits_{\{|z|=\rho\}} f\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial z_\nu}\delta^{n+\nu}=\frac{f(0)}{\rho^{2n}}\int\limits_{\{|z|=\rho\}}\sum_{\nu=0}^{n}\bar z_\nu\delta^{n+\nu}+O(\rho),$$

где $O(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$. К интегралу в правой части применим формулу Стокса:

$$\int\limits_{\{|z|=\rho\}}\sum_{\nu=1}^{n}\bar z_\nu\delta^{n+\nu}=n\int\limits_{\{|z|<\rho\}}dZ_1\wedge\ldots\wedge dZ_{2n},$$

и заметим, что по свойствам внешнего произведения $dZ_\nu\wedge dZ_{n+\nu}=-2i\,dx_\nu\wedge dx_{n+\nu}$, т. е. $dZ_1\wedge\ldots\wedge dZ_{2n}=(-2i)^n\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{2n}$. Поэтому

$$\int\limits_{\{|z|<\rho\}}dZ_1\wedge\ldots\wedge dZ_{2n}=(-2i)^n\int\limits_{\{|x|<\rho\}}dx_1\ldots dx_{2n}=(-2i)^n\frac{\pi^n}{n!}\rho^{2n}$$

(мы воспользовались формулой для объема шара радиуса ρ в пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$\omega_m=\frac{\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\rho^m,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, $\Gamma(n+1)=n!$), и формула (7) переписывается в виде

$$\int\limits_{\partial D} f\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial z_\nu}\delta^{n+\nu}=\frac{f(0)}{(n-1)!}(-2\pi i)^n+O(\rho).$$

Переходя здесь к пределу при $\rho\to 0$, мы получим

$$f(0)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D} f\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\bar z_\nu}{|z|^{2n}}(-1)^{n+\nu-1}\,dz\wedge d\bar z_1\wedge\ldots\overset{\vee}{\ldots}\ldots\wedge d\bar z_n=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{|z|^{2n}}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\bar z_\nu\,d\bar z_1\wedge\ldots\overset{\vee}{\ldots}\ldots\wedge d\bar z_n\wedge dz\,^{1}),$$

где $dz=dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$.

---

[1]) Очевидно, $dz\wedge d\bar z_1\wedge\ldots\overset{\vee}{\ldots}\ldots\wedge d\bar z_n=d\bar z_1\wedge\ldots\overset{\vee}{\ldots}\ldots\wedge d\bar z_n\wedge dz$, ибо сделанная перестановка четная (она цикличная при нечетном числе индексов).

Остается переменить обозначения: вместо $z=0$ мы возьмем фиксированную точку $z\in D$, а точку интегрирования на ∂D обозначим через ζ. Тогда мы получим искомую *формулу Мартинелли — Бохнера*:

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}(\xi_\nu-\bar z_\nu)\,d\xi_1\wedge\ldots\overset{\vee}{\ldots}\ldots\wedge d\xi_n\wedge d\zeta}{|\zeta-z|^{2n}}. \quad (8)$$

При $n=1$ эта формула переходит в интегральную формулу Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{|\zeta-z|^2}(\bar\zeta-\bar z)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

и поэтому ее можно рассматривать как обобщение последней. Как и в последней, интеграл в формуле Мартинелли — Бохнера берется по всей границе области D, которая предполагается состоящей из одной или нескольких гладких $(2n-1)$-мерных поверхностей. Введя сокращенное обозначение для формы Мартинелли — Бохнера

$$\omega(\zeta,\,z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{\bar\zeta_\nu-\bar z_\nu}{|\zeta-z|^{2n}}\,d\bar\zeta_1\wedge\ldots\overset{\vee}{\ldots}\ldots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta, \quad (9)$$

мы будем записывать формулу (8) в виде

$$f(z)=\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\,\omega(\zeta,\,z). \quad (10)$$

Отметим еще одно свойство формулы Мартинелли — Бохнера, которое роднит ее с интегральной формулой Коши: вне $\bar D$ правая часть этой формулы обращается в нуль. Это утверждение следует непосредственно из формулы Грина (5), примененной к области D (шар из D выбрасывать теперь не нужно, ибо g непрерывна в $\bar D$). Таким образом, для любой функции $f\in H(D)$ имеем

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\,\omega(\zeta,\,z)=\begin{cases} f(z) & \text{при } z\in D,\\ 0 & \text{при } z\in\bar{\mathbb{C}}^n\setminus\bar D.\end{cases} \quad (11)$$

В частности, для $z\notin\partial D$

$$\int\limits_{\partial D}\omega(\zeta,\,z)=\chi(z), \quad (12)$$

где $\chi(z)$ — характеристическая функция области D.

Для тех, кто знаком с понятием обобщенных функций, укажем, что дифференциал формы Мартинелли — Бохнера (по переменным ζ_ν, ξ_ν) обладает свойствами δ-функции. В самом деле, при $\zeta \neq z$, очевидно, $d\omega(\zeta, z) = 0$, а при $\zeta = z$ этот дифференциал не существует. При этом для любой области D, содержащей точку z, имеем

$$\int\limits_{\partial D} \omega(\zeta, z) = \int\limits_{D} d\omega = 1$$

(мы формально применили формулу Стокса), и интеграл по D здесь можно заменить интегралом по всему пространству, ибо $d\omega = 0$ при $\zeta \neq z$. Если формулу Мартинелли — Бохнера (10) переписать в виде

$$f(z) = \int\limits_{D} d(f\omega) = \int f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z), \tag{13}$$

применив формально к ее правой части формулу Стокса (мы пользуемся здесь тем, что $d(f\omega) = df \wedge \omega + f\, d\omega = f d\omega$ в силу голоморфности f, и снова заменяем интеграл по D интегралом по всему пространству), мы увидим, что (13) сводится к воспроизводящему свойству δ-функции.

В заключение приведем общую интегральную формулу, полученную Ж. Лере и названную им формулой Коши — Фантапье. Мы излагаем простой вывод этой формулы, который нам сообщил Г. М. Хенкин. Обозначим

$$\delta(w) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} w_\nu\, dw_1 \wedge \ldots \overset{\vee}{} \ldots \wedge dw_n \tag{14}$$

и рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^n(z) \times \mathbb{C}^n(w)$ дифференциальную форму степени $2n-1$

$$\Omega(z, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\delta(w) \wedge dz}{\langle z, w\rangle^n}, \tag{15}$$

где, как всегда, $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ и

$$\langle z, w\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu. \tag{16}$$

Эта форма имеет особенность на поверхности второго порядка $\langle z, w\rangle = 0$, а в остальных точках пространства она замкнута (в самом деле,

$$d\Omega = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ n \frac{dw \wedge dz}{\langle z, w\rangle^n} - \frac{n}{\langle z, w\rangle^{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu\, dw \wedge dz \right\} = 0\Big).$$

Непосредственно проверяется, что

$$\delta(w) = w_1^n\, d\left(\frac{w_2}{w_1}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{w_n}{w_1}\right)$$

и вообще

$$\delta(w) = (-1)^{\nu-1} w_1^n \, d\left(\frac{w_1}{w_\nu}\right) \wedge \ldots \overset{\vee}{\nu} \ldots \wedge d\left(\frac{w_n}{w_\nu}\right),$$

а отсюда видно, что форма Ω зависит лишь от отношения переменных w_ν к одной из них.

В частном случае, когда все $w_\nu = \bar{z}_\nu$, т. е. вектор-функция $w = \bar{z}$, форма (15) совпадает с формой Мартинелли — Бохнера с особенностью в точке $z = 0$. Поэтому, в силу доказанного выше, для любой функции f, голоморфной в области $D \subset \mathbb{C}^n$, которая содержит точку $z = 0$, и непрерывной в $\bar{D}$, мы имеем

$$f(0) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(z) \frac{\delta(\bar{z}) \wedge dz}{\langle z, \bar{z}\rangle^n}. \tag{17}$$

Вывод формулы Лере основан на том замечании, что *величина интеграла в формуле* (17) *не изменится, если заменить в ней функцию* $w = \bar{z}$ *любой другой гладкой вектор-функцией* $w = \chi(z)$ *такой, что* $\langle z, \chi(z)\rangle \neq 0$ *для всех* $z \in \partial D$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^n(z) \times \mathbb{C}^n(w)$ два $(2n-1)$-мерных цикла $\gamma_0 = \{z \in \partial D, w = \bar{z}\}$ и $\gamma = \{z \in \partial D, w = \chi(z)\}$. Покажем, что на эти циклы можно натянуть $2n$-мерную пленку σ, не пересекающуюся с поверхностью особенностей $S = \{\langle z, w\rangle = 0\}$ формы (15). Для этого, пользуясь тем, что Ω зависит лишь от отношения переменных w_ν, вне S заменим (z, w) переменными (z, ω), где

$$\omega_\nu = \frac{w_\nu}{\langle z, w\rangle} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Простой подсчет показывает, что

$$\Omega(z, \omega) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \delta(\omega) \wedge dz.$$

Так как по условию γ_0 и γ не пересекаются с S, то на этих циклах $\langle z, \omega\rangle = 1$. Если соединить теперь точки $\left(z, \frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)$ и $\left(z, \frac{\chi(z)}{\langle z, \chi(z)\rangle}\right)$ прямолинейным отрезком $\left\{\left(z, (1-t)\frac{\bar{z}}{|z|^2} + t\frac{\chi(z)}{\langle z, \chi(z)\rangle}\right), 0 \leqslant t \leqslant 1\right\}$, то во всех точках этого отрезка также будем иметь $\langle z, \omega\rangle = 1$. Совокупность таких отрезков для всех $z \in \partial D$ и образует нужную пленку σ.

Так как $\partial\sigma = \gamma_0 \cup \gamma^-$ и на σ форма (15) замкнута, то по формуле Стокса

$$\int\limits_{\gamma_0} \Omega - \int\limits_{\gamma} \Omega = \int\limits_{\partial\sigma} \Omega = \int\limits_{\sigma} d\Omega = 0,$$

и наше утверждение доказано. Из него следует, что

$$f(0)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D} f(z)\,\frac{\delta(\chi(z))\wedge dz}{\langle z,\chi(z)\rangle^n}$$

для любой χ, удовлетворяющей поставленным выше условиям.

Нам остается лишь переменить обозначения так же, как в случае формулы Мартинелли — Бохнера, и мы получим общую формулу Лере: для области $D\in\mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D и любой гладкой функции $\chi_z(\zeta)$ такой, что $\langle\zeta-z,\chi_z(\zeta)\rangle\neq 0$ на ∂D для всех $z\in D$, любая функция f, голоморфная в D и непрерывная в $\bar{D}$, представляется интегралом

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,\delta(\chi_z(\zeta))\wedge d\zeta}{\langle\zeta-z,\chi_z(\zeta)\rangle^n} \tag{18}$$

(мы пишем $\chi_z(\zeta)$, чтобы подчеркнуть, что выбор функции χ может зависеть от точки z).

Выбирая различным образом функции χ, из формулы (18) можно получать различные интегральные представления. Пусть, например, дана выпуклая область

$$D=\{z\in\mathbb{C}^n:\ \varphi(z)<0\}, \tag{19}$$

где φ — действительная функция класса C^1, причем $\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_n}\right)\neq 0$ на границе ∂D этой области ($\varphi=0$ служит уравнением ∂D). В каждой точке $\zeta\in\partial D$ можно взять $(2n-1)$-мерную касательную плоскость

$$\sum_{\nu=1}^{n}(z_\nu-\zeta_\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}(\bar{z}_\nu-\bar{\zeta}_\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}_\nu}=0, \tag{20}$$

а в ней выбрать $(2n-2)$-мерную *аналитическую касательную плоскость*

$$\sum_{\nu=1}^{n}(z_\nu-\zeta_\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_\nu}=0\ ^{1}). \tag{21}$$

---

[1]) Если выполняется уравнение (21), то, переходя к комплексно сопряженным величинам, мы получим, что $\sum(\bar{z}_\nu-\bar{\zeta}_\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}_\nu}=0$ (для действительных φ имеем $\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_\nu}\right)}=\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}_\nu}$), т. е. что (21) $\Rightarrow$ (20); это и означает, что аналитическая плоскость (21) принадлежит плоскости (20).

Выберем в качестве функции χ градиент по комплексным переменным ζ, т. е. положим $\chi(\zeta) = \nabla\varphi$. В принятых условиях

$$\langle \zeta - z,\ \chi(\zeta)\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_\nu} \tag{22}$$

не обращается в нуль при фиксированном $z \in D$ и ζ, пробегающем ∂D. Поэтому справедливо представление (18) с такой функцией χ; по сравнению с формулой Мартинелли — Бохнера оно имеет то преимущество, что в таком представлении ядро голоморфно зависит от параметра z.

Пример. Для единичного шара в $\mathbb{C}^n$ имеем $\varphi(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu\bar{\zeta}_\nu - 1$, $\nabla\varphi = \bar{\zeta}$, $\langle \zeta - z,\ \bar{\zeta}\rangle = 1 - \sum_{\nu=1}^{n} \bar{\zeta}_\nu z_\nu$, поэтому формула Лере для шара принимает вид

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\{|\zeta|=1\}} f(\zeta)\frac{\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1}\bar{\zeta}_\nu\, d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots \overset{\nu}{\wedge} \ldots \wedge d\bar{\zeta}_n}{\left(1 - \sum_{\nu=1}^{n} \bar{\zeta}_\nu z_\nu\right)^n} \wedge d\zeta. \tag{23}$$

При $n = 1$ она переходит в интегральную формулу Коши для единичного круга:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|\zeta|=1\}} f(\zeta)\frac{\bar{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}z}\, d\zeta.$$

Замечание. Ядро формулы Лере имеет особенность в тех точках $\zeta \in \mathbb{C}^n$, где $\langle \zeta - z,\ \chi_z(\zeta)\rangle = 0$. В случае Мартинелли — Бохнера особенность имеется лишь в точке $\zeta = z$, однако в общем случае могут иметься и другие особые точки вне $\bar{D}$. Поэтому в общем случае интеграл Лере не равен нулю вне области D, как интеграл Мартинелли — Бохнера.

17. Теорема Севери. Сейчас мы хотим проиллюстрировать применение формулы Мартинелли — Бохнера. Докажем с ее помощью одну важную теорему, выражающую условия, при которых заданная на границе области функция голоморфно продолжается в эту область.

Теорема 1 (Севери). *Пусть дана область $D \in \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ со связным дополнением и с гладкой границей $\partial D = S$; на S пусть задана функция $f \in C^1$. Для существования функции $\tilde{f} \in H(D) \cap C^1(\bar{D})$, граничные значения которой совпадают с f,*

необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $\zeta \in S$

$$df \wedge d\zeta|_S = 0, \tag{1}$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$.

◀ Необходимость условия (1) доказывается просто. В силу того, что $\tilde{f} \in H(D) \cap C^1(\bar{D})$, в каждой точке $\zeta \in S$ выполняются условия $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta_\nu} = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$ (мы воспользовались тем, что $\tilde{f} = f$ на S, что $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$ всюду в D и что эти производные непрерывны в $\bar{D}$). По теореме об инвариантности дифференциала (п. 14) при вычислении $d\tilde{f}|_S$ мы можем пользоваться переменными ζ_ν, $\bar{\zeta}_\nu$ (хотя они и не являются независимыми), но по только что доказанному $d\tilde{f}|_S = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \zeta_\nu} d\zeta_\nu$, и, следовательно, по свойствам внешнего произведения условие (1) выполняется.

Для доказательства достаточности этого условия построим при помощи формулы Мартинелли — Бохнера по заданным значениям f функцию

$$\tilde{f}(z) = \int_S f(\zeta)\, \omega(\zeta, z), \tag{2}$$

где

$$\omega(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{\bar{\zeta}_\nu - \bar{z}_\nu}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots \overset{\vee}{\ldots} \ldots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta. \tag{3}$$

а) Покажем прежде всего, что при выполнении условия (1) функция $\tilde{f}$ голоморфна всюду вне S. Для этого заметим, что форма ω точна: прямой подсчет[1]) показывает, что при $\zeta_1 \neq z_1$

---

[1]) Проделаем этот подсчет (для сокращения письма полагаем $z = 0$):

$$d\Omega_1(\zeta, 0) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{|\zeta|^{2n}} \bar{\zeta}_\nu\, d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge \ldots \overset{\vee}{\ldots} \ldots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta +$$

$$+ \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{(-1)^{\nu}}{\zeta_1} \left(-\frac{n-1}{|\zeta|^{2n}} |\zeta_\nu|^2 + \frac{1}{|\zeta|^{2n-2}} \right) d\bar{\zeta}_\nu \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge \ldots \overset{\vee}{\ldots} \ldots$$

$$\ldots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{|\zeta|^{2n}} \bar{\zeta}_\nu\, d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots \overset{\vee}{\ldots} \ldots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta = \omega(\zeta, 0).$$

дифференциал формы

$$\Omega_1(\zeta, z) = \frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{(-1)^\nu}{|\zeta - z|^{2n-2}} \frac{\xi_\nu - \bar{z}_\nu}{\zeta_1 - z_1} d\xi_2 \wedge \ldots \overset{\vee}{\wedge} \ldots \wedge d\xi_n \wedge d\zeta \quad (4)$$

по переменным ζ, ξ равен $\omega(\zeta, z)$.

Заметим еще, что, в то время как форма Ω_1 имеет особенность на $(2n-2)$-мерной плоскости $\zeta_1 = z_1$, ее частная производная

$$\frac{\partial \Omega_1(\zeta, z)}{\partial \bar{z}_1} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{(-1)^\nu}{|\zeta - z|^{2n}} (\xi_\nu - \bar{z}_\nu)\, d\xi_2 \wedge \ldots \overset{\vee}{\wedge} \ldots \wedge d\xi_n \wedge d\zeta$$

имеет лишь точечную особенность $\zeta = z$.

При $z \notin S$ формулу Мартинелли — Бохнера (2) можно продифференцировать по $\bar{z}_1$ под знаком интеграла

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_1} = \int_S f(\zeta) \frac{\partial \omega(\zeta, z)}{\partial \bar{z}_1}. \quad (5)$$

Теперь заметим, что в силу условия (1) функция f при дифференцировании по переменным ζ, ξ ведет себя как постоянная; ее можно вносить под знак дифференциала. В самом деле, при $\zeta \in S$, $\zeta_1 \neq z_1$ имеем

$$d(f\Omega_1) = df \wedge \Omega_1 + f\omega = f\omega, \quad (6)$$

ибо Ω_1 содержит множитель $d\zeta$ и в силу (1) первое слагаемое равно нулю. Беря от обеих частей (6) частную производную по $\bar{z}_1$, найдем, что при $\zeta \in S$, $\zeta_1 \neq z_1$

$$d\left\{f(\zeta) \frac{\partial \Omega_1(\zeta, z)}{\partial \bar{z}_1}\right\} = f(\zeta) \frac{\partial \omega(\zeta, z)}{\partial \bar{z}_1}. \quad (7)$$

По сделанному выше замечанию форма $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{z}_1}$ имеет особенность лишь в точке $\zeta = z$ и, следовательно, правильна при $\zeta \in S$ и $z \notin S$, такова же и форма $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_1}$. Поэтому, переходя в (7) к пределу при $\zeta_1 \to z_1$, мы получим в силу непрерывности, что это равенство справедливо при всех $\zeta \in S$ и $z \notin S$.

Из этих замечаний видно, что формулу (5) при $z \notin S$ можно переписать в виде

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_1} = \int_S d\left\{f(\zeta) \frac{\partial \Omega_1(\zeta, z)}{\partial \bar{z}_1}\right\},$$

где под знаком дифференциала стоит правильная форма. Так как S — цикл (имеем $\partial S = \partial^2 D = 0$), то по формуле Стокса правая часть равна 0. Выделяя вместо переменного z_1 другие переменные z_ν, мы совершенно аналогично построим формы $\Omega_\nu(\zeta, z)$, правильные при $\zeta_\nu \neq z_\nu$ и такие, что $d\Omega_\nu = \omega$, и точно так же докажем, что $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$ при всех $z \notin S$. Таким образом, функция $\tilde{f}$ действительно голоморфна всюду вне S.

б) Теперь покажем, что эта функция равна нулю всюду вне $\bar{D}$. В самом деле, в той части $\mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$, где $|z_1| > \max\limits_{\zeta \in S} |\zeta_1|$, форма (4) неособая, поэтому мы можем воспользоваться соотношением (6). Мы получим, что для z, принадлежащих этой части,

$$\tilde{f}(z) = \int\limits_S f\omega = \int\limits_S d(f\Omega_1) = 0$$

(мы снова воспользовались формулой Стокса и тем, что S — цикл). Но упомянутая часть дополнения к $\bar{D}$ содержит внутренние точки, а так как само дополнение по условию связно, то в силу теоремы единственности $\tilde{f} \equiv 0$ во всем дополнении.

в) Докажем, наконец, что граничные значения функции $\tilde{f}$ совпадают с заданными значениями f. Учитывая свойство ядра Мартинелли — Бохнера (формула (12) предыдущего пункта), мы можем написать для любой $\zeta^0 \in S$ и любой $z \notin S$

$$\tilde{f}(z) - \chi(z) f(\zeta^0) = \int\limits_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\, \omega(\zeta, z), \tag{8}$$

где χ — характеристическая функция области D.

Утверждение будет доказано, если доказать, что правая часть (8) непрерывна в точке ζ^0: в самом деле, предельное значение правой части при $z \to \zeta^0$ извне D, очевидно, равно нулю; в силу непрерывности будет равно нулю и предельное значение при $z \to \zeta^0$ изнутри D, т. е. $f(z) \to f(\zeta^0)$ при $z \to \zeta^0$, $z \in D$.

Итак, остается доказать непрерывность функции

$$\varphi(z) = \int\limits_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\, \omega(\zeta, z)$$

в точке ζ^0. Для этого заметим сначала, что существует интеграл

$$\varphi(\zeta^0) = \int\limits_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\, \omega(\zeta, \zeta^0). \tag{9}$$

В самом деле, интеграл берется по $(2n-1)$-мерной поверхности

и произведения дифференциалов, входящих в форму ω:

$$d\xi_1 \wedge \ldots \overset{\vee}{\underset{\nu}{}} \ldots \wedge d\xi_n \wedge d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n,$$

имеют размерность $(2n-1)$-мерного элемента объема. Множители же при этих произведениях

$$\frac{|f(\zeta)-f(\zeta^0)|}{|\zeta-\zeta^0|^{2n}}(\xi_\nu-\xi_\nu^0)$$

имеют порядок не выше $\frac{1}{|\zeta-\zeta^0|^{2n-2}}$, ибо $f\in C^1$, и, следовательно, $f(\zeta)-f(\zeta^0)$, как и $\zeta_\nu-\zeta_\nu^0$, имеет порядок не ниже $|\zeta-\zeta^0|$. Таким образом, порядок бесконечности подинтегральной функции в (9) по крайней мере на единицу ниже размерности, и, значит, интеграл (9) сходится [1]).

Дальнейшее доказательство проводится обычным для анализа способом, и мы лишь наметим его ход. Разность

$$\varphi(z)-\varphi(\zeta^0)=\int\limits_S [f(\zeta)-f(\zeta^0)]\,[\omega(\zeta,\ z)-\omega(\zeta,\ \zeta^0)]$$

мы разобьем на две части, соответствующие интегрированию по достаточно малой (относительной) окрестности σ точки ζ^0 и остальной части $S\setminus\sigma$ границы. В силу доказанной сходимости интеграла (9) первую часть можно считать малой; в интеграле по $S\setminus\sigma$ ядро непрерывно, и, следовательно, этот интеграл сколь угодно мал, если точка z достаточно близка к ζ^0. Доказательство того, что $f\in C^1(\overline{D})$, мы опускаем. ▶

Замечание. Теорема Севери не верна при $n=1$: в самом деле, функция $f=\frac{1}{z}$ на границе единичного круга $U=\{|z|<1\}$ удовлетворяет условию (1), однако ее нельзя голоморфно продолжить в U. Приведенное доказательство при $n=1$ не проходит, ибо форма Коши $\frac{d\zeta}{\zeta-z}$, в отличие от формы Мартинелли — Бохнера, не является точной на ∂D, если $z\in D$ (построить Ω по формуле (4) при $n=1$ нельзя). Интеграл

$$\tilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

конечно, голоморфен при $z\notin\partial D$, но $\tilde{f}$ не обязательно равна 0 вне $\overline{D}$ [2]).

В качестве примера применения теоремы Севери мы приведем доказательство еще одной теоремы о принудительном

---

[1]) В этом проще всего убедиться, переходя на S к полярным координатам с полюсом в точке ζ^0.

[2]) См. задачи 1 и 3 к гл. II ч. I.

аналитическом продолжении функций нескольких переменных (ср. пп. 7 и 8) — теоремы о стирании компактных особенностей.

Теорема 2 (Осгуд—Браун). *Если функция f голоморфна всюду в области $D \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$, за исключением, быть может, множества $K \Subset D$, то f голоморфно продолжается на всю область D.*

◀ Выберем в $D \setminus K$ гладкие $(2n-1)$-мерные поверхности S_1 и S_2 так, чтобы они ограничивали соответственно области G_1 и G_2 со связными дополнениями, чтобы $K \Subset G_1 \Subset G_2$ и чтобы слой $G = G_2 \setminus G_1 \Subset D$ (рис. 94). Так как f голоморфна в $\bar{G}$, то по формуле Мартинелли—Бохнера для любой точки $z \in G$

$$f(z) = \int_{S_2} f(\zeta)\,\omega(\zeta, z) - \int_{S_1} f(\zeta)\,\omega(\zeta, z). \quad (10)$$

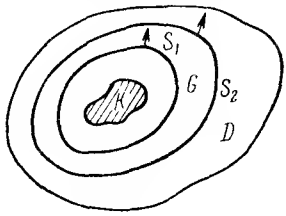


Рис. 94.

По той же причине на S_1 и S_2 выполняются условия Севери:

$$df \wedge d\zeta\,|_{S_1} = df \wedge d\zeta\,|_{S_2} = 0.$$

Так как z лежит вне поверхности S_1, то по теореме Севери второй интеграл в формуле (10) равен нулю, и, следовательно, для всех $z \in G$

$$f(z) = \int_{S_2} f(\zeta)\,\omega(\zeta, z). \quad (11)$$

Но по той же теореме Севери интеграл в правой части (11) представляет функцию, голоморфную всюду в G_2, и, следовательно, реализует требуемое аналитическое продолжение ▶

Из этой теоремы видно, что голоморфные функции $n \geqslant 2$ переменных не могут иметь изолированных особых точек, — особенности таких функций обязаны выходить на границу области или простираться в бесконечность [1]). Из этой же теоремы получается такое усиление теоремы Лиувилля из п. 6: если функция $n \geqslant 2$ переменных голоморфна вне шара $\{|z| < R\}$ и ограничена, то она постоянна. (В самом деле, по теореме Осгуда — Брауна эта функция голоморфно продолжается в шар, т. е. является целой; но она ограничена: в $\{|z| > R\}$ по условию, а в $\{|z| \leqslant R\}$ как непрерывная на компакте функция.)

---

[1]) Сравните: функция $f = \frac{1}{z}$ на плоскости z имеет особую точку $\{0\}$, а в пространстве (z, w) — особую аналитическую прямую $\{z = 0\}$, простирающуюся в бесконечность.

18. Формула Вейля. Интегральная формула Мартинелли — Бохнера выписывается для областей достаточно общего вида. Однако при $n>1$ она имеет недостаток, существенный для ряда вопросов: ядро этой формулы $\omega(\zeta, z)$ неаналитически зависит от z. Мы уже приводили примеры интегральных формул с аналитическими ядрами — формулу Коши для поликруговых областей и формулу Лере для выпуклых областей. Здесь мы приведем еще одну формулу с аналитическим ядром, которая применима для одного специального класса областей, более широкого, чем поликруговые области.

Определение 1. Пусть дана область $D\subset\mathbb{C}^n$, а также конечное число функций $W_i\in H(D)$ и плоских областей $D_i\Subset W_i(D)$, $i=1, \ldots, N$. Будем называть *полиэдрическим множеством* множество

$$\Pi=\{z\in D:\ W_i(z)\in D_i,\ i=1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

если оно компактно в D.

Такое множество не обязательно связно; связное множество вида (1) мы будем называть *полиэдрической областью*. Часто рассматривается случай, когда все области D_ν являются кругами; соответствующее множество

$$\Pi=\{z\in D:\ |W_i(z)|<r_i,\ i=1, \ldots, N\} \tag{2}$$

будем называть *аналитическим полиэдром*. Если все функции W_i являются полиномами, то (2) называется полиномиальным полиэдром.

В частном случае, когда $N=n$ и все $W_i(z)=z_i$, полиэдрическая область является поликруговой, а полиэдр — поликругом.

Определение 2. Полиэдрическое множество (1) называется *множеством Вейля*, если $N\geqslant n$ и 1) все его грани

$$\sigma_i=\{z\in D:\ W_i(z)\in\partial D_i,\ W_j(z)\in\bar{D}_j,\ j\neq i\} \tag{3}$$

являются $(2n-1)$-мерными множествами; 2) пересечение любых k различных граней $(2\leqslant k\leqslant n)$ — *ребро* множества Вейля — имеет размерность не выше $2n-k$. Совокупность n-мерных ребер

$$\sigma_{i_1 \ldots i_n}=\sigma_{i_1}\cap \ldots \cap\sigma_{i_n} \tag{4}$$

множества Вейля называется его *остовом*. Связные множества Вейля называются *областями Вейля*.

Для получения интегрального представления функций, голоморфных в областях Вейля, нам понадобится специальное разложение функций W_i, определяющих эти области. Возможность такого разложения гарантирует

Теорема Хефера. *Для любой функции* $W_i \subset H(D)$, *где* D — *область в* $\mathbb{C}^n$, *существуют* n *функций* $P_\nu^i(\zeta, z)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *голоморфных в* $D \times D$ *и таких, что для всех точек* ζ, $z \in D$ *имеет место тождество*

$$W_i(\zeta) - W_i(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu) P_\nu^i(\zeta, z). \tag{5}$$

В общем случае теорема Хефера неэлементарна [1]), мы приведем ее доказательство в гл. IV. Здесь мы лишь заметим, что для полиномов тождество (5) получается простой перегруппировкой тейлоровского разложения функции W_i в точке z, причем коэффициенты Хефера P_ν^i также оказываются полиномами.

Теорема 1 (Вейль). *Пусть* Π — *область Вейля* (1), *определяемая областями* D_i *с гладкими границами. Тогда любую функцию* $f \in H(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$ *в любой точке* $z \in \Pi$ *можно представить формулой*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 \ldots i_n}{}' \int_{\sigma_{i_1 \ldots i_n}} \frac{f(\zeta)}{\prod_{\nu=1}^{n} \{W_{i_\nu}(\zeta) - W_{i_\nu}(z)\}} \begin{vmatrix} P_1^{i_1} & \ldots & P_n^{i_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_1^{i_n} & \ldots & P_n^{i_n} \end{vmatrix} d\zeta, \tag{6}$$

где суммирование распространяется на все упорядоченные наборы индексов $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant N)$, *определяющие ребра остова области,* P_ν^i — *коэффициенты Хефера и* $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$; *ребра ориентированы условием, что все* ∂D_i *проходятся в положительном направлении.*

В случае, когда Π представляет собой поликруговую область $(N = n,\ W_i \equiv z_i,\ i = 1, \ldots, N)$, остов Γ состоит из одного ребра $\sigma_{1 \ldots n}$ (и совпадает с остовом в смысле п. 2) и сумма в (6) состоит из одного слагаемого. Коэффициенты Хефера P_ν^i в этом случае равны 1 при $i = \nu$ и 0 при $i \neq \nu$, т. е. определитель в формуле Вейля равен 1, и эта формула принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu)}. \tag{7}$$

Таким образом, формула Вейля обобщает интегральную формулу Коши для поликруговых областей на случай областей Вейля. Как и формула Коши, она имеет ядро, аналитическое

[1]) Теорема Хефера была доказана в 1942 г.

по переменным ζ и z. Для упрощения формальных выкладок мы приведем доказательство теоремы Вейля в случае $n=2$.

◀ Будем исходить из формулы Мартинелли — Бохнера, которая в случае областей Вейля из $\mathbb{C}^2$ имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\sigma_i} f(\zeta)\frac{(\xi_1-\bar z_1)\,d\xi_2-(\xi_2-\bar z_2)\,d\xi_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta, \tag{8}$$

где σ_i — грань области Π. Идея получения формулы Вейля следующая: мы постараемся применить к (8) формулу Стокса так, чтобы исчезли неаналитические дифференциалы $d\bar\xi_\nu$ и вместо граней σ_i интегрирование велось по ребрам остова σ_{ij}; при этом окажется, что исчезнет и неаналитичность ядра (переменные $\bar\xi_\nu-\bar z_\nu$ и $|\zeta-z|$). Весьма существенную роль в этом преобразовании будет играть разложение Хефера (5).

Заметим прежде всего, что форма $\omega(\zeta, z)$, стоящая под знаком интеграла (8), точная; она является дифференциалом любой из N форм

$$\Omega_i(\zeta, z)=\frac{1}{|\zeta-z|^2\{W_i(\zeta)-W_i(z)\}}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ \xi_1-\bar z_1 & \xi_2-\bar z_2\end{vmatrix}d\zeta. \tag{9}$$

Подтвердим это прямой выкладкой, полагая для простоты письма $z=0$ и $W_i=W_i(\zeta)-W_i(0)$:

$$d\Omega_i=\frac{1}{W_i}\left\{-\frac{\zeta_1\,d\xi_1+\zeta_2\,d\xi_2}{|\zeta|^4}\left(P_1^i\bar\xi_2-P_2^i\bar\xi_1\right)+\frac{1}{|\zeta|^2}\left(P_1^i\,d\bar\xi_2-P_2^i\,d\bar\xi_1\right)\right\}\wedge d\zeta=$$

$$=\frac{1}{W_i|\zeta|^4}\left\{-\left(\zeta_1\,d\xi_1+\zeta_2 d\xi_2\right)\left(P_1^i\bar\xi_2-P_2^i\bar\xi_1\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\zeta_1\bar\xi_1+\zeta_2\bar\xi_2\right)\left(P_1^i\,d\bar\xi_2-P_2^i\,d\bar\xi_1\right)\right\}\wedge d\zeta=$$

$$=\frac{1}{W_i|\zeta|^4}\left(\bar\xi_1 d\bar\xi_2-\bar\xi_2\,d\bar\xi_1\right)\left(\zeta_1P_1^i+\zeta_2P_2^i\right)\wedge d\zeta=\frac{1}{|\zeta|^4}\left(\bar\xi_1\,d\bar\xi_2-\bar\xi_2\,d\bar\xi_1\right)\wedge d\zeta,$$

что и требовалось доказать.

Заметим еще, что при $z\in\Pi$ и $\zeta\in\sigma_i$ лишь разность $W_i(\zeta)-W_i(z)$ отлична от нуля (ибо $W_i(\zeta)\in\partial D_i$, а $W_i(z)\in D_i$), а все остальные разности в некоторых точках обращаются в нуль. Поэтому при $z\in\Pi$, $\zeta\in\sigma_i$ лишь форма Ω_i неособая, а все остальные формы Ω_j, $j\neq i$, особые, и при интегрировании по грани σ_i формулу Стокса можно применять лишь так:

$$\int\limits_{\sigma_i} f(\zeta)\,\omega(\zeta, z)=\int\limits_{\sigma_i} d\{f(\zeta)\,\Omega_i(\zeta, z)\}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\int\limits_{\sigma_{ij}} f(\zeta)\,\Omega_i(\zeta, z)$$

(мы воспользовались тем, что голоморфную функцию f можно вносить под знак дифференциала формы Ω_i).

Если складывать эти интегралы, как требует формула (8), то каждое ребро σ_{ij} будет встречаться дважды, с противоположной ориентацией (со стороны граней σ_i и σ_j). Поэтому мы будем иметь

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\sigma_i} f(\zeta)\,\omega(\zeta, z) = \sum_{i,j=1}^{N}{}' \int_{\sigma_{ij}} f(\zeta)\{\Omega_i(\zeta, z) - \Omega_j(\zeta, z)\},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам индексов $(1 \leqslant i < j \leqslant N)$.

Остается заметить, что при вычитании неаналитические части ядер (9) сокращаются:

$$\Omega_i - \Omega_j = \frac{1}{|\zeta|^2}\,\frac{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2}{W_i W_j}\left(P_1^i P_2^j - P_1^j P_2^i\right) d\zeta = \frac{1}{W_i W_j}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ P_1^j & P_2^j \end{vmatrix} d\zeta$$

(мы снова воспользовались принятыми выше упрощениями в обозначениях и разложением Хефера). Мы приходим, таким образом, к формуле

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{i,j=1}^{N}{}' \int_{\sigma_{ij}} \frac{f(\zeta)}{\{W_i(\zeta) - W_i(z)\}\{W_j(\zeta) - W_j(z)\}} \begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ P_1^j & P_2^j \end{vmatrix} d\zeta, \quad (10)$$

которая совпадает с формулой Вейля при $n = 2$ ▶

Замечание. Если множество Вейля (1) несвязно, то оно распадается на некоторое не более чем счетное число связных компонент (областей Вейля). Теорема 1, очевидно, остается в силе и в том случае, если Π — несвязное множество Вейля. При этом для $z,^*$ принадлежащих какой-либо компоненте, в формуле Вейля (6) отличен от нуля лишь интеграл по остову этой компоненты, а интегралы по остовам других компонент обращаются в нуль. Это следует из того, что интеграл Мартинелли — Бохнера, из которого выводится интеграл Вейля, равен нулю вне области.

Аналитичность ядра формулы Вейля используется, например, в вопросах приближения голоморфных функций функциями из некоторого класса. Приведем основные факты, относящиеся к этому.

Теорема 2. *Любую функцию f, голоморфную в аналитическом полиэдре* (2) *и непрерывную в его замыкании, в этом полиэдре можно разложить в ряд*

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \sum_{(i)}{}' A_k^i [W_i(z)]^k, \quad (11)$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$ *и* $i=(i_1, \ldots, i_n)$ *— векторные индексы,* $[W_i(z)]^k=[W_{i_1}(z)]^{k_1}\ldots[W_{i_n}(z)]^{k_n}$, *внутреннее суммирование производится по упорядоченным наборам* $1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant N$ *и коэффициенты выражаются по формулам*

$$A_k^i=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_n}}\frac{f(\zeta)}{[W_{i_1}(\zeta)]^{k_1+1}\ldots[W_{i_n}(\zeta)]^{k_n+1}}\begin{vmatrix}P_1^{i_1}&\ldots&P_n^{i_1}\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ P_1^{i_n}&\ldots&P_n^{i_n}\end{vmatrix}d\zeta. \qquad (12)$$

Ряд (11) *сходится равномерно на любом компактном подмножестве полиэдра* Π.

◀ Разложение (11) получается из формулы Вейля точно так же, как разложение Тейлора из интегральной формулы Коши. Для любой точки $z\in\Pi$ и любой точки ζ на остове Π можно написать разложение в сходящуюся геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}[W_{i_\nu}(\zeta)-W_{i_\nu}(z)]}=$$

$$=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}\frac{[W_{i_1}(z)]^{k_1}\ldots[W_{i_n}(z)]^{k_n}}{[W_{i_1}(\zeta)]^{k_1+1}\ldots[W_{i_n}(\zeta)]^{k_n+1}}=\sum_{|k|=0}^{\infty}\frac{[W_i(z)]^k}{[W_i(\zeta)]^{k+1}}.$$

При фиксированном $z\in\Pi$ это разложение сходится на $\sigma_{i_1\ldots i_n}$ равномерно по ζ, и, подставляя его в формулу Вейля (6), мы получаем разложение (11) с коэффициентами (12).

Равномерная сходимость ряда (11) на компактных подмножествах полиэдра Π доказывается обычным образом ▶

Следствие 1. *Любую функцию* f, *голоморфную в аналитическом полиэдре* Π, *на любом множестве* $K\Subset\Pi$ *можно сколь угодно точно приблизить функциями, голоморфными в области* D, *которая участвует в определении полиэдра.*

Коротко это следствие можно сформулировать так: *семейство функций* $H(D)$ *плотно в семействе* $H(\Pi)$.

◀ Частичные суммы ряда (11), очевидно, принадлежат $H(D)$ — они и приближают функции $f\in H(\Pi)$. Чтобы избежать условия непрерывности f в $\overline{\Pi}$, нужно заменить Π полиэдром $\Pi'=\{z\in\Pi\colon |W_i(z)|<r_i'\}$, где все $r_i'<r_i$ и достаточно близки к последним (i — скалярный индекс) ▶

В частности, когда Π — полиномиальный полиэдр (т. е. все функции W_i — полиномы), частичные суммы ряда (11) являются полиномами. Мы получаем

Следствие 2. *Любую функцию f, голоморфную в полиномиальном полиэдре Π, на любом множестве $K \Subset \Pi$ можно сколь угодно точно приблизить полиномами.*

Области из $\mathbb{C}^n$, на компактных подмножествах которых каждая голоморфная функция сколь угодно точно приближается полиномами, называются *областями Рунге* (ср. теорему Рунге в п. 22 ч. I). Следствие 2 можно сформулировать так: *любой полиномиальный полиэдр является областью Рунге.*

ЗАДАЧИ

1. Пусть $a^1, \ldots, a^{2n}$ — (действительно) линейно независимые векторы в $\mathbb{C}^n$ и Γ — группа преобразований вида $z \to z + \sum_{\nu=1}^{2n} N_\nu a^\nu$, где N_ν — целые числа. Точки $z, z' \in \mathbb{C}^n$ назовем эквивалентными, если существует перенос $\lambda \in \Gamma$ такой, что $\lambda(z) = z'$. Доказать, что в множестве $\mathbb{C}^n/\Gamma$ классов эквивалентности по этому отношению можно ввести структуру n-мерного комплексного многообразия ($\mathbb{C}^n/\Gamma$ называется n-мерным комплексным тором, ср. п. 32 ч. I).

2. Доказать, что любая функция f, голоморфная во всех точках комплексного тора $\mathbb{C}^n/\Gamma$ (см. задачу 1), постоянна.

3. Пусть якобиан системы n функций f_ν, голоморфных в точке $a \in \mathbb{C}^n$, тождественно равен нулю в окрестности a. Доказать, что в некоторой окрестности точки a эти функции связаны голоморфной зависимостью $\Phi(f_1, \ldots, f_n) = 0$.

4. Подмножество N многообразия M класса C^1 называется подмногообразием, если оно является многообразием в индуцируемой топологии и отображение вложения $N \to M$ всюду имеет ранг, равный размерности N. Доказать, что всякая функция из $C^1(N)$ является сужением на N функции класса $C^1(M)$.

5. Пусть M — $2m$-мерная поверхность класса C^1 в $\mathbb{C}^n$, т. е. образ некоторой области $D \subset \mathbb{C}^m$ при гладком отображении $z \to f(z)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Доказать эквивалентность следующих условий:

а) для любой точки $P \subset M$ в касательной плоскости $T_P M$ нет аналитических прямых;

б) $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi}, \dfrac{\partial f}{\partial \bar{\xi}}\right) \equiv 2m$ в D (отсюда следует, что $n \geqslant 2m$).

6. Назовем голоморфной кривой систему n голоморфных в области $D \subset \mathbb{C}$ функций f_ν; тогда $f = (f_1, \ldots, f_n)$ отображает D в $\mathbb{C}^n$. Доказать, что для голоморфных кривых имеет место принцип максимума модуля как в евклидовой метрике $|f| = \sqrt{\sum |f_\nu|^2}$, так и в метрике $\max(|f_1|, \ldots, |f_n|)$.

7. Привести пример голоморфной кривой $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, для которой множество предельных значений по всевозможным последовательностям $\zeta^{(\nu)} \in \mathbb{C}$, сходящимся к бесконечности, совпадает с $\mathbb{C}^2$. [Указание: воспользоваться задачей 1 к гл. V ч. I.]

8. Доказать, что множество голоморфных отображений $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$, обладающих свойством, указанным в задаче 7, всюду плотно в пространстве всех голоморфных отображений $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ с топологией равномерной сходимости на компактах.

9. Дифференциальная форма ω в точке P многообразия M равна нулю, если в некоторой локальной системе координат все ее коэффициенты в точке P равны нулю. Доказать независимость этого определения от

выбора координат. Доказать, что m-мерное многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем существует дифференциальная форма ω порядка m, нигде не равная нулю.

10. Пусть f голоморфна в поликруге $U \subset \mathbb{C}^n$ и непрерывна на множестве $U \cup \Gamma$, где Γ — остов U. Доказать, что f продолжается до функции, непрерывной в $\overline{U}$.

11. Функция f непрерывна на границе ∂U единичного поликруга $U \subset \mathbb{C}^n$ и на каждом одномерном аналитическом круге $\Delta_{\nu, a} = \{\zeta\colon \zeta_\mu = e^{ia_\mu}, \mu \neq \nu, |\zeta_\nu| < 1\}$ голоморфна по ζ_ν. Доказать, что f продолжается до функции, голоморфной в U и непрерывной в $\overline{U}$.

12. Функция f непрерывна на остове Γ единичного поликруга $U \subset \mathbb{C}^n$. Доказать, что f продолжается до функции, голоморфной в U и непрерывной в $\overline{U}$, тогда и только тогда, когда

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, \zeta^k\, d\zeta = 0 \quad \text{для всех} \quad k = (k_1, \ldots, k_n),\ k_\nu \geqslant 0 - \text{целые}.$$

13. Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ со связной гладкой границей ∂D и функция $f \in C^1$ в окрестности ∂D. Предположим, что вдоль каждой касательной к ∂D аналитической прямой $z = a + \omega\lambda$, $a, \omega \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, функция f удовлетворяет касательным уравнениям Коши — Римана: $\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} f(a + \omega\lambda) = 0$ в точке касания. Доказать, что f продолжается до функции, голоморфной в D и непрерывной в $\overline{D}$.

14. Пусть $\overline{\Pi} = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |p_\nu(z)| \leqslant 1,\ \nu = 1, \ldots, n\}$ — полиномиальный полиэдр в $\mathbb{C}^n$ такой, что $\operatorname{Det}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \neq 0$ на его остове Γ. Доказать, что всякая функция f, голоморфная в Π и непрерывная в $\Pi \cup \Gamma$, равномерно приближается полиномами (и потому, в частности, продолжается до функции, непрерывной в $\overline{\Pi}$).

ГЛАВА III

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Любая плоская область служит естественной областью существования голоморфной функции: для любой области $D \subset \mathbb{C}$ существует функция, голоморфная в D и не продолжаемая аналитически за пределы этой области (см. п. 43, ч. I). В отличие от этого, в пространстве $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ существуют области, из которых любая голоморфная функция непременно продолжается в более широкую область. Мы приводили несколько примеров таких областей, скажем нелогарифмически выпуклые области Рейнхарта (п. 7) или области с компактными дырками (теорема Осгуда — Брауна в п. 17).

Эта глава посвящена в основном описанию пространственных областей, которые служат областями существования голоморфных функций.

§ 7. Области голоморфности

19. Теорема Хартогса о продолжении. Здесь мы приведем еще одну простую теорему о принудительном аналитическом продолжении функций нескольких комплексных переменных.

Теорема 1 (Хартогс). *Пусть даны области* $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}('z)$ *и* $D_n \subset \mathbb{C}(z_n)$; *любая функция* f, *голоморфная в окрестности* (*в смысле* $\mathbb{C}^n$) *множества*

$$M = ('\bar{D} \times \partial D_n) \cup (\{'z^0\} \times \bar{D}_n), \tag{1}$$

где $'z^0 \in 'D$, *голоморфно продолжается во всю область* $D = 'D \times D_n$ (см. рис. 95, где D_n представляет собой круг).

◀ Не уменьшая общности, можно считать, что D_n ограничена конечным числом гладких кривых.

Функция

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \frac{f('z, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n \tag{2}$$

голоморфна в области $D = 'D \times D_n$. В самом деле, при $\zeta_n \in \partial D_n$ и $'z \in 'D$ точка $('z, \zeta_n) \in M$, следовательно, $f('z, \zeta_n)$, а по лемме п. 6 и $\tilde{f}$, голоморфно зависит от $'z$ в $'D$ при любом $z_n \notin \partial D_n$;

с другой стороны, при любом $'z \in {}'D$ функция $\tilde{f}$ (как интеграл типа Коши) голоморфно зависит от z_n в D_n. Но при z, принадлежащих некоторой окрестности множества $\{'z^0\} \times D_n$, функция f по условию голоморфна, и для таких z по интегральной формуле Коши для функций одного переменного z_n

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \frac{f('z, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n}\, d\zeta_n. \qquad (3)$$

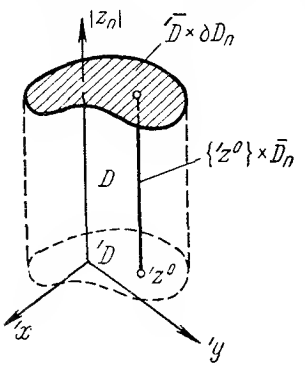


Рис. 95.

Таким образом, для z из этой окрестности $\tilde{f}(z) \equiv f(z)$ и по теореме единственности для функций нескольких переменных $\tilde{f} \equiv f$ всюду, где f голоморфна. Но $\tilde{f} \in H(D)$, и, следовательно, она дает требуемое аналитическое продолжение f ▶

Пример. Всякая функция f, голоморфная в области из $\mathbb{C}^2$, диаграмма Рейнхарта которой изображена на рис. 96, аналитически продолжается в бикруг $\{|z_1| < R_1, |z_2| < R_2\}$.

Замечание. Как видно из доказательства, условия теоремы Хартогса можно несколько ослабить, потребовав лишь, чтобы функция f была: 1) голоморфной в окрестности множества $\{'z^0\} \times \bar{D}_n$, 2) непрерывной по z_n и голоморфной по $'z$ на множестве $'\bar{D} \times \partial D_n$. Заметим еще, что в этой теореме можно поменять роли областей $'D$ и D_n (и соответственно переменных $'z$ и z_n), — для этого достаточно вместо (2) рассмотреть кратный интеграл Коши по $\partial' D$.

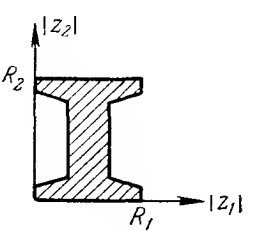


Рис. 96.

В качестве примеров применения теоремы Хартогса рассмотрим вопрос о стирании особенностей голоморфных функций нескольких переменных. Первая из теорем, которые мы здесь докажем, является пространственным аналогом теоремы об устранимости изолированной особой точки, в окрестности которой голоморфная функция ограничена. В случае пространственной области $D \subset \mathbb{C}^n$ роль изолированной точки играют так называемые *тонкие множества* $M \subset D$. Они определяются условием, что для каждой точки $z \in D$ существует окрестность $U_z \in D$ и в ней голоморфная функция $\varphi \not\equiv 0$, которая равна 0

во всех точках $M \cap U_z$. По теореме единственности тонкое множество не может иметь внутренних точек, оно нигде не плотно в D. Можно доказать, что дополнение к тонкому множеству относительно области D связно (задача 3 к гл. V).

Теорема 2. *Пусть M — тонкое множество в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и функция f голоморфна в $D \setminus M$. Если f локально ограничена* [1]), *то она единственным образом продолжается до функции $\tilde{f}$, голоморфной в D.*

◀ Единственность продолжения очевидна, ибо множество $D \setminus M$ связно. Достаточно доказать голоморфную продолжимость f в произвольную точку $a \in M$, которую без ограничения общности можно принять равной нулю. Выполняя, если надо, линейную замену переменных, можно считать, что функция φ, определяющая M в окрестности U_0, удовлетворяет условию $\varphi('z, 0) \not\equiv 0$, где, как всегда, $'z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. При достаточно малом $\rho_n > 0$ функция $\varphi('0, z_n) \neq 0$ на окружности $\{|z_n| = \rho_n\}$, поэтому числа ρ_ν $(\nu = 1, \ldots, n-1)$ можно выбрать столь малыми, что $\varphi('z, z_n) \neq 0$ для всех $'z \in {}'\overline{V} = \{|z_\nu| \leqslant p_\nu\}$ и всех $z_n \in \partial D_n = \{|z_n| = \rho_n\}$. Отсюда следует, что точки $('z, z_n)$, где $'z \in {}'\overline{V}$, а $z_n \in \partial D_n$, не принадлежат множеству M, т. е. f голоморфна в окрестности ${}'\overline{V} \times \partial D_n$.

С другой стороны, при любой фиксированной $'z^0 \in {}'V$ функция $\varphi('z^0, z_n)$ согласно подготовительной теореме Вейерштрасса имеет конечное число нулей в круге $\overline{D}_n = \{|z_n| \leqslant \rho_n\}$, т. е. $f('z^0, z_n)$ имеет в $\overline{D}_n$ конечное число особых точек. Так как она по условию ограничена в $\overline{D}_n$, то эти особенности устранимы и, значит, $f('z^0, z_n)$ продолжается до голоморфной в $\overline{D}_n$ функции. Продолженная функция $\tilde{f}$ голоморфна в окрестности множества $({}'\overline{V} \times \partial D_n) \cup ('0 \times \overline{D}_n)$ и по теореме 1 голоморфна в поликруге $V = {}'V \times D_n$ ▶

В следующей теореме мы усилим ограничение на функцию f, предположив ее непрерывной в D, но зато ослабим требование на множество M. Именно, мы предположим, что оно лежит не на тонком множестве, а лишь на гладкой поверхности размерности $2n-1$.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и голоморфна всюду в D, за исключением множества M, лежащего на гладкой поверхности S размерности $2n-1$, то она голоморфна во всей D.*

---

[1]) Это означает, что для каждой точки $z \in D$ найдется окрестность U_z такая, что f ограничена в $(D \setminus M) \cap U_z$.

◀ Доказательство аналогично предыдущему. Пусть в окрестности U точки $0 \in M$ поверхность S представляется уравнением $y_n = \varphi('z, x_n)$, где φ — гладкая действительная функция. Так как $\varphi('0, 0) = 0$, то в силу непрерывности для любого достаточно малого $\beta > 0$ найдется такая окрестность $'V$ точки $'0$ и такое $\alpha > 0$, что $|\varphi('z, x_n)| < \beta$ для всех $'z \in 'V$ и $|x_n| < \alpha$. Поэтому f голоморфна в $'V \times \{|x_n| < \alpha, \beta < |y_n| < \gamma\}$, где $\gamma > \beta$ достаточно мало. С другой стороны, при фиксированной $'z^0 \in 'V$ функция $f('z^0, z_n)$ голоморфна по z_n в прямоугольнике $D_n = \{|x_n| < \alpha, |y_n| < \gamma\}$ всюду, за исключением гладкой кривой $y_n = \varphi('z^0, x_n)$, и непрерывна в D_n. Из теории функций одного переменного известно (см. задачу 5 к гл. III ч. I), что отсюда следует голоморфность $f('z^0, z_n)$ в D_n. По теореме 1 (см. замечание вслед за ней) заключаем, что f голоморфна в $'V \times D_n$ ▶

20. Понятие области голоморфности. Как мы несколько раз отмечали, в пространстве не всякая область является областью существования голоморфной функции — имеются области, из которых каждая голоморфная функция аналитически продолжается в более широкую область. Мы хотим с самого начала подчеркнуть, что в пространстве, как и на плоскости, в процессе такого продолжения расширяющаяся область может начать налегать на самое себя, образуя второй слой, в котором функция принимает другие значения, чем в первом слое. Мы приходим, таким образом, к необходимости рассматривать «многолистные» области, аналогичные римановым поверхностям аналитических функций одного переменного. Подробнее мы рассмотрим многолистные области в § 9. Сейчас мы только приведем пример, из которого видно, что необходимость в таких областях может возникнуть и в процессе «принудительного» аналитического продолжения.

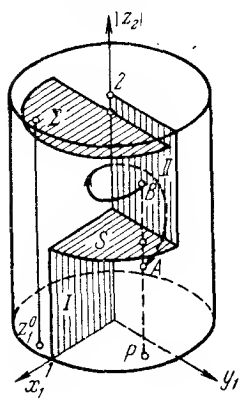


Рис. 97.

Пример. Пусть $D \subset \mathbb{C}^2$ — область, диаграмма Хартогса которой изображена на рис. 97, это цилиндр $\{x_1^2 + y_1^2 < 1, |z_2| < 2\}$ с выброшенными квадратами $I = \{0 \leqslant x_1 < 1, y_1 = 0, |z_2| \leqslant 1\}$, $II = \{0 \leqslant y_1 < 1, x_1 = 0, 1 \leqslant |z_2| < 2\}$ и сектором $S = \{|z_1| < 1, x_1 \geqslant 0, y_1 \geqslant 0, |z_2| = 1\}$. По теореме Хартогса каждая функция $f \in H(D)$ аналитически продолжается через сектор S как сверху вниз, так и снизу вверх [1]). В самом деле, рассмотрим, например,

[1]) Мы для простоты говорим о множествах, изображенных на диаграмме Хартогса, понимая под ними соответствующие множества из $\mathbb{C}^2$.

первый способ продолжения (сверху вниз): функция f голоморфна в окрестности полукруга $\Sigma=\{|z_1|\leqslant 1-\varepsilon,\ x_1\geqslant\varepsilon,\ |z_2|=2-\varepsilon\}$ и отрезка $\{z_1=z_1^0,\ |z_2|\leqslant 2-\varepsilon\}$, где $|z_1^0|<1$, $x_1^0>0$, $y_1^0<0$, и, следовательно, продолжается на $\Sigma\times\{|z_2|<2-\varepsilon\}$.

При таком продолжении мы снова попадаем в область D, но функция не обязана принимать те же значения, которые она имела. В самом деле, рассмотрим, например, функцию $f_0(z_1, z_2)=\sqrt{z_1}$, где рассматривается непрерывная в D ветвь корня, которая принимает положительные значения на оси x_1. Она, очевидно, голоморфна в D и в точках A и B диаграммы, которые проектируются в одну точку P плоскости z_1, но расположены по разные стороны S, принимает различные по знаку значения (переходя из A в B по D, мы должны изменить $\arg z_1$ на 2π). С другой стороны, продолжая f_0 через S по теореме Хартогса (как описано выше), мы получим, что значения f_0, скажем, в точке B и ее продолжения в точке A должны быть одинаковыми.

Таким образом, продолжение f_0 привело нас к неоднозначной функции; не желая рассматривать такие функции, мы должны относить продолженные значения ко второму экземпляру области D, склеенному с первым по множеству S. Мы получим пример многолистной области из числа тех, о которых говорилось выше.

Введем теперь одно из важнейших понятий теории функций нескольких комплексных переменных.

Определение 1. Область $D\subset\mathbb{C}^n$ называется *областью голоморфности функции* f, если f голоморфна в D и не продолжаема аналитически за пределы этой области в следующем смысле[1]): для любой точки $z^0\in D$ функция f, голоморфная в наибольшем поликруге $U(z^0, r)\subset D$, не продолжается голоморфно ни в какой поликруг $U(z^0, r')$, $r'>r$ (радиусы r и r' — скаляры). Область называется *областью голоморфности*, если она является областью голоморфности какой-либо функции.

Определение 2. Область G, строго содержащая область D, называется *голоморфным расширением* последней, если любая $f\in H(D)$ продолжается до функции, голоморфной в G.

Второе определение содержательно, когда D не является областью голоморфности, т. е. лишь в пространственном случае. Интересную особенность этого случая выражает следующая простая

---

[1]) Уточнение существенно, когда f не продолжаема в однолистные области, содержащие D, но продолжается в неоднолистные (как f_0 в приведенном выше примере).

Теорема 1. *Если G является голоморфным расширением области D, то продолжение любой функции $f \in H(D)$ может принимать в $G \setminus D$ лишь те значения, которые f принимает в D.*

◀ Пусть, от противного, некоторая функция $f \in H(D)$ принимает какое-либо значение w_0 в $G \setminus D$, но не принимает его в D. Тогда функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w_0}$, очевидно, голоморфна в D, но непродолжаема аналитически в G, ибо в некоторой точке $G \setminus D$ она обращается в бесконечность. Это противоречит определению 2 ▶

Следствие. *Голоморфное расширение G ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$ также является ограниченной областью.*

◀ По теореме 1 функции $f_\nu(z) = z_\nu$ (координаты точки z) принимают в $G \setminus D$ те же значения, что и в D, т. е.

$$\sup_{z \in G} |z_\nu| = \sup_{z \in D} |z_\nu|, \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Но так как D ограничена, то правые части (1) конечны, следовательно, конечны и левые, т. е. G ограничена ▶

Как для дальнейшего развития теории, так и для приложений важно уметь находить в известном смысле максимальные голоморфные расширения данной области — так называемые оболочки голоморфности. Этой задачей мы займемся в § 9. А пока будем учиться характеризовать «нерасширяемые» области пространства $\mathbb{C}^n$, т. е. области голоморфности (на плоскости любая область нерасширяема в принятом здесь смысле, так что поставленная задача интересна лишь при $n > 1$).

Начнем с простых достаточных условий. Будем говорить, что в граничной точке ζ области $D \subset \mathbb{C}^n$ существует *барьер*, если для любого множества $K \Subset D$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $g \in H(D)$ такая, что $\|g\|_K = \max\limits_{z \in K} |g(z)| \leqslant 1$, но $|g(z)| > 1$ в некоторой точке $z \in U(\zeta, \varepsilon)$.

Очевидно, что если существует функция $f \in H(D)$, неограниченная в точке $\zeta \in \partial D$ (т. е. такая, что $f(z^\nu) \to \infty$ по некоторой последовательности $z^\nu \in D$, $z^\nu \to \zeta$), то в этой точке существует и барьер. В самом деле, для любых $K \Subset D$ и $\varepsilon > 0$ можно взять $g(z) = \dfrac{f(z)}{\|f\|_K}$. Обратное утверждение также справедливо, причем в следующей усиленной форме:

Теорема 2. *Для любого множества $\mathscr{E} \subset \partial D$ точек, в которых существует барьер, найдется функция $f \in H(D)$, неограниченная во всех точках $\mathscr{E}$.*

◀ Прежде всего заметим, что существует не более чем счетное множество точек ∂D, всюду плотное на $\mathscr{E}$, и что функ-

ция, неограниченная на таком множестве, будет неограниченной и на $\mathscr{E}$. Поэтому $\mathscr{E}$ можно считать не более чем счетным множеством. В этом предположении мы построим последовательность $\zeta^\nu \in \mathscr{E}$ так, чтобы каждая точка $\mathscr{E}$ встречалась в ней бесконечно часто [1]). Теперь для доказательства теоремы достаточно найти функцию $f \in H(D)$ и последовательность точек $z^\nu \in D$ так, чтобы $|z^\nu - \zeta^\nu| \to 0$ и $f(z^\nu) \to \infty$.

Сначала мы построим компактное исчерпывание области D, т. е. возрастающую последовательность замкнутых множеств $R_1 \subset R_2 \subset \ldots$ таких, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k = D$, — это делается точно так же, как при доказательстве леммы из п. 22 ч. I. Теперь мы построим последовательность натуральных чисел $p_\nu \nearrow \infty$, точек $z^\nu \in D$ и функций $f_\nu \in H(D)$ так, чтобы для $K_\nu = R_{p_\nu}$ и любого $\nu = 1, 2, \ldots$ выполнялись условия:

$$1)\ z^\nu \in K_{\nu+1} \setminus K_\nu,\ |z^\nu - \zeta^\nu| < \frac{1}{\nu};\quad 2)\ \|f_\nu\|_{K_\nu} \leqslant 1,\ \text{но}\ |f_\nu(z^\nu)| > 1. \tag{2}$$

Это можно сделать по индукции: для $\nu = 1$ берем $K_1 = R_1$, в качестве f_1 — барьер в точке ζ^1 для множества K_1 и в качестве z^1 — точку из $D \setminus K_1$, $|z^1 - \zeta^1| < 1$, в которой $|f_1(z^1)| > 1$ (она существует по определению барьера), затем выбираем $K_2 = R_{p_2}$ так, чтобы $z^1 \in K_2$ (можно сделать по условию исчерпывания); теперь условия (2) выполнены при $\nu = 1$. Пусть построение сделано для всех натуральных чисел до $\nu - 1$ включительно; мы выбираем в качестве f_ν барьер в точке ζ_ν для множества K_ν (оно уже построено на $(\nu-1)$-м шаге), находим точку $z^\nu \in D \setminus K_\nu$, $|z^\nu - \zeta^\nu| < \frac{1}{\nu}$, в которой $|f_\nu(z^\nu)| > 1$ (определение барьера), и берем $K_{\nu+1} = R_{p_{\nu+1}}$ так, чтобы $z^\nu \subset K_{\nu+1}$ (условие исчерпывания). Условия (2) выполняются, и возможность нашего построения доказана.

Наконец, учитывая, что $|f_\nu(z^\nu)| > 1$, мы подбираем последовательность натуральных чисел q_ν (начиная с $q_1 = 1$) так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\mu^2} |f_\mu(z^\mu)|^{q_\mu} \geqslant \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{1}{\nu^2} |f_\nu(z^\mu)|^{q_\nu} + \mu \qquad (\mu \geqslant 2), \tag{3}$$

---

[1]) Пусть точки множества $\mathscr{E}$ как-то занумерованы; для построения последовательности ζ^ν мы возьмем точки в таком порядке: 1; 1, 2; 1, 2, 3; ...

и рассматриваем ряд

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\{f_\nu(z)\}^{q_\nu}. \tag{4}$$

Для любого $z\in K_\mu$ мы имеем $|f_\nu(z)|\leqslant 1$ при $\nu\geqslant\mu$, следовательно, ряд (4) равномерно сходится на K_μ. Так как K_μ компактно исчерпывают D, то отсюда следует, что ряд (4) сходится всюду в D и что его сумма $f\in H(D)$ (см. теорему Вейерштрасса из п. 6). Наконец, для любого $\mu=1, 2, \ldots$ мы имеем

$$|f(z^\mu)|\geqslant\frac{1}{\mu^2}|f_\mu(z^\mu)|^{q_\mu}-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\frac{1}{\nu^2}|f_\nu(z^\mu)|^{q_\nu}-\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\geqslant\mu-\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2},$$

откуда видно, что $f(z^\mu)\to\infty$ ▶

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает достаточное условие для областей голоморфности:

Следствие. *Если на всюду плотном множестве точек границы D существует барьер, то D является областью голоморфности.*

Например, в каждой точке ζ границы шара $B=\{|z|<R\}\subset\mathbb{C}^n$ существует барьер, ибо существует функция

$$f(z)=\frac{1}{R^2-\sum\limits_{\nu=1}^{n}\zeta_\nu z_\nu}\in H(B),$$

неограниченная в точке ζ. Следовательно, шар является областью голоморфности. Этот пример обобщает

Теорема 3. *Всякая выпуклая область $D\subset\mathbb{C}^n$ является областью голоморфности.*

◀ В силу выпуклости D для любой точки $\zeta\in\partial D$ можно построить $(2n-1)$-мерную плоскость

$$\sum_{\nu=1}^{n}\{a_\nu(z_\nu-\zeta_\nu)+\bar a_\nu(\bar z_\nu-\bar\zeta_\nu)\}=0,$$

проходящую через ζ и такую, что D лежит с одной ее стороны. В этой плоскости мы возьмем $(2n-2)$-мерную [1]) аналитическую плоскость

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu(z_\nu-\zeta_\nu)=0,$$

[1]) Указана действительная размерность.

которая проходит через ζ и не содержит точек D. Но тогда функция $f(z)=\dfrac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (z_\nu-\zeta_\nu)}$ голоморфна в D и не ограничена в ζ, т. е. в ζ существует барьер. По следствию D является областью голоморфности ▶

Однако условие выпуклости не является необходимым для области голоморфности. Это видно, например, из следующей теоремы:

Теорема 4. *Если D_z является областью голоморфности в пространстве $\mathbb{C}^n(z)$, а D_w — аналогичной областью в пространстве $\mathbb{C}^m(w)$, то произведение $D_z \times D_w$ является областью голоморфности в пространстве $\mathbb{C}^{n+m}(z, w)$.*

◀ Возьмем функцию $f(z) \in H(D_z)$, не продолжаемую голоморфно в более широкую область, и такую же функцию $g(w) \in H(D_w)$. Тогда функция $f(z)\,g(w) \in H(D_z \times D_w)$ и не продолжается голоморфно в более широкую область, чем $D_z \times D_w$ ▶

Так как в $\mathbb{C}^1$ любая область является областью голоморфности, а поликруговые области — это произведения плоских областей, то мы имеем

Следствие. *Любая поликруговая область из $\mathbb{C}^n$ является областью голоморфности.*

В частности, произведение D двух плоских областей D_1 и D_2, из которых по крайней мере одна, скажем D_1, не выпукла, является областью голоморфности, хотя D и не выпукла.

В следующем пункте мы введем обобщенное понятие выпуклости, которое менее наглядно, чем обычное, но зато дает необходимое и достаточное условие для областей голоморфности.

21. Голоморфная выпуклость. Выпуклую оболочку множества $M \subset \mathbb{C}^n$ можно, очевидно, описать как совокупность $\hat{M}$ всех точек $z^0 \in \mathbb{C}^n$ таких, что для любой действительной линейной функции

$$\lambda(z)=\alpha_0+\sum_{\nu=1}^{2n}\alpha_\nu x_\nu \qquad (\alpha_\nu \in \mathbb{R}^1)$$

имеет место неравенство

$$|\lambda(z^0)| \leqslant \sup_{z\in M} |\lambda(z)|$$

(см. рис. 98, где при $n=1$ изображены линии уровня *линейных* функций).

Предоставляем читателю убедиться в том, что при описании выпуклой оболочки в $\mathbb{C}^n$ действительные линейные функции можно заменить комплексными:

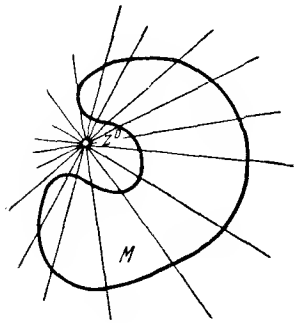


Рис. 98.

$$l(z) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z_\nu \qquad (a_\nu \in \mathbb{C}^1).$$

Иными словами, выпуклую оболочку множества M можно определить как множество

$$\hat{M} = \{z^0 \in \mathbb{C}^n: \ |l(z^0)| \leqslant \sup_{z \in M} |l(z)|\}, \quad (1)$$

где неравенство справедливо для всех линейных функций $l(z)$.

Мы хотим обобщить понятие выпуклой оболочки, распространив его на произвольное семейство F функций (действительных или комплексных), определенных в области $D \subset \mathbb{C}^n$.

Определение 1. *F-выпуклой* оболочкой множества $M \subset D$ называется совокупность точек

$$\hat{M}_F = \{z^0 \in D: \ |f(z^0)| \leqslant \sup_{z \in M} |f(z)|\}, \quad (2)$$

где неравенство справедливо для всех функций $f \in F$.

Определение 2. Область D называется *F-выпуклой*, если для любого множества K, компактно принадлежащего D, его F-выпуклая оболочка также компактно принадлежит D:

$$K \Subset D \Rightarrow \hat{K}_F \Subset D. \quad (3)$$

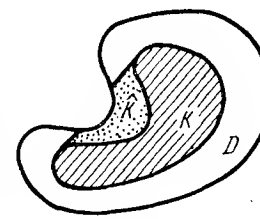


Рис. 99.

Форма, в которой принято определение 2, позволяет устанавливать F-выпуклость области, не выходя за ее пределы. Это существенно, когда F состоит из функций, определенных лишь в области D. Ясно, что в случае, когда F состоит из линейных функций, F-выпуклость совпадает с обычной (геометрической) выпуклостью (см. рис. 99, где показано, как невыпуклость области влечет за собой нарушение условия (3)).

В теории функций особо важную роль играет *голоморфная выпуклость*, когда $F = H(D)$, а также *полиномиальная выпуклость*, когда F представляет собой совокупность всех полиномов $P(z)$. Полиномиально выпуклую оболочку множества M

мы будем обозначать через $\widehat{M}_P$, а голоморфно выпуклую — через $\widehat{M}_H$. Рассматривается и понятие выпуклости, связанное с другими классами F, например совокупностью всех рациональных функций или всех мономов (т. е. кратных степеней $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$).

Очевидно, чем шире класс F, тем для большего множества функций требуется выполнение неравенства (2) и поэтому тем уже F-выпуклая оболочка множества и, следовательно, тем шире класс F-выпуклых областей. В частности, всегда $M \subset \subset \widehat{M}_H \subset \widehat{M}_P \subset \widehat{M}$ и все выпуклые области являются полиномиально выпуклыми, все полиномиально выпуклые — голоморфно выпуклыми.

Примеры.

1. Проиллюстрируем описанное включение в плоском случае. Любая область $D \subset \mathbb{C}^1$ является голоморфно выпуклой, а полиномиально выпуклыми будут лишь области со связным дополнением в $\overline{\mathbb{C}}^1$ (докажите!). Класс геометрически выпуклых областей уже класса полиномиально выпуклых. Образно говоря, переход к полиномиальной оболочке плоской области сводится к заклеиванию в ней «дыр», а к (геометрически) выпуклой оболочке — еще и к заклеиванию «выемок» вблизи границы.

2. Любой аналитический полиэдр

$$\Pi = \{z \in D: |W_\nu(z)| < 1, \ \nu = 1, \dots, N\}$$

(см. п. 18), где функции $W_\nu \in H(D)$, является выпуклым относительно класса $H = H(D)$. В самом деле, если $K \Subset \Pi$, то для любого $\nu = 1, \dots, N$ имеем $\|W_\nu\|_K \leqslant r < 1$. По определению H-выпуклой оболочки

$$\sup_{z \in \widehat{K}_H} |W_\nu(z)| \leqslant \sup_{z \in K} |W_\nu(z)| \leqslant r,$$

а отсюда следует, что и $\widehat{K}_H \Subset \Pi$.

Условие выпуклости относительно любого семейства функций $F \subset H(D)$ оказывается достаточным для того, чтобы D была областью голоморфности.

Теорема 1 (Картан и Туллен). *Если область $D \subset \mathbb{C}^n$ выпукла относительно какого-либо класса $F \subset H(D)$, то она является областью голоморфности*[1]).

◀ Доказывается вполне аналогично теореме о барьере из предыдущего пункта. Выбираем счетное всюду плотное на ∂D

[1]) Выбирая в качестве F совокупность линейных функций $l(z)$, получим теорему 3 предыдущего пункта.

множество точек $\mathscr{E}$ и последовательность граничных точек ζ^k так, чтобы каждая точка $\mathscr{E}$ встречалась в ней бесконечно часто. Далее, исходя из какого-либо компактного исчерпывания $R_1 \subset \subset R_2 \subset \ldots$ области D, строим последовательность множеств $K_\nu = R_{p_\nu}$, точек $z^\nu \in D$ и функций $f_\nu \in H(D)$ так, чтобы для любого $\nu = 1, 2, \ldots$ было: 1) $z^\nu \in \hat{K}_{\nu+1} \setminus \hat{K}_\nu$, $|z^\nu - \zeta^\nu| < \frac{1}{\nu}$, 2) $\|f_\nu\|_{K_\nu} \leqslant 1$, но $|f_\nu(z^\nu)| > 1$ (для простоты письма мы опускаем индекс F в обозначении F-выпуклой оболочки). Построение делаем по индукции. Для $\nu = 1$ берем $K_1 = R_1$ и, пользуясь F-выпуклостью, по которой $\hat{K}_1 \in D$, находим точку $z^1 \in D$ такую, что $z^1 \notin \hat{K}_1$ и $|z^1 - \zeta^1| < 1$; из определения оболочки следует существование функции $g_1 \in F$ такой, что $|g_1(z^1)| \geqslant \|g_1\|_{K_1}$, и мы полагаем $f_1(z) = \frac{g_1(z)}{\|g_1\|_{K_1}}$. Затем мы выбираем $K_2 = R_{p_2}$ так, чтобы z^1 принадлежала K_2, а значит, и подавно $\hat{K}_2$. Далее предполагаем, что построение сделано для всех натуральных чисел до $\nu - 1$ включительно. Тогда берем точку $z^\nu \in D \setminus \hat{K}_\nu$ так, чтобы было $|z^\nu - \zeta^\nu| < \frac{1}{\nu}$, находим функцию $g_\nu \in F$, для которой $|g_\nu(z^\nu)| > \|g_\nu\|_{K_\nu}$, полагаем $f_\nu(z) = \frac{|g_\nu(z)|}{\|g_\nu\|_{K_\nu}}$ и выбираем $K_{\nu+1} = R_{p_{\nu+1}}$ так, чтобы $z^\nu \in K_{\nu+1} \setminus \hat{K}_\nu$. Построение закончено.

Остается так же, как в теореме о барьере, выбрать натуральные числа q_ν так, чтобы при всех $\mu > 1$ выполнялись неравенства

$$\frac{1}{\mu^2} |f_\mu(z^\mu)|^{q_\mu} > \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{1}{\nu^2} |f_\nu(z^\mu)|^{q_\nu} + \mu,$$

и рассмотреть ряд

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \{f_\nu(z)\}^{q_\nu}.$$

Так как ряд сходится равномерно на любом $K \Subset D$, то $f \in H(D)$, а так как $f(z^\nu) \to \infty$, то D является областью голоморфности этой функции ▶

Самое сильное утверждение мы получим, если выберем в этой теореме $F = H(D)$:

Следствие. *Всякая голоморфно выпуклая область является областью голоморфности.*

Ясно, что для получения необходимых условий для области голоморфности на класс F надо наложить дополнительные

условия (например, если F — совокупность всех линейных функций, то F-выпуклость сводится к обычной выпуклости, а она, как мы видели, не является необходимой). Мы предположим, что класс F является устойчивым по отношению к дифференцированию, короче, *d-устойчивым*, т. е. вместе с любой функцией f содержит и любую производную $\dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}$.

Для оболочки относительно таких классов справедлива следующая важная теорема об одновременном продолжении:

Теорема 2 (Картан и Туллен). *Пусть $K \Subset D$ и $r = \rho(K, \partial D)$ — расстояние в ρ-метрике от K до границы D. Какова бы ни была точка z^0, принадлежащая выпуклой оболочке множества K относительно d-устойчивого класса F, любая функция $f \in F$ голоморфно продолжается в поликруг $U(z^0, r)$.*

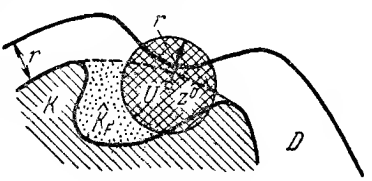


Рис. 100.

Существенно, что $U(z^0, r)$ может выходить за пределы области D (см. схематический рис. 100); радиус этого поликруга не зависит от индивидуальной функции $f \in F$ и определяется лишь расстоянием множества K до ∂D.

◀ Так как $z^0 \in D$, то любая функция $f \in F$ в окрестности z^0 представляется рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{4}$$

где $c_k = \dfrac{1}{k!} \dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}\Big|_{z^0}$. Но так как $z^0 \in \widehat{K}_F$ и класс d-устойчив, то

$$\left| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} \right|_{z^0} \leqslant \left\| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} \right\|_K, \tag{5}$$

т. е. оценка производных в точке z^0 сводится к их оценке на K.

Выберем число $r_1 < r$ и обозначим через $\overline{K^{(r_1)}}$ замыкание r_1-раздутия множества K (т. е. объединения всех поликругов $U(z, r_1)$, $z \in K$). Так как $\overline{K^{(r_1)}} \subset D$, то f ограничена на нем, мы обозначим

$$M_f(r_1) = \|f\|_{\overline{K^{(r_1)}}}. \tag{6}$$

Если $z \in K$, то $U(z, r_1) \subset K^{(r_1)}$, и для оценки производных в правой части (5) мы можем воспользоваться неравенствами Коши (п. 7):

$$|c_k| \leqslant \frac{1}{k!} \left\| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} \right\|_K \leqslant \frac{M_f(r_1)}{r_1^{|k|}}.$$

Теперь выберем любое $r_2 < r_1$; для произвольной точки $z \in U(z^0, r_2)$ имеем

$$|c_k (z - z^0)^k| \leqslant M_f(r_1) \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{|k|}, \tag{7}$$

откуда видно, что ряд (4) сходится в поликруге $U(z^0, r_2)$. Так как числа r_1 и r_2 можно выбрать сколь угодно близкими к r, то (4) сходится всюду в $U(z^0, r)$. Этот ряд и дает нужное голоморфное продолжение функции f ▶

Доказанная теорема сразу приводит к необходимости F-выпуклости для областей голоморфности в следующей форме:

Теорема 3 (Бенке—Штейн). *Если $D \subset \mathbb{C}^n$ является областью голоморфности некоторой функции f из d-устойчивого класса F, то она F-выпукла.*

◀ Возьмем произвольное множество $K \Subset D$ и обозначим $r = \rho(K, \partial D)$. По теореме 2 функция f продолжается в r-раздутие множества $\widehat{K}_F$, а так как f по условию не продолжаема за пределы D, то это раздутие принадлежит D и, значит, $\widehat{K}_F \Subset D$ ▶

В частности, выбирая $F = H(D)$ (этот класс, очевидно, d-устойчив), получим, что любая область голоморфности является голоморфно выпуклой. Объединив этот факт с отмеченным выше следствием теоремы 1, получим окончательный результат:

Теорема 4. *Условие голоморфной выпуклости области необходимо и достаточно для того, чтобы она была областью голоморфности.*

К сожалению, это условие не является столь наглядным и эффективно проверяемым, как условие геометрической выпуклости. В следующем параграфе мы дадим другую его трактовку, основанную на теории субгармонических функций. Эта трактовка, пожалуй, более геометрична и, кроме того, она приведет к некоторым эффективным критериям для областей голоморфности.

Сейчас мы приведем еще одну формулировку условия F-выпуклости, наложив на рассматриваемые классы дополнительное ограничение. Именно, мы будем считать, что класс F устойчив по отношению к возведению в степень, короче, p-устойчив, т. е.

вместе с каждой функцией f содержит и любую ее натуральную степень f^m.

Для таких классов теорему об одновременном продолжении можно несколько усилить:

Теорема 5 (Картан и Туллен). *Пусть $K \Subset D$, $r = \rho(K, \partial D)$, а F — произвольный класс, одновременно p- и d-устойчивый. Тогда для любой функции $f \in F$ и любой точки $z^0 \in \hat{K}_F$*

$$\|f\|_{U(z^0, r_1)} \leqslant \|f\|_{K^{(r_1)}}, \tag{8}$$

где $r_1 < r$ — произвольное число и $K^{(r_1)}$ — раздутие множества K.

◀ Пусть $r_2 < r_1$ и точка $z \in U(z^0, r_2)$; тогда ряд Тейлора (4) функции f с центром в точке z^0 сходится в точке z и для каждого его члена справедлива оценка (7):

$$|c_k (z - z^0)^k| \leqslant M_f(r_1) \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{|k|}.$$

Суммируя эти неравенства, найдем

$$|f(z)| \leqslant M_f(r_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} N_{n,\nu} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\nu},$$

где через $N_{n,\nu}$ обозначено число членов ряда Тейлора функции n переменных с данной $|k| = \nu$. Но сумма в правой части, очевидно, равна $\dfrac{1}{\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)^n}$, и, следовательно,

$$|f(z)| \leqslant M_f(r_1) \left(\frac{r_1}{r_1 - r_2}\right)^n. \tag{9}$$

Применяя это неравенство к функциям f^m $(m = 1, 2, \ldots)$, принадлежащим классу F в силу его p-устойчивости, получим

$$|f(z)|^m \leqslant \{M_f(r_1)\}^m \left(\frac{r_1}{r_1 - r_2}\right)^n.$$

Теперь извлечем корень m-й степени и устремим $m \to \infty$; будем иметь $|f(z)| \leqslant M_f(r_1)$. Но здесь z можно считать произвольной точкой из $U(z^0, r_1)$, а $M_f(r_1)$ согласно (6) совпадает с правой частью (8) ▶

Следствие. *В условиях и обозначениях предыдущей теоремы*

$$(\hat{K}_F)^{(r_1)} \cap D \subset \widehat{(K^{(r_1)})}_F. \tag{10}$$

◀ Любая точка z^1, принадлежащая левой части (10), принадлежит и поликругу $U(z^0, r_1)$ с центром $z^0 \in \widehat{K}_F$, поэтому согласно (8) для любой $f \in F$ имеем $|f(z^1)| \leqslant \|f\|_{K^{(r_1)}}$; это и означает, что z^1 принадлежит F-выпуклой оболочке множества $K^{(r_1)}$ ▶

Критерий F-выпуклости в сделанных предположениях о классе можно сформулировать так:

Теорема 6. *Для того чтобы область $D \subset \mathbb{C}^n$ была выпуклой относительно некоторого класса F, одновременно p- и d-устойчивого, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества $K \Subset D$*

$$\rho(\widehat{K}_F, \partial D) = \rho(K, \partial D). \tag{11}$$

◀ Достаточность условия (11) очевидна. Для доказательства необходимости обозначим левую часть (11) через $\hat{r}$, а правую через r. Очевидно, $\hat{r} \leqslant r$; если бы было $\hat{r} < r$, то мы имели бы $K^{(\hat{r})} \Subset D$. В силу замкнутости множества $\widehat{K}_F$ оно содержит точку z^0, для которой $\rho(z^0, \partial D) = \hat{r}$. Поэтому поликруг $U(z^0, \hat{r})$ касается границы ∂D и не может компактно принадлежать D. Но $U(z^0, \hat{r})$ согласно теореме 5 содержится в $\widehat{(K^{(\hat{r})})}_F$. Таким образом, оболочка $K^{(\hat{r})}$ некомпактна в D, а это противоречит F-выпуклости области ▶

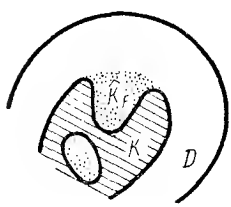


Рис. 101.

Мы получили новую характеристику областей, выпуклых относительно одновременно p- и d-устойчивых классов (в частности, голоморфно выпуклых). Это такие области, в которых переход от компактных подмножеств к их F-выпуклым оболочкам происходит без уменьшения расстояний до границы. Образно говоря, такой переход состоит в заклеивании «дырок» и «впадин», имеющихся в подмножествах (рис. 101).

22. Свойства областей голоморфности. Области голоморфности в $\mathbb{C}^n$ — это голоморфно выпуклые области. Мы приведем несколько их свойств, обобщающих известные свойства выпуклых областей.

Теорема 1. *Пусть D_α, $\alpha \in A$, — произвольное семейство областей голоморфности в $\mathbb{C}^n$ и $G = \bigcap_{\alpha \in A} D_\alpha$ — их пересечение. Каждая связная компонента D открытого ядра $\mathring{G}$ является областью голоморфности.*

◀ Пусть $K \Subset D$; так как каждая функция из $H(D_\alpha)$ голоморфна и в D, то $H(D) \supset H(D_\alpha)$ и, следовательно, $\widehat{K}_{H(D)} \subset \widehat{K}_{H(D_\alpha)}$

для всех $\alpha \in A$. Поэтому $\rho(\widehat{K}_{H(D)}, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(\widehat{K}_{H(D_\alpha)}, \partial D_\alpha)$, и, значит, в силу голоморфной выпуклости D_α, для всех $\alpha \in A$ имеем $\rho(\widehat{K}_{H(D)}, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(K, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(K, \partial D)$. Если бы D не была областью голоморфности, то для некоторого K было бы $\rho(\widehat{K}_{H(D)}, \partial D) < \rho(K, \partial D)$, и тогда нашлась бы D_α, для которой $\rho(\widehat{K}_{H(D)}, \partial D_\alpha) < \rho(K, \partial D)$, вопреки доказанному ▶

В отличие от пересечения, объединение областей голоморфности не обязано быть такой же областью (ср. соответствующие свойства выпуклых областей). Это видно из простого примера: $\{|z_1|<1, |z_2|<2\}$ и $\{|z_1|<2, |z_2|<1\}$ являются областями голоморфности в $\mathbb{C}^2$, а их объединение, диаграмма которого изображена на рис. 102, — нет (это доказано в п. 7).

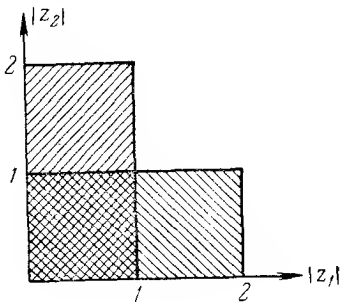


Рис. 102.

Однако, справедлива

Теорема 2 (Бенке — Штейн). *Объединение возрастающей последовательности областей голоморфности D_ν:*

$$D = \bigcup_\nu D_\nu, \qquad D_\nu \Subset D_{\nu+1} \tag{1}$$

также является областью голоморфности, если D ограничена.

◀ Доказательство этой теоремы не так просто, и мы разобьем его на несколько этапов.

1. Прежде всего покажем, что D можно представить как объединение возрастающей последовательности аналитических полиэдров (см. п. 18). Для этого выберем последовательность натуральных чисел p_ν так, чтобы области $G_\nu = D_{p_\nu}$ для всех $\nu = 1, 2, \ldots$ удовлетворяли условию

$$\sup_{z \in \partial G_\nu} \rho(z, \partial G_{\nu+1}) < \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}). \tag{2}$$

Возможность такого выбора докажем по индукции. Положим $G_1 = D_1$ и выберем p_2 столь большим, чтобы для $G_2 = D_{p_2}$ было $\sup_{z \in \partial G_2} \rho(z, \partial D) < \rho(G_1, \partial D)$; после этого выбираем p_3 так, чтобы граница области $G_3 = D_{p_3}$ была столь близкой к ∂D, что в последнем неравенстве ∂D можно заменить на ∂G_3: $\sup_{z \in \partial G_2} \rho(z, \partial G_3) < \rho(G_1, \partial G_3)$. Пусть выбор сделан для всех натуральных чисел, меньших ν; выберем p_ν так, чтобы для $G_\nu = D_{p_\nu}$ было

$$\sup_{z \in \partial G_\nu} \rho(z, \partial D) < \rho(G_{\nu-1}, \partial D), \tag{3}$$

а затем выберем $p_{\nu+1}$ так, чтобы $D_{p_{\nu+1}} = G_{\nu+1}$ была столь близкой к ∂D, что в последнем неравенстве ∂D можно заменить $\partial G_{\nu+1}$, — мы получаем (2).

Так как $G_{\nu-1} \Subset G_{\nu+1}$ и $G_{\nu+1}$ (как область голоморфности) выпукла относительно класса $H(G_{\nu+1})$, то по теореме 6 предыдущего пункта для оболочки $G^*_{\nu-1} = (\widehat{G_{\nu-1}})_{H(G_{\nu+1})}$ имеем

$$\rho(G^*_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}) = \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}). \tag{4}$$

Но из (2) следует, что для любой точки $z^0 \in \partial G_\nu$

$$\rho(z^0, \partial G_{\nu+1}) < \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}),$$

т. е. ∂G_ν не пересекается с $G^*_{\nu-1}$. Поэтому для любой точки $z^0 \in \partial G_\nu$ найдется функция $f_{z^0} \in H(G_{\nu+1})$ такая, что $|f_{z^0}(z)| < 1$ в $G_{\nu-1}$ и $|f_{z^0}(z)| > 1$ в некотором поликруге $U(z^0, r)$. В силу компактности множества ∂G_ν мы можем из покрытия его такими поликругами выбрать конечное покрытие $U^\mu_\nu = U(z^{\mu,\nu}, r^{(\mu,\nu)})$, $\mu = 1, \ldots, N_\nu$, и построить аналитический полиэдр

$$\Pi_\nu = \{z \in G_{\nu+1}: |f_{\mu,\nu}(z)| < 1, \ \mu = 1, \ldots, N_\nu\}, \tag{5}$$

где $f_{\mu,\nu} = f_{z^{\mu,\nu}}$ — найденные выше функции из класса $H(G_{\nu+1})$.

По нашему построению $G_{\nu-1} \Subset \Pi_\nu \Subset G_\nu$ для любого натурального ν. Поэтому область D представляется как объединение возрастающей последовательности полиэдров Вейля:

$$D = \bigcup_\nu \Pi_\nu, \ \Pi_\nu \Subset \Pi_{\nu+1}, \tag{6}$$

причем полиэдр Π_ν определяется функциями $f_{\mu,\nu} \subset H(\Pi_{\nu+1})$. Заметим, что, начиная с некоторого ν, все полиэдры Π_ν можно считать связными.

II. Покажем теперь, что класс $H(D)$ плотен в каждом классе $H(\Pi_\nu)$, т. е. что любую функцию $f_0 \in H(\Pi_\nu)$ можно на любом компактном подмножестве Π_ν сколь угодно точно приблизить функциями из $H(D)$. В самом деле, пусть заданы $K \Subset \Pi_\nu$ и $\varepsilon > 0$. По следствию 1 теоремы 2 п. 18 существует функция $f_1 \in H(\Pi_{\nu+1})$ такая, что $\|f_0 - f_1\|_K < \frac{\varepsilon}{2}$. По тому же следствию существует $f_2 \in H(\Pi_{\nu+2})$ такая, что $\|f_2 - f_1\|_{\Pi_\nu} < \frac{\varepsilon}{2^2}$, и вообще для любого $\mu = 1, 2, \ldots$ существует функция $f_\mu \in H(\Pi_{\nu+\mu})$ такая, что

$$\|f_\mu - f_{\mu-1}\|_{\Pi_{\nu+\mu-2}} < \frac{\varepsilon}{2^\mu}.$$

Последовательность функций f_μ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве области D, ибо на каждом таком подмножестве для всех достаточно больших μ и всех $p>0$

$$|f_{\mu+p}-f_\mu|\leqslant\sum_{k=1}^{p}|f_{\mu+k}-f_{\mu+k-1}|<\varepsilon\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{\mu+k}}<\frac{\varepsilon}{2^\mu}.$$

Обозначим $f(z)=\lim\limits_{\mu\to\infty}f_\mu(z)$; по теореме Вейерштрасса $f\in H(D)$, и так как $f=f_0+(f_1-f_0)+(f_2-f_1)+\ldots$, то

$$\|f-f_0\|_K\leqslant\sum_{\mu=1}^{\infty}\|f_\mu-f_{\mu-1}\|_K<\varepsilon\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\mu}=\varepsilon. \tag{7}$$

III. По построению полиэдры Π_ν определяются функциями из классов $H(\Pi_{\nu+1})$, и поэтому они выпуклы относительно этих классов (см. пример 2 на стр. 367). Мы покажем, что они выпуклы и относительно класса $H(D)$. Это на основании II следует из такого факта: если область G является F-выпуклой и класс F' плотен в F, то G является и F'-выпуклой.

В самом деле, пусть $K\Subset G$; в силу F-выпуклости области G для любой точки $z^0\in G\setminus\hat{K}_F$ существует функция $f\in F$ такая, что $\|f\|_K<|f(z^0)|$. Но тогда найдется $\delta>0$ такое, что и

$$\|f\|_K+\delta<|f(z^0)|. \tag{8}$$

Так как класс F' плотен в F, то существует функция $f_1\in F'$ такая, что

$$\|f-f_1\|_{K\cup\{z^0\}}<\frac{\delta}{2}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (8), мы получим, что

$$|f_1(z^0)|>|f(z^0)|-\frac{\delta}{2}>\|f\|_K+\frac{\delta}{2}>\|f_1\|_K.$$

Это означает, что $z^0\notin\hat{K}_{F'}$; таким образом, $G\setminus\hat{K}_F\subset G\setminus\hat{K}_{F'}$, т. е. $\hat{K}_{F'}\Subset G$ и область G является F'-выпуклой.

IV. Теперь уже нетрудно доказать, что область D выпукла относительно класса $H(D)=H$ и, следовательно, является областью голоморфности. Пусть это не так; тогда найдется множество $K\Subset D$, $\rho(K,\partial D)=2r_0>0$ и последовательность точек $z^\mu\in D$, сходящаяся к точке $\zeta\in\partial D$, таких, что для всех $f\in H$

$$|f(z^\mu)|\leqslant\|f\|_K\qquad(\mu=1,\ 2,\ \ldots).$$

Рассмотрим r_0-раздутие $K^{(r_0)}$ множества K; имеем $K^{(r_0)} \Subset D$ и по уточненной теореме об одновременном продолжении (теорема 5 предыдущего пункта) для любой $f \in H$

$$\|f\|_{U(z^\mu, r_0)} \leqslant \|f\|_{K^{(r_0)}}. \tag{9}$$

Но $K^{(r_0)} \Subset \Pi_\mu$ для всех μ, начиная с некоторого μ_0, и, в силу выпуклости Π_μ относительно класса H, для любой точки $z^0 \in \partial\Pi_\mu \setminus K^{(r_0)}$ найдется функция $f_0 \in H$ такая, что $|f_0(z^0)| > \|f_0\|_{K^{(r_0)}}$.

Так как $\lim\limits_{\mu\to\infty} \Pi_\mu = D$, то для достаточно больших μ пересечение $\partial\Pi_\mu \cap U(\zeta, r_0)$ непусто и $z^0 \in U(\zeta, r_0)$, а значит, и $U(z^\mu, r_0)$. Поэтому последнее неравенство противоречит (9) ▶

Для формулировки последней теоремы этого пункта введем важное

Определение. Отображение $\varphi\colon D \to D^*$ называется *биголоморфным* отображением области $D \subset \mathbb{C}^n$, если оно взаимно однозначно и все компоненты φ_ν этого отображения ($\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$) голоморфны в D, а все компоненты ψ_ν обратного отображения $\varphi^{-1} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ голоморфны [1]) в D^*.

Биголоморфные отображения мы будем называть также *голоморфными изоморфизмами* или, короче, *голоморфизмами*. Они являются обобщением на пространственный случай конформных отображений.

Теорема 3. *Свойство области быть областью голоморфности инвариантно относительно голоморфизмов. Иными словами, если $D \subset \mathbb{C}^n$ — область голоморфности и D^* — ее образ при биголоморфном отображении φ, то D^* также является областью голоморфности.*

◀ Пусть $K^* \Subset D^*$, тогда в силу гомеоморфности φ и множество $K = \varphi^{-1}(K^*) \Subset D$, а так как D — область голоморфности, то $\hat{K}_{H(D)} \Subset D$.

Легко видеть, что

$$\varphi(\hat{K}_{H(D)}) \supset \hat{K}^*_{H(D^*)}. \tag{10}$$

В самом деле, если некоторая точка $w^0 \in D^* \setminus \varphi(\hat{K}_{H(D)})$, то $z^0 = \varphi^{-1}(w^0) \in D \setminus \hat{K}$ и найдется функция $f \in H(D)$ такая, что

[1]) Мы увидим в дальнейшем (см. п. 44), что эти условия не являются независимыми: из взаимной однозначности и голоморфности φ голоморфность φ^{-1} вытекает.

$|f(z^0)|>\|f\|_K$; обозначим $g(w)=f\circ\varphi^{-1}(w)$; очевидно, $g\in H(D^*)$ и $|g(w^0)|>\|g\|_{K^*}$, а это означает, что $w^0\in D^*\setminus\hat{K}^*_{H(D^*)}$.

Из $\hat{K}_{H(D)}\Subset D$ заключаем, что $\varphi(\hat{K}_{H(D)})\Subset D^*$, и по (10) $\hat{K}^*_{H(D^*)}\Subset D^*$. Таким образом, D^* голоморфно выпукла и, следовательно, является областью голоморфности ▶

§ 8. Псевдовыпуклость

Здесь мы познакомимся с другой трактовкой понятия голоморфной выпуклости, которая имеет два существенных достоинства: во-первых, это понятие можно сформулировать локально (и в таком виде оно легче проверяется), и, во-вторых, оно естественно выражается, формулируется в геометрических терминах.

23. Принцип непрерывности. Начнем еще с одной теоремы о принудительном аналитическом продолжении. Для ее формулировки условимся о некоторых терминах.

Определение. Будем называть комплексно r-мерной *аналитической поверхностью* в области $\Delta\subset\mathbb{C}^r(\zeta)$ ее образ S при взаимно однозначном голоморфном отображении φ: $\Delta\to\mathbb{C}^n$ $(n>r)$, определяемом функциями

$$z_\nu=\varphi_\nu(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_r),\qquad \nu=1,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

если ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\zeta_\mu}\right)$ всюду в Δ равен r.

Комплексно одномерные аналитические поверхности называют также *аналитическими кривыми* (если, в частности, все φ_ν линейны: $\varphi=a+\omega\zeta$, то мы получаем аналитическую прямую, см. гл. I).

Аналитическая поверхность является, очевидно, связным комплексно аналитическим многообразием. Для функций, голоморфных на аналитических поверхностях, конечно, справедливы теорема единственности и принцип максимума, доказанные в п. 9.

Будем называть (комплексно) m-мерную аналитическую поверхность $S\subset\mathbb{C}^n$ *компактной*, если она является компактным подмножеством другой m-мерной аналитической поверхности S'. Для компактных аналитических поверхностей S принцип максимума модуля можно, очевидно, сформулировать так: для любой функции f, голоморфной на S и непрерывной на замыкании $\bar{S}$,

$$\|f\|_S=\|f\|_{\partial S}{}^{1}).$$

---

[1]) Напомним, что $\|f\|_S=\sup\limits_{z\in S}|f(z)|$.

Далее, назовем последовательность множеств M_ν *сходящейся* к множеству M (обозначение: $M_\nu \to M$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер ν_0 такой, что при всех $\nu \geqslant \nu_0$

$$M_\nu \subset M^{(\varepsilon)} \quad \text{и} \quad M \subset M_\nu^{(\varepsilon)}, \tag{2}$$

где через $M^{(\varepsilon)}$ и $M_\nu^{(\varepsilon)}$ обозначены ε-раздутия соответствующих множеств (т. е. объединения всех поликругов $U(z, \varepsilon)$ с центрами в точках множеств).

Теорема (Бенке—Зоммер). *Пусть S_ν — последовательность компактных n-мерных аналитических поверхностей, принадлежащих вместе с границами ∂S_ν области $D \subset \mathbb{C}^n$. Если S_ν сходится к некоторому множеству S, а ∂S_ν — к множеству Γ и $\Gamma \Subset D$* (рис. 103), *то любая функция $f \in H(D)$ голоморфно продолжается в некоторую окрестность множества S.*

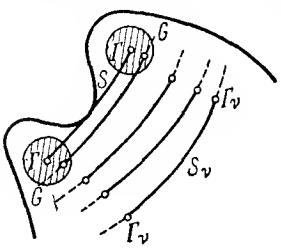


Рис. 103.

◀ Так как $\Gamma \Subset D$, то существует область $G \Subset D$ такая, что $\Gamma \Subset G$; обозначим $\rho(G, \partial D) = r$. В силу сходимости $\partial S_\nu \to \Gamma$ найдется такое ν_0, что при $\nu \geqslant \nu_0$

$$\partial S_\nu \subset G. \tag{3}$$

Для любой $f \in H(D)$ и любой точки $z \in S_\nu$ по принципу максимума модуля имеем

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{\partial S_\nu},$$

а отсюда в силу (3) при $\nu \geqslant \nu_0$ получаем

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_G.$$

Но это означает, что z, а следовательно и вся поверхность S_ν при $\nu \geqslant \nu_0$, принадлежит выпуклой оболочке $\hat{G}_{H(D)}$. По теореме об одновременном продолжении (п. 21) отсюда следует, что любая функция $f \in H(D)$ голоморфно продолжается в r-раздутие $S_\nu^{(r)}$ всех поверхностей S_ν с номерами $\nu \geqslant \nu_0$.

Наконец, в силу сходимости $S_\nu \to S$ найдется такое $\nu_1 \geqslant \nu_0$, что $S \subset S_\nu^{\left(\frac{r}{2}\right)}$ при всех $\nu \geqslant \nu_1$, и, следовательно, любая $f \in H(D)$ голоморфно продолжается в $\frac{r}{2}$-раздутие множества S ▶

Замечание. Как видно из доказательства, в теореме Бенке—Зоммера класс $H(D)$ можно заменить классом функ-

ций, голоморфных лишь в пересечении D с некоторой окрестностью предельного множества $S \cup \Gamma$.

Теорему Бенке — Зоммера называют *принципом непрерывности*[1]). Описательно говоря, она состоит в том, что свойство функций быть голоморфной в окрестности аналитических поверхностей S_ν сохраняется и для предельного множества S этих поверхностей.

В качестве примера применения принципа непрерывности приведем доказательство одной леммы, которая понадобится нам в следующем параграфе при изучении продолжения функций, голоморфных в трубчатых областях.

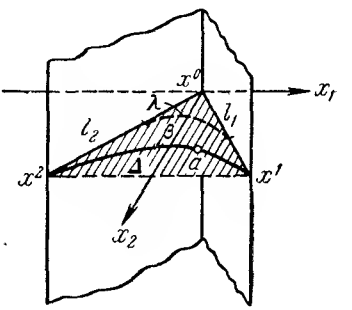


Рис. 104.

Лемма. *Пусть* x^0, x^1, x^2 — *три точки пространства* $\mathbb{R}^n(x)$, *не лежащие на одной прямой,* $l_1 = [x^0, x^1]$ *и* $l_2 = [x^0, x^2]$ — *замкнутые отрезки, а* $\Delta = x^0x^1x^2$ — *замкнутый треугольник. Если функция* f *голоморфна в окрестности множества* $(l_1 \cup l_2) \times \mathbb{R}^n(y)$, *то она голоморфно продолжается в окрестность множества* $\Delta \times \mathbb{R}^n(y)$.

Иными словами, всякая функция f, голоморфная в окрестности объединения двух граней трехгранной призмы (рис. 104), непременно продолжается голоморфно в окрестность всей призмы.

◀ Без ограничения общности можно считать, что $x^0 = (0, 0, \ldots, 0)$, $x^1 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$, $x^2 = (-1, 1, 0, \ldots, 0)$, ибо этого можно достичь линейным преобразованием пространства $\mathbb{C}^n(z)$ с действительными коэффициентами[2]). Достаточно доказать, что f голоморфно продолжается в любую точку a множества $M = \Delta \times \mathbb{R}^n(y)$. Можно считать, что a лежит в пересечении M с действительным подпространством $\{y = 0\}$, т. е. в треугольнике Δ (этого можно достичь сдвигом на вектор с чисто мнимыми координатами).

Итак, нужно доказать, что f продолжается голоморфно в любую точку $a = (a_1, a_2, 0, \ldots, 0)$, где a_1, a_2 — действительные числа, удовлетворяющие условию $|a_1| < a_2 \leqslant 1$ (при нашем

---

[1]) Частный случай теоремы Бенке — Зоммера, когда S_ν являются замкнутыми подмножествами аналитических прямых $'z = {}'a_\nu$ и S — таким же подмножеством прямой $'z = {}'a = \lim\limits_{\nu \to \infty} {}'a_\nu$, был доказан еще Хартогсом и называется теоремой Хартогса о непрерывности.

[2]) Такое преобразование переводит $\mathbb{R}^n(x)$ в себя и не нарушает ни условий, ни утверждения леммы.

расположении осей это условие того, что $a \in \Delta \setminus (l_1 \cup l_2)$; при $a \in l_1 \cup l_2$ голоморфность f уже предположена). Для доказательства проведем через точки x^1, a и x^2 параболу

$$x_2 = \alpha x_1^2 + \beta \tag{4}$$

(для этого надо взять $\alpha = \dfrac{1-a_2}{1-a_1^2}$ и $\beta = 1-\alpha$; при $a_2 = 1$ парабола выродится в прямую $x_2 = 1$) и для любого λ, $0 < \lambda \leqslant \beta$, рассмотрим аналитическую кривую

$$S_\lambda = \{z \in M:\ z_2 = \alpha z_1^2 + \lambda,\ z_3 = \ldots = z_n = 0\}. \tag{5}$$

Переменное z_1 мы рассматриваем как параметр на S_λ. Чтобы доказать компактность S_λ, достаточно показать, что при $z \in S_\lambda$ значения z_1 меняются в ограниченной области плоскости z_1. Но проекция S_λ на плоскость z_1 определяется условием $(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, 0, \ldots, 0) \in \Delta$, которое записывается в виде

$$|x_1| < \alpha(x_1^2 - y_1^2) + \lambda \leqslant 1 \tag{6}$$

и выделяет ограниченную область, заключенную между гиперболами

$$\left(x_1 \pm \frac{1}{2\alpha}\right)^2 - y_1^2 = \frac{1}{4\alpha^2} - \frac{\lambda}{\alpha}$$

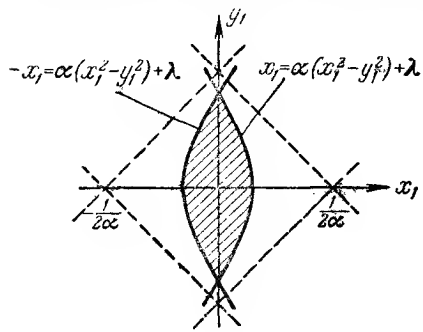


Рис. 105.

(заштрихована на рис. 105). Заметим еще, что аналитические кривые S_λ при $0 < \lambda \leqslant \beta$ пересекают $\mathbb{R}^n(x)$ по принадлежащему Δ отрезку параболы

$$x_2 = \alpha x_1^2 + \lambda, \tag{7}$$

параллельной параболе (4) (изображена пунктиром на рис. 104).

Обозначим

$\mathscr{E} = \{\lambda \in (0, \beta]$: f голоморфно продолжается в окрестность $S_\lambda\}$; это, очевидно, открытое множество. Оно непусто, ибо при достаточно малых $\lambda > 0$ область (6) изменения z_1, как видно из рис. 105, лежит в сколь угодно малой окрестности точки $z_1 = 0$ и, следовательно, S_λ — в сколь угодно малой окрестности точки $z = 0$, где f по условию голоморфна. Но множество $\mathscr{E}$ в то же время и замкнуто. В самом деле, если $\lambda_0 \in (0, \beta]$ — предельная точка $\mathscr{E}$, то существует последовательность $S_{\lambda_n} \to S_{\lambda_0}$, $\lambda_n \in \mathscr{E}$;

при этом $\partial S_{\lambda_n} \to \partial S_{\lambda_0}$ и f голоморфна в окрестности всех S_{λ_n} и ∂S_{λ_0} (заметим, что ∂S_λ при любом $\lambda \in (0, \beta]$ принадлежит множеству $(l_1 \cup l_2) \times \mathbb{R}^n(y)$, где f голоморфна по условию). Мы можем, следовательно, применить принцип непрерывности (см. замечание после его доказательства) и заключить, что $\lambda_0 \in \mathscr{E}$. Таким образом, $\mathscr{E} \equiv (0, \beta]$, и, значит, f голоморфно продолжается в окрестность S_β, но S_β содержит точку a ▶

24. Выпуклость в смысле Леви. Принцип непрерывности гарантирует возможность голоморфного продолжения функции из области D в окрестность множества S, которое можно приблизить поверхностями $S_\nu \subset D$. Так как S можно считать расположенным в окрестности какой-либо граничной точки D, то этот принцип имеет локальный характер.

Естественно ввести на область условие локальной непродолжаемости некоторых голоморфных функций как условие несуществования последовательности поверхностей, к которым был бы применим принцип непрерывности. Сформулируем это в следующем виде:

Определение. Область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется *выпуклой в смысле Леви* (короче, *L-выпуклой*) *в граничной точке* ζ, если, какова бы ни была поверхность S, содержащая ζ и такая, что $\partial S \subset D$, то для любой последовательности компактных аналитических поверхностей S_ν:

$$S_\nu \to S, \quad \partial S_\nu \to \partial S, \tag{1}$$

найдется номер ν_0, начиная с которого все S_ν содержат точки, не принадлежащие D. Область D называется *L-выпуклой*, если она L-выпукла в каждой своей граничной точке.

Из принципа непрерывности непосредственно вытекает

Теорема 1. *Каждая область голоморфности является L-выпуклой.*

◀ Если D не является L-выпуклой в какой-либо точке $\zeta \in \partial D$, то найдется поверхность S такая, что $\zeta \in S$, $\partial S \subset D$, и последовательность компактных аналитических поверхностей $S_\nu \subset D$, $S_\nu \to S$, $\partial S_\nu \to \partial S$; тогда любая $f \in H(D)$ голоморфно продолжается в точку ζ, и D не может быть областью голоморфности ▶

Этот результат можно сформулировать и локально. Назовем область D *не расширяемой голоморфно* в граничной точке ζ, если существует окрестность U_ζ этой точки и функция f, голоморфная на открытом множестве $U_\zeta \cap D$ и не продолжаемая голоморфно в точку ζ.

Теорема 1, очевидно, допускает такой локальный вариант:

Теорема 1′. *Если область D не расширяема голоморфно в точке* $\zeta \in \partial D$, *то она является L-выпуклой в этой точке.*

Ясно, что любая область голоморфности не расширяема голоморфно ни в одной точке ∂D. Еще в 1911 г. Э. Леви поставил обратную задачу:

Проблема Леви. *Является ли область D, не расширяемая голоморфно ни в одной точке границы, областью голоморфности?*

Главная трудность в этой проблеме состоит в переходе от локального свойства к глобальному. Если D не расширяема голоморфно в точке $\zeta \in \partial D$, то существует локальный барьер — функция $f_\zeta(z)$, голоморфная в $U_\zeta \cap D$ и не продолжаемая голоморфно в точку ζ. Но как из таких локальных барьеров построить глобальный барьер, т. е. функцию, голоморфную во всей области D и не продолжаемую в ζ? Эта трудность была преодолена лишь в 1954 г. К. Ока, который доказал, что проблема Леви решается положительно для любой области $D \subset \mathbb{C}^n$.

При помощи теоремы Ока в п. 39 будет доказано, что условие L-выпуклости области D является и достаточным для голоморфной нерасширяемости, так что эти условия эквивалентны.

Выпуклость в смысле Леви, в отличие от голоморфной выпуклости, является локальным свойством границы области, и поэтому естественно ожидать, что она легче проверяется. Мы приведем здесь несколько критериев. Начнем с простого достаточного условия.

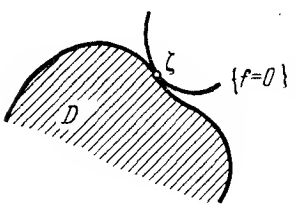


Рис. 106.

Теорема 2. *Если области D в некоторой граничной точке ζ можно коснуться извне аналитическим множеством $S = \{z \in \mathbb{C}^n\colon f(z) = 0\}$, где f — функция, голоморфная в точке ζ, то D является L-выпуклой в точке ζ* (рис. 106).

◀ Условие теоремы означает, что существует функция f, голоморфная в окрестности U_ζ точки ζ, равная нулю в этой точке и отличная от нуля в $U_\zeta \cap D$. Но тогда функция $g = \frac{1}{f}$ голоморфна в $U_\zeta \cap D$ и не продолжается голоморфно в точку ζ. Таким образом, D не расширяема голоморфно в точке ζ и по теореме 1′ является L-выпуклой в этой точке ▶

Отметим, что этот признак обобщает известный признак обычной (геометрической) выпуклости области. Если вместо аналитического множества $\{f = 0\}$ мы будем рассматривать опорную гиперплоскость $\left\{\sum_{\nu=1}^{2n} \alpha_\nu x_\nu - \beta = 0\right\}$, то получим (необхо-

димый и достаточный) признак выпуклости области в граничной точке ζ.

Следующий критерий применим к областям с достаточно гладкой границей. Предположим, что в окрестности U_ζ некоторой граничной точки ζ область D задается условием

$$D \cap U_\zeta = \{z \in U_\zeta\colon\ \varphi(z) < 0\}, \tag{2}$$

где $\varphi \in C^2(U_\zeta)$ — действительная функция. Предположим еще, что в точке ζ

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2n}}\right) \tag{3}$$

отличен от нуля.

Тейлоровское разложение φ в точке ζ имеет вид

$$\varphi(z) = 2\operatorname{Re} L(z) + \operatorname{Re} K(z) + \frac{1}{2}H(z,\ \bar{z}) + o(|z-\zeta|^2), \tag{4}$$

где

$$L(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\Big|_\zeta (z_\nu - \zeta_\nu), \qquad K(z) = \sum_{\mu,\ \nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\,\partial z_\nu}\Big|_\zeta (z_\mu - \zeta_\mu)(z_\nu - \zeta_\nu),$$

$$H(z,\ \bar{z}) = \sum_{\mu,\ \nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\,\partial \bar{z}_\nu}\Big|_\zeta (z_\mu - \zeta_\mu)(\bar{z}_\nu - \bar{\zeta}_\nu)$$

(все производные берутся в точке ζ, свободный член $\varphi(\zeta) = 0$, и $o(|\zeta - z|^2)$ обозначает малую выше второго порядка при $z \to \zeta$).

Для получения (4) достаточно написать обычное тейлоровское разложение по переменным $z_1,\ \bar{z}_1,\ \ldots,\ z_n,\ \bar{z}_n$ и заметить, что так как функция φ действительна, то $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_\nu} = \overline{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\right)}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}_\nu^2} = \overline{\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_\nu^2}\right)}$, поэтому группы членов разложения по переменным $\bar{z}_\nu$ комплексно сопряжены соответствующим группам по z_ν и в сумме дают удвоенные действительные части (это замечание относится к первому и второму слагаемым формулы).

Заметим еще, что уравнение

$$L(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\Big|_\zeta (z_\nu - \zeta_\nu) = 0 \tag{5}$$

определяет аналитическую касательную плоскость к поверхности $\{\varphi = 0\}$ в точке ζ (она не вырождена в силу условия $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$). Форма

$$H(z,\ \bar{z}) = \sum_{\mu,\ \nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\,\partial \bar{z}_\nu}\Big|_\zeta (z_\mu - \zeta_\mu)(\bar{z}_\nu - \bar{\zeta}_\nu) \tag{6}$$

является эрмитовой, ибо $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\,\partial\bar z_\nu}=\overline{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\nu\,\partial\bar z_\mu}\right)}$ для всех $\mu,\ \nu=1,\ \dots,\ n$ в силу того, что φ — действительная функция.

Теорема 3 (Леви—Кшоска). *Пусть область $D\subset\mathbb{C}^n$ в окрестности точки $\zeta\in\partial D$ задается условием* (2), *где $\varphi\in C^2$ и $\operatorname{grad}\varphi|_\zeta\neq 0$. Если D является L-выпуклой в точке ζ, то сужение эрмитовой формы* (6) *на касательную аналитическую плоскость $\{L=0\}$ неотрицательно*:

$$H(z,\ \bar z)\,|_{L=0}\geqslant 0. \tag{7}$$

Обратно, если это сужение положительно:

$$H(z,\ \bar z)\,|_{L=0}>0 \tag{8}$$

для всех $z\neq\zeta$, то D является L-выпуклой в точке ζ.

◀ Для упрощения формальных выкладок ограничимся случаем $n=2$ и положим $\zeta=0$. Совершим невырожденное аффинное преобразование переменных

$$az_1+bz_2\to z_1,\qquad 2L(z)\to z_2,$$

которое переводит касательную аналитическую плоскость $\{L=0\}$ в плоскость $\{z_2=0\}$. После этого разложение Тейлора (4) примет вид

$$\varphi(z)=\frac{z_2+\bar z_2}{2}+\operatorname{Re}K(z)+\frac{1}{2}H(z,\ \bar z)+o(|z|^2), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}K(z)&=a_{11}z_1^2+2a_{12}z_1z_2+a_{22}z_2^2,\\ H(z,\ \bar z)&=a_{1\bar1}z_1\bar z_1+a_{1\bar2}z_1\bar z_2+a_{\bar12}\bar z_1z_2+a_{2\bar2}z_2\bar z_2\end{aligned} \tag{10}$$

(для простоты письма мы полагаем

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\,\partial z_\nu}\right|_0=a_{\mu\nu},\qquad \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\,\partial\bar z_\nu}\right|_0=a_{\mu\bar\nu}).$$

Сужение формы H на касательную аналитическую плоскость $\{z_2=0\}$ теперь записывается совсем просто:

$$H\,|_{L=0}=a_{1\bar1}|z_1|^2. \tag{11}$$

а) Достаточное условие. Из (8) следует, что $a_{1\bar1}>0$. Возьмем функцию $f(z)=z_2+a_{11}z_1^2$ и рассмотрим аналитическую поверхность $S=\{z\in\mathbb{C}^2\colon f(z)=0\}$. На ней $z_2=-a_{11}z_1^2$, и, ведя

подсчет с точностью до малых второго порядка, мы найдем, что сужение

$$\varphi|_S = \operatorname{Re}(-a_{11}z_1^2) + \operatorname{Re}(a_{11}z_1^2) + \frac{1}{2}a_{1\bar{1}}z_1\bar{z}_1 + o(|z|^2) =$$

$$= \frac{1}{2}a_{1\bar{1}}|z_1|^2 + o(|z|^2). \quad (12)$$

Отсюда видно, что $\varphi|_S \geqslant 0$ в некоторой окрестности точки $\zeta = 0$, т. е. что S в пределах этой окрестности лежит вне D. По теореме 2 отсюда следует, что D является L-выпуклой в точке $\zeta = 0$.

б) Необходимое условие. Пусть, от противного, D является L-выпуклой в точке $\zeta = 0$, а $a_{1\bar{1}} < 0$. Из (12) видно, что аналитическая поверхность $S_0 = \{z \in \mathbb{C}^2\colon z_2 = -a_{11}z_1^2,\ |z_1| \leqslant r\}$ при достаточно малых r вся, кроме точки $\zeta = 0$, лежит в области D. Из соображений непрерывности ясно, что компактные аналитические поверхности

$$S_\lambda = \{z \in \mathbb{C}^2\colon z_2 = -a_{11}z_1^2 - \lambda,\ |z_1| \leqslant r\}$$

при всех достаточно малых $\lambda > 0$ принадлежат D и что $S_\lambda \to S_0$, $\partial S_\lambda \to \partial S_0$ при $\lambda \to 0$. Но это противоречит L-выпуклости D в точке $\zeta = 0$ ▶

Для случая $n = 2$ существует еще более эффективный критерий. Назовем *определителем Леви*

$$\mathscr{L}(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}_1\partial z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}_1\partial z_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}_2\partial z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}_2\partial z_2} \end{vmatrix}; \quad (13)$$

тогда имеет место

Теорема 4. *Пусть область $D \subset \mathbb{C}^2$ в окрестности точки $\zeta \in \partial D$ задается условием* (2), *где $\varphi \in C^2$ и $\operatorname{grad}\varphi|_\zeta \neq 0$. Если D является L-выпуклой в точке ζ, то в этой точке $\mathscr{L}(\varphi) \geqslant 0$. Если $\mathscr{L}(\varphi) > 0$ в точке ζ, то область L-выпукла в этой точке.*

◀ Заметим, что в частном случае $L(z) = \frac{z_2}{2}$, к которому общий приводится невырожденным аффинным преобразованием

(как в предыдущей теореме), имеем

$$\mathscr{L}(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & a_{\bar{1}1} & a_{\bar{1}2} \\ \frac{1}{2} & a_{\bar{2}1} & a_{\bar{2}2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} a_{1\bar{1}},$$

и теорема сводится к предыдущей. Для доказательства в общем случае достаточно заметить, что при биголоморфном отображении $z \to Z$ определитель Леви преобразуется по следующему закону:

$$\mathscr{L}(\Phi) = \mathscr{L}(\varphi) \left| \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(Z_1, Z_2)} \right|^2, \tag{14}$$

где $\Phi(Z) = \varphi(z)$ (тождество (14) проверяется прямой выкладкой) ▶

Примеры.

1. Пусть основание B трубчатой области $D = B \times \mathbb{R}^2(y)$ из $\mathbf{C}^2$ ограничено кривой $\varphi = x_2 - \psi(x_1) = 0$. Заменяя $x_2 = \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2}$, $x_1 = \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}$, вычисляем определитель Леви:

$$\mathscr{L}(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\psi' & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\psi' & -\frac{1}{4}\psi'' & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16}\psi''.$$

Отсюда видно, что L-выпуклость таких областей сводится к обычной выпуклости.

2. Для областей Рейнхарта из $\mathbf{C}^2$ с границей $\varphi = |z_2| - \psi(|z_1|) = 0$

$$\mathscr{L}(\varphi) = -\frac{\psi}{16 r_1^2} \frac{d^2 \ln \psi}{(d \ln r_1)^2}$$

(мы положили $r_1 = |z_1|$). L-выпуклость таких областей сводится, следовательно, к логарифмической выпуклости, так как $\psi = |z_2| \geqslant 0$.

3. Для областей Хартогса из $\mathbf{C}^2$ с границей $\varphi = |z_2| - \psi(z_1) = 0$

$$\mathscr{L}(\varphi) = -\frac{\psi}{4} \Delta \ln \psi,$$

где Δ — оператор Лапласа. Условие L-выпуклости сводится к субгармоничности функции $-\ln \psi$ (см. задачу к гл. V ч. 1).

25. Плюрисубгармонические функции. Как видно из последнего примера, L-выпуклость областей Хартогса из $\mathbf{C}^2$ сводится к субгармоничности функций, их определяющих. Оказывается,

что, вообще, существует глубокая связь L-выпуклости областей при $n=2$ с субгармоническими, а при $n>2$ с их обобщениями, так называемыми плюрисубгармоническими функциями. Приведем их определение и простейшие свойства.

Определение 1. Действительная функция φ, $-\infty\leqslant\varphi<\infty$, определенная в окрестности точки $z^0\in\mathbb{C}^n$, называется *полунепрерывной сверху* в этой точке, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$|z-z^0|<\delta \Rightarrow \begin{cases} \varphi(z)-\varphi(z^0)<\varepsilon, & \text{если } \varphi(z^0)\neq-\infty, \\ \varphi(z)<-\dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{если } \varphi(z^0)=-\infty, \end{cases} \tag{1}$$

или, иначе, если

$$\overline{\lim_{z\to z^0}}\,\varphi(z)\leqslant\varphi(z^0). \tag{2}$$

Функция φ называется *полунепрерывной сверху в области* $D\subset\mathbb{C}^n$, если она полунепрерывна сверху в каждой точке $z^0\in D$ (для этого необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha\in(-\infty,\infty)$ множество меньших значений $\{z\in D\colon \varphi(z)<\alpha\}$ было открытым).

Полунепрерывные функции со стороны бóльших значений ведут себя как непрерывные. В частности, на компактах $K\Subset D$ такие функции ограничены сверху и достигают своих наибольших значений (ограниченность снизу и достижение наименьших значений не обязательны).

Совершенно аналогично вводятся *полунепрерывные снизу* функции, которые ведут себя как непрерывные, так сказать, со стороны меньших значений.

Определение 2. Функция $\varphi\colon D\to[-\infty,\infty)$ называется *плюрисубгармонической* в области $D\subset\mathbb{C}^n$, если: 1) она полунепрерывна сверху в D и 2) для любой точки $z^0\in D$ и для любой аналитической прямой $z=l(\zeta)=z^0+\omega\zeta$, где $\omega\in\mathbb{C}^n$, $\zeta\in\mathbb{C}$, сужение φ на эту прямую, т. е. функция $\varphi\circ l(\zeta)$, является субгармонической на открытом множестве $\{\zeta\in\mathbb{C}\colon l(\zeta)\in D\}$.

Плюрисубгармонические функции связаны с голоморфными функциями нескольких переменных так же, как субгармонические с функциями одного переменного: для любой функции f, голоморфной в области $D\subset\mathbb{C}^n$, функция

$$\varphi(z)=\ln|f(z)| \tag{3}$$

является плюрисубгармонической в этой области. В самом деле, φ очевидно полунепрерывна сверху в D, а так как сужение f на любую аналитическую прямую $z=l(\zeta)$ является голоморфной функцией от ζ, то сужение φ на эту прямую $\varphi\circ l(\zeta)=\ln|f\circ l(\zeta)|\to$

субгармоническая функция. В частности, если $f \not\equiv 0$ в D, то функция (3) плюригармонична.

Из определения видно, что свойства плюрисубгармонических функций просто сводятся к свойствам функций субгармонических. В частности, из теорем, доказанных в п. 46 ч. I, непосредственно получаются следующие утверждения:

1°. Если плюрисубгармоническая в области D функция φ достигает локального максимума в некоторой точке $z^0 \in D$, то она постоянна в D.

2°. Функция, плюрисубгармоническая в некоторой окрестности каждой точки, $z^0 \in D$, является плюрисубгармонической в области D.

3°. Если верхняя огибающая

$$\varphi(z) = \sup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(z)$$

семейства функций φ_α, $\alpha \in A$, плюрисубгармонических в области D, полунепрерывна сверху в D, то она является плюрисубгармонической в этой области.

4°. Для того чтобы функция φ, полунепрерывная сверху, была плюрисубгармонической в области D, необходимо и достаточно существование для каждой точки $z \in D$ и каждого вектора $\omega \in \mathbb{C}^n$ такого числа $r_0 = r_0(z, \omega)$, что

$$\varphi(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z + \omega r e^{it})\, dt \tag{4}$$

для всех $r < r_0$ (критерий плюрисубгармоничности).

Для функций класса C^2 можно дать более легко проверяемый критерий. Вспомним, что для субгармоничности функции $u(\zeta)$, принадлежащей классу C^2 в окрестности точки $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы в этой окрестности был неотрицателен ее оператор Лапласа:

$$\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\, \partial \bar{\zeta}} \geqslant 0$$

(см. задачу 12 к гл. V ч. I). Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, мы найдем, что для сужения функции $\varphi \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{C}^n$, на аналитическую прямую $z = l(\zeta) = z^0 + \omega\zeta$, т. е. для сложной функции $u(\zeta) = \varphi \circ l(\zeta)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\, \partial \bar{\zeta}} = \sum_{\mu,\, \nu = 1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu\, \partial \bar{z}_\nu}\, \omega_\mu \bar{\omega}_\nu.$$

Отсюда получается такой критерий:

Теорема 1. *Для плюрисубгармоничности функции* φ, *принадлежащей классу* C^2 *в некоторой области* $D \subset \mathbb{C}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке* $z^0 \in D$ *для любого вектора* $\omega \in \mathbb{C}^n$ *выполнялось неравенство*

$$H(\omega, \bar{\omega}) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}\Big|_0 \omega_\mu \bar{\omega}_\nu \geqslant 0, \tag{5}$$

где производные берутся в точке z^0.

Заметим, что эрмитова форма $H(\omega, \bar{\omega})$ — это та самая форма, которая участвует в теореме Леви — Кшоски из предыдущего пункта. Назовем еще функцию $\varphi \in C^2$ *строго плюрисубгармонической* в точке $z^0 \in \mathbb{C}^n$, если в некоторой окрестности этой точки $\operatorname{grad} \varphi \neq 0$ и $H(\omega, \bar{\omega}) > 0$ для всех $\omega \neq 0$. Тогда мы будем иметь следующий результат, указывающий связь плюрисубгармонических функций с выпуклостью в смысле Леви:

Теорема 2. *Пусть область* $D \subset \mathbb{C}^n$ *в некоторой окрестности* U_ζ *точки* $\zeta \in \partial D$ *задается условием*

$$D \cap U_\zeta = \{z \in U_\zeta : \varphi(z) < 0\},$$

где φ — *строго плюрисубгармоническая в* U_ζ *функция. Тогда* D *выпукла в смысле Леви в точке* ζ.

◀ Утверждение сразу получается из теоремы Леви — Кшоски, если заметить, что для строго плюрисубгармонической функции сужение формы $H(\omega, \bar{\omega})$ на касательную аналитическую плоскость

$$L = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}\Big|_\zeta (z_\nu - \zeta_\nu) = 0 \tag{6}$$

положительно [1]) для всех $z \neq \zeta$ ▶

Перейдем к дальнейшему изучению свойств плюрисубгармонических функций. Умножая обе части неравенства (4) на элемент площади сферы $\{|\omega| = 1\}$ и интегрируя по этой сфере, мы найдем

$$\varphi(z)\,\sigma(1) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_{\{|\omega|=1\}} \varphi(z + \omega r e^{it})\, d\sigma = \int_{\{|\omega|=1\}} \varphi(z + \omega r)\, d\sigma, \tag{7}$$

---

[1]) Чтобы получить такое сужение, надо в выражение H подставить $\omega_\nu = z_\nu - \zeta_\nu$, считая, что эти величины связаны уравнением (6).

где $\sigma(1)=\frac{2\pi^n}{(n-1)!}$ — площадь поверхности сферы (внутренний интеграл не зависит от t). Простой заменой переменного мы получим отсюда, что для всех достаточно малых r

$$\varphi(z)\leqslant\frac{1}{\sigma(r)}\int\limits_{\{|\zeta-z|<r\}}\varphi(\zeta)\,d\sigma, \tag{8}$$

где $\sigma(r)=\sigma(1)r^{2n-1}$ — площадь сферы радиуса r.

Отсюда точно так же, как в плоском случае (см. п. 46 ч. I), выводится, что *любая плюрисубгармоническая функция в области $D\subset\mathbb{C}^n$ является субгармонической функцией $2n$ действительных переменных*. Это означает, что для всех точек $z\in D$ и всех достаточно малых r, для любой функции h, гармонической[1]) в шаре $B=\{\zeta\in\mathbb{C}^n\colon |\zeta-z|<r\}$ и непрерывной в $\bar{B}$,

$$\varphi|_{\partial B}\leqslant h|_{\partial B}\Rightarrow\varphi|_B\leqslant h|_B. \tag{9}$$

Теорема 3. *Среднее значение*

$$S(r)=\frac{1}{\sigma(r)}\int\limits_{\{|\zeta-z|=r\}}\varphi(\zeta)\,d\sigma$$

плюрисубгармонической в окрестности точки $z\in\mathbb{C}^n$ функции φ является возрастающей функцией от r.

◀ Согласно (7)

$$S(r)\sigma(1)=\int\limits_{\{|\omega|=1\}}d\sigma\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(z+\omega re^{it})\,dt;$$

следовательно, достаточно доказать возрастание среднего значения субгармонической в окрестности точки $\zeta=0$ функции $u(\zeta)=\varphi(z+\omega\zeta)$, т. е. величины

$$s(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(re^{it})\,dt.$$

Пусть $r_2>r_1$ и $h(\zeta)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции u в круге $\{|\zeta|<r_2\}$ (см. п. 46 ч. I). По свойствам

[1]) Напомним, что гармонической в шаре $B\subset\mathbb{C}^n$ называется функция $h\colon B\to\mathbb{R}$ класса C^2, которая в каждой точке $z\in B$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta h=\sum\limits_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial^2 h}{\partial x_\nu^2}=0$.

субгармонических и гармонических функций имеем тогда

$$s(r_1) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r_1 e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r_2 e^{it})\,dt = s(r_2) \blacktriangleright$$

Теперь докажем, что произвольную плюрисубгармоническую функцию можно аппроксимировать такими же, но бесконечно дифференцируемыми функциями.

Теорема 4. *Для любой функции* φ, *плюрисубгармонической в области* $D \subset \mathbb{C}^n$, *можно построить возрастающую последовательность открытых множеств* G_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$, $\bigcup_{\mu=1}^{\infty} G_\mu = D$, *и убывающую последовательность функций* $\varphi_\mu \in C^\infty(G_\mu)$, *плюрисубгармонических в* G_μ, *сходящуюся к* φ *в каждой точке* $z \in D$:

$$\varphi_\mu(z) \searrow \varphi(z).$$

◀ Если $\varphi \equiv -\infty$, то в качестве φ_μ можно взять последовательность $\varphi_\mu(z) \equiv -\mu$. В общем случае последовательность φ_μ строится при помощи усреднений. Возьмем функцию

$$K(z) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|z|^2}}, & |z| < 1, \\ 0, & |z| \geqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

выбрав постоянную c так, чтобы интеграл от K по всему пространству $\mathbb{C}^n$ равнялся 1 (фактически интеграл по шару $\{|\zeta| < 1\}$, ибо вне шара $K = 0$). Эту функцию мы используем в качестве усредняющего ядра, положив

$$\varphi_\mu(z) = \int \varphi\left(z + \frac{\zeta}{\mu}\right) K(\zeta)\,dV, \tag{11}$$

где dV — элемент $2n$-мерного объема и интеграл берется по всему $\mathbb{C}^n$ (фактически по единичному шару). Ясно, что каждая функция φ_μ определена в $\frac{1}{\mu}$-сжатии области D, т. е. открытом множестве

$$G_\mu = \left\{z \in D:\ e(z, \partial D) > \frac{1}{\mu}\right\},$$

где e — евклидово расстояние. Ясно также, что $G_\mu \subset G_{\mu+1}$ для любого μ и что $\bigcup_{\mu=1}^{\infty} G_\mu = D$.

После замены переменных $z+\frac{\zeta}{\mu}\to\zeta$ интеграл (11) примет вид

$$\varphi_\mu(z)=\mu^{2n}\int\varphi(\zeta)\,K\{\mu(\zeta-z)\}\,dV,$$

из которого ясно, что $\varphi_\mu\in C^\infty(G_\mu)$ (в самом деле, подинтегральная функция, а следовательно, и интеграл зависят от z бесконечно дифференцируемым образом). Пользуясь критерием, который выражается неравенством (4), легко установить плюрисубгармоничность функций φ_μ: для всех $z\in G_\mu$, $\omega\in\mathbb{C}^n$ и всех достаточно малых r

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_\mu(z+\omega re^{it})\,dt=\int K(\zeta)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(z+\frac{\zeta}{\mu}+\omega re^{it}\right)dt\right\}dV\geqslant$$

$$\geqslant\int K(\zeta)\,\varphi\left(z+\frac{\zeta}{\mu}\right)dV=\varphi_\mu(z)$$

(мы использовали плюрисубгармоничность φ и неотрицательность ядра K).

Заменяя $dV=d\sigma_r\,dr$, где $d\sigma_r$ — элемент поверхности сферы $\{|\zeta|=r\}$, а затем делая замену переменных $z+\frac{\zeta}{\mu}\to\zeta$, мы преобразуем (11) к виду

$$\varphi_\mu(z)=\int_0^1 K(r)\,dr\int_{\{|\zeta|=r\}}\varphi\left(z+\frac{\zeta}{\mu}\right)d\sigma_r=$$

$$=\int_0^1 K(r)\,dr\,\mu^{2n-1}\int_{\left\{|\zeta-z|=\frac{r}{\mu}\right\}}\varphi(\zeta)\,d\sigma_{\frac{r}{\mu}}=\sigma(1)\int_0^1 K(r)\,r^{2n-1}\,S\left(\frac{r}{\mu}\right)dr,\tag{12}$$

где $S\left(\frac{r}{\mu}\right)$ — среднее значение функции φ на сфере $\left\{\zeta\colon|\zeta-z|=\frac{r}{\mu}\right\}$. Теперь из теоремы 3 видно, что функции φ_μ убывают с ростом μ.

В силу субгармоничности функции φ ее среднее значение $S\left(\frac{r}{\mu}\right)\geqslant\varphi(z)$, а так как

$$\sigma(1)\int_0^1 K(r)\,r^{2n-1}\,dr=\int_0^1 K(r)\,\sigma(r)\,dr=\int K\,dV=1,$$

то из (12) следует, что $\varphi_\mu(z)\geqslant\varphi(z)$ в любой точке $z\in D$ для всех μ, начиная с некоторого. С другой стороны, в силу полунепрерывности функции φ для любого $\varepsilon>0$ будет $\varphi(\zeta)-\varphi(z)<\varepsilon$

для всех ζ, достаточно близких к z, т. е. $S\left(\frac{r}{\mu}\right) \leqslant \varphi(z)+\varepsilon$ для всех μ, начиная с некоторого, и для таких μ из (12) мы получим, что $\varphi_\mu(z) < \varphi(z)+\varepsilon$. Таким образом, для всех $z \in D$

$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi_\mu(z) = \varphi(z) \blacktriangleright$$

Замечание. Предел убывающей последовательности субгармонических функций является функцией субгармонической (см. задачу 14 к гл. V ч. I), и это утверждение сразу переносится на плюрисубгармонические функции. Поэтому теорему 4 можно обратить.

В определении плюрисубгармонической функции требуется, чтобы ее сужения на аналитические прямые были функциями субгармоническими. Это свойство допускает следующее усиление:

Теорема 5. *Сужение функции φ, плюрисубгармонической в области $D \subset \mathbb{C}^n$, на любую комплексно m-мерную аналитическую поверхность $z = f(\zeta) = \{f_1(\zeta), \ldots, f_n(\zeta)\}$ также является плюрисубгармонической функцией на открытом множестве $\Omega = \{\zeta \in \mathbb{C}^m\colon f(\zeta) \in D\}$.*

◀ Для простоты формальных выкладок ограничимся случаем $m = 1$, т. е. покажем, что сужение φ на аналитическую кривую $z = f(\zeta)$ является субгармонической функцией.

Пусть сначала $\varphi \in C^2(D)$. Тогда для $u(\zeta) = \varphi \circ f(\zeta)$ по правилу дифференцирования сложных функций в любой точке $\zeta \in \Omega$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\,\partial\bar{\zeta}} = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\,\partial\bar{z}_\nu}\,\frac{\partial f_\mu}{\partial\zeta}\left(\overline{\frac{\partial f_\nu}{\partial\zeta}}\right).$$

Так как φ плюрисубгармонична, то по теореме 1 форма в правой части неотрицательна, а это и означает, что $u(\zeta)$ — субгармоническая функция.

Общий случай сводится к рассмотренному при помощи теоремы 4 и замечания вслед за ней ▶

Следствие. *Для сужения на аналитическую поверхность S функции φ, плюрисубгармонической в окрестности S, справедлив принцип максимума.*

В частности, для компактной аналитической поверхности S (см. п. 23) этот принцип можно сформулировать так:

$$\|\varphi\|_S = \|\varphi\|_{\partial S}. \tag{13}$$

В заключение проведем сравнение понятий плюрисубгармоничности и выпуклости функций нескольких (действительных) переменных. Мы уже отмечали (в п. 46 ч. I), что субгармони-

ческие функции являются плоским аналогом выпуклых функций одного переменного. Последние можно определить так: функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}^1$ называется *выпуклой* (вниз) на отрезке $[a, b]\subset\mathbb{R}^1$, если для любых двух точек $x', x''\in[a, b]$ и любого $t\in(0, 1)$

$$f\{tx'+(1-t)x''\}\leqslant tf(x')+(1-t)f(x''). \tag{14}$$

Чтобы подчеркнуть аналогию с субгармоническими функциями, обозначим через $x=tx'+(1-t)x''$ и через $h(x)=tf(x')+(1-t)f(x'')$ — линейную функцию [1]), принимающую на концах отрезка $[x', x'']$ те же значения, что и f (рис. 107). Тогда условие выпуклости (14) примет вид: $f(x)\leqslant h(x)$ для всех $x\in[x', x'']$.

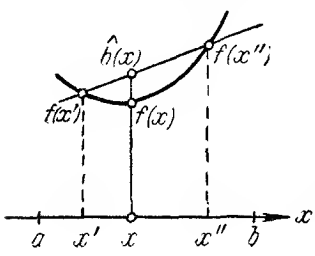


Рис. 107.

Распространим понятие выпуклости на функции нескольких действительных переменных. Функция $f\colon D\to\mathbb{R}^1$ называется *выпуклой* в области $D\subset\mathbb{R}^n$, если ее сужение на любую прямую $x=l(t)=x^0+\omega t$, где $x^0, \omega\in\mathbb{R}^n$, является выпуклой функцией на открытом множестве $\Omega=\{t\in\mathbb{R}^1\colon l(t)\in D\}$.

Условием выпуклости дважды гладкой функции f одного переменного t является, очевидно, неравенство $f''(t)\geqslant 0$ для всех $t\in[a, b]$. По правилу дифференцирования сложных функций отсюда получается условие выпуклости функции нескольких переменных $f\in C^2(D)$: квадратичная форма

$$H(\omega)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\Big|_0\omega_\mu\omega_\nu, \tag{15}$$

где производные берутся в точке x^0, неотрицательна для всех $x^0\in D$ и всех $\omega\in\mathbb{R}^n$.

Таким образом, плюрисубгармоничность является, так сказать, комплексным аналогом выпуклости. Иными словами, плюрисубгармонические функции получаются из выпуклых заменой действительной структуры комплексной: вместо сужений на действительные (одномерные) прямые $x=l(t)$ надо рассматривать сужения на аналитические (двумерные) прямые $z=l(\zeta)$ и вместо выпуклых функций от t — субгармонические функции от ζ. Для функций класса C^2 такой переход состоит в замене квадратичной формы (15) эрмитовой формой (5).

[1]) Функция h является наилучшей линейной мажорантой функции f на концах отрезка $[x', x'']$ — аналогом наилучшей гармонической мажоранты функции на границе области (ср. п. 46 ч. I).

26. Псевдовыпуклые области. *Выпуклыми* называются такие области $D \subset \mathbb{R}^n$, которые вместе с любыми точками x' и x'' содержат также и все точки $x = tx' + (1-t)x''$, где $t \in (0, 1)$. Существует и эквивалентное[1]) определение: область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклой, если функция $-\ln e(x, \partial D)$, где $e(x, \partial D)$ — евклидово расстояние точки x до границы области, является выпуклой в D.

Мы придем к понятию псевдовыпуклой области, если вместо действительной структуры будем рассматривать комплексную:

Определение. Область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется *псевдовыпуклой*, если функция

$$\varphi(z) = -\ln e(z, \partial D), \tag{1}$$

где $e(z, \partial D)$ — евклидово расстояние точки z до границы ∂D, плюрисубгармонична в D.

Заметим прежде всего, что на плоскости $\mathbb{C}$ любая область псевдовыпукла. В самом деле, для $D = \mathbb{C}$ утверждение тривиально (ибо здесь $e(z, \partial D) \equiv \infty$). Для $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta\}$ утверждение проверяется простым подсчетом (здесь $-\ln e(z, \partial D) = -\ln|z-\zeta|$). Если же граница области состоит более чем из одной точки, то функция

$$-\ln e(z, \partial D) = \sup_{\zeta \in \partial D} \{-\ln|z-\zeta|\}$$

и, следовательно, субгармонична, как верхняя огибающая субгармонических функций (см. теорему 4 п. 46 ч. I; в этой теореме предполагается, что верхняя огибающая полунепрерывна сверху, но у нас $e(z, \partial D)$ непрерывна, ибо в силу неравенства треугольника она даже удовлетворяет условию Липшица, и не обращается в нуль ни в одной точке $z \in D$).

При $n > 1$, как мы скоро убедимся, не всякая область псевдовыпукла: псевдовыпуклость оказывается эквивалентной выпуклости в смысле Леви. Для доказательства установим сначала важный вспомогательный результат.

Теорема 1. *Для любого ряда Хартогса*

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu('z)(z_n - a_n)^\mu, \tag{2}$$

$g_\mu \in H('D)$, *функция* $\varphi = -\ln R('z)$, *где* R — *радиус Хартогса*[2]), *является плюрисубгармонической в области* $'D$.

---

[1]) Эквивалентность этого определения предыдущему следует из результатов, которые будут установлены здесь и в п. 27.

[2]) Напомним, что $R('z)$ — что раднус сходимости степенного ряда при фиксированной точке $'z \in 'D$.

◀ Без ограничения общности положим $a_n = 0$; кроме того, для простоты письма будем опускать штрих в обозначении $'z$, так что

$$z = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

а) Докажем, что функция $R(z)$ полунепрерывна снизу в области $'D$. Предполагая противное, допустим, что в какой-либо точке $z^0 \in {}'D$

$$R(z^0) > \varliminf_{z \to z^0} R(z).$$

Пусть сначала $R(z^0) < \infty$. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует последовательность точек $z^\nu \in {}'D$ такая, что $z^\nu \to z^0$ и

$$R(z^\nu) < R(z^0) - \varepsilon. \tag{3}$$

По определению радиуса Хартогса отсюда следует существование последовательности точек (z^ν, z_n^ν), $|z_n^\nu| = R(z^\nu)$, в каждую из которых функция f, определяемая рядом (2), не продолжается голоморфно. В силу (3) последовательность $\{z_n^\nu\}$ ограничена, и из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке z_n^0, $|z_n^0| \leqslant R(z^0) - \varepsilon$. Точка (z^0, z_n^0) — предельная для точек (z^ν, z_n^ν), в которые f не продолжается голоморфно, следовательно, f не продолжается и в эту точку. Но по определению радиуса Хартогса f продолжается в любую точку (z^0, z_n), для которой $|z_n| < R(z^0)$. Противоречие доказывает утверждение.

Случай $R(z^0) = \infty$ приводится к противоречию аналогично.

б) Согласно а) функция $\varphi = -\ln R(z)$ полунепрерывна сверху в $'D$. Поэтому остается доказать, что сужение этой функции на любую аналитическую прямую $z = l(\zeta) = z^0 + \omega\zeta$, где $\omega \in \mathbb{C}^{n-1}$, $z^0 \in {}'D$, является субгармонической функцией в окрестности точки $\zeta = 0$. Пусть это не так, тогда существует такая аналитическая прямая $z = l(\zeta)$, что функция

$$-\ln R \circ l(\zeta) = u(\zeta) \tag{4}$$

не субгармонична в окрестности $\zeta = 0$. Тогда существует круг $U = \{|\zeta| < r\}$ и функция h, непрерывная в $\bar{U}$ и гармоническая в U, такая, что $u(\zeta) \leqslant h(\zeta)$ на ∂U, но в некоторой точке $\zeta_0 \in U$

$$h(\zeta_0) - u(\zeta_0) = \inf_{\bar{U}} \{h(\zeta) - u(\zeta)\} = -\varepsilon < 0$$

(мы воспользовались тем, что полунепрерывная снизу функция $h - u$ достигает своей нижней грани на компакте).

Обозначим через $g(\zeta) = -h(\zeta) - \varepsilon$ функцию, гармоническую в U и непрерывную в $\bar{U}$; имеем

$$\begin{aligned} &g(\zeta) < -u(\zeta) \text{ на } \partial U, \\ &g(\zeta) \leqslant -u(\zeta) \text{ в } \bar{U}, \\ &g(\zeta_0) = -u(\zeta_0). \end{aligned} \tag{5}$$

По свойству радиуса Хартогса существует точка a_n, $|a_n| = R \circ l(\zeta_0)$, в которую функция (2) при фиксированном $z = l(\zeta_0)$ не продолжается голоморфно. Построим голоморфную в U функцию $G(\zeta) = g(\zeta) + i\tilde{g}(\zeta)$ так, чтобы $G(\zeta_0)$ совпадало с каким-нибудь значением $\ln a_n$ (это можно сделать, ибо у нас $g(\zeta_0) = \ln R \circ l(\zeta_0) = \ln |a_n|$).

Теперь выберем круг $U' = \{|\zeta| < r'\} \Subset U$ так, чтобы на $\partial U'$ было $g(\zeta) < -u(\zeta)$ (это можно сделать в силу (5) и полунепрерывности сверху функции $g + u$), и рассмотрим семейство компактных в смысле п. 23 аналитических кривых

$$S_\lambda = \{(z, z_n) \in \mathbb{C}^n: z = l(\zeta), z_n = \lambda e^{G(\zeta)}, \zeta \in \bar{U}'\}. \tag{6}$$

Для любого $\lambda \in (0, 1)$ кривая $S_\lambda \Subset D$, где $D = {}'D \times \{|z_n| < R(z)\}$, ибо для всех $(z, z_n) \in S_\lambda$ в силу (5) имеем $|z_n| \leqslant \lambda e^{-u(\zeta)} = \lambda R \circ l(\zeta) = \lambda R(z)$. Далее, очевидно, что $S_\lambda \to S_1$ и $\partial S_\lambda \to \partial S_1$ при $\lambda \to 1$ и что $\partial S_1 \Subset D$, ибо на $\partial \bar{U}'$ имеем строгое неравенство $g(\zeta) < -u(\zeta)$, равносильное неравенству $|z_n| < e^{-u(\zeta)} = R(z)$.

Таким образом, применим принцип непрерывности п. 23, по которому функция (2) голоморфно продолжается на S_1. Но S_1 содержит точку $(l(\zeta_0), a_n)$, в которую, как мы видели, эта функция непродолжаема.

Противоречие доказывает утверждение ▶

Связь доказанной теоремы с выпуклостью в смысле Леви выясняется следующим образом. Для произвольной области $D \subset \mathbb{C}^n$ назовем *радиусом Хартогса* в точке $z^0 \in D$ радиус $R(z^0)$ наибольшего круга с центром z^0, лежащего на пересечении D с аналитической прямой $l_n = \{z \in \mathbb{C}^n: {}'z = {}'z^0, z_n = \zeta\}$:

$$R(z^0) = e(z^0, \partial D \cap l_n). \tag{7}$$

Лемма. *Для любой L-выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $\varphi = -\ln R(z)$, где $R(z)$ — радиус Хартогса D в точке z, плюрисубгармонична в D.*

◀ Для произвольной области $D \subset \mathbb{C}^n$ радиус Хартогса $R(z)$ полунепрерывен снизу, а функция $\varphi = -\ln R(z)$ полунепрерывна сверху в D. В самом деле, пусть $\alpha \in \mathbb{R}^1$ и $R(z^0) > \alpha$; тогда круг $K = \{z \in \mathbb{C}^n: {}'z = {}'z^0, |z_n - z_n^0| < \alpha\} \Subset D$, и мы обозначим $r = \rho(\partial K, \partial D) > 0$. Из рис. 108 ясно, что для любой точки

$z \in U(z^0, r)$ имеем $R(z) > \alpha$. Таким образом, множество верхних значений $\{z \in D\colon R(z) > \alpha\}$ открыто для любого $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

Остается доказать, что для L-выпуклых областей сужение функции $\varphi = -\ln R(z)$ на любую аналитическую прямую

$$l_\omega = \{z \in \mathbb{C}^n\colon z = z^0 + \omega\zeta\}, \tag{8}$$

где $z^0 \in D$, $\omega \in \mathbb{C}^n$, является субгармонической функцией в окрестности точки $\zeta = 0$. Если $'\omega = '0$, т. е. l_ω параллельна оси z_n, то мы имеем ситуацию плоского случая[1]): $R(z)_{l_\omega} = \inf\limits_{z' \in \partial D \cap l_\omega} |z_n - z'_n|$, и, следовательно, функция

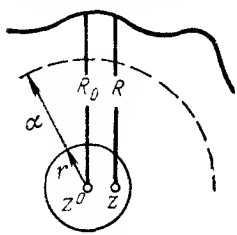


Рис. 108.

$$-\ln R(z)|_{l_\omega} = \sup_{z' \in \partial D \cap l_\omega} \{-\ln|z_n - z'_n|\}$$

субгармонична, как полунепрерывная сверху верхняя огибающая субгармонических функций.

Если же $'\omega \neq '0$, т. е. l_ω не параллельна оси z_n, то мы должны повторить рассуждения, проведенные во второй части доказательства теоремы 1. Как и там, предполагая, что функция $-\ln R(z)|_{l_\omega}$ не субгармонична, мы найдем точку $a \in \partial D$, для которой $'a = 'z^0 + '\omega\zeta_0$, $|a_n - z^0_n| = R(z^0 + \omega\zeta_0)$, и построим семейство компактных аналитических кривых

$$S_\lambda = \{z \in \mathbb{C}^n\colon 'z = 'l(\zeta),\ z_n = z^0_n + \lambda e^{G(\zeta)},\ \zeta \in {}'\overline{U}\},$$

где $'l(\zeta) = 'z^0 + '\omega\zeta$, а остальные обозначения те же, что в (6). При $0 < \lambda < 1$ кривые $S_\lambda \Subset D$, а при $\lambda \to 1$ они сходятся к кривой S_1, граница которой $\partial S_1 \Subset D$ и которая содержит точку $a \in \partial D$ (соответствующую значению параметра $\zeta = \zeta_0$). Но это противоречит L-выпуклости области D ▶

Теорема 2. *Любая выпуклая в смысле Леви область $D \subset \mathbb{C}^n$ является псевдовыпуклой.*

◀ Функция $e(z, \partial D)$ всегда конечна (кроме тривиального случая $D = \mathbb{C}^n$) и непрерывна, ибо в силу неравенства треугольника она удовлетворяет условию Липшица. Так как она положительна в D, то и функция $-\ln e(z, \partial D)$ непрерывна в D.

Рассмотрим всевозможные аналитические повороты

$$z \to z^0 + C(z - z^0), \tag{9}$$

[1]) Ср. рассуждение перед теоремой 1 на стр. 395.

где $C=(c_{\mu\nu})$ — квадратная матрица n-го порядка, второй член справа понимается как произведение матрицы C на вектор $z-z^0$ и матрица такова, что евклидовы расстояния между любыми двумя точками $\mathbb{C}^n$ при отображении (9) сохраняются. Таким поворотом направление любой аналитической прямой $l_\omega=\{z\in\mathbb{C}^n\colon z=z^0+\omega\xi\}$ можно перевести в направление, параллельное оси z_n. Обозначим через $R_\omega(z^0)$ величину радиуса Хартогса области D, соответствующего направлению ω:

$$R_\omega(z^0)=e(z^0,\ \partial D\cap l_\omega).$$

Мы имеем, очевидно, для любого $z\in D$

$$e(z,\ \partial D)=\inf_\omega R_\omega(z),$$

где нижняя грань берется по всем векторам $\omega\in\mathbb{C}^n$, $|\omega|=1$. Если область L-выпукла[1]), то по лемме для любого фиксированного ω функция $-\ln R_\omega(z)$ плюрисубгармонична, и, следовательно, функция $-\ln e(z,\ \partial D)$, как непрерывная верхняя огибающая плюрисубгармонических функций, также плюрисубгармонична в D ▶

Теорема 3. *Любая псевдовыпуклая область $D\subset\mathbb{C}^n$ является выпуклой в смысле Леви.*

◀ Пусть, от противного, D не является L-выпуклой. Тогда найдется такая последовательность компактных аналитических поверхностей S_ν, что $S_\nu\to S$, $\partial S_\nu\to\partial S$, причем S_ν, $\partial S\in D$, а S содержит точку $\zeta\in\partial D$. В силу непрерывности евклидова расстояния имеем

$$e(S,\ \partial D)=\lim_{\nu\to\infty} e(S_\nu,\ \partial D). \tag{10}$$

С другой стороны, так как функция $-\ln e(z,\ \partial D)$ плюрисубгармонична, то для нее справедлив принцип максимума (см. следствие теоремы 5 предыдущего пункта), по которому для любого $\nu=1,\ 2,\ \ldots$

$$-\ln e(S_\nu,\ \partial D)\leqslant-\ln e(\partial S_\nu,\ \partial D).$$

Отсюда $e(S_\nu,\ \partial D)\geqslant e(\partial S_\nu,\ \partial D)$, а так как ∂S_ν, $\partial S\in D$ и $\partial S_\nu\to\partial S$, то $e(\partial S_\nu,\ \partial D)\geqslant\delta$ и, следовательно, $e(S_\nu,\ \partial D)\geqslant\delta$ для всех ν и некоторого $\delta>0$. Но тогда из (10) мы получаем, что $e(S,\ \partial D)\geqslant\delta$, а это противоречит тому, что S содержит точку $\zeta\in\partial D$ ▶

Таким образом, понятия L-выпуклости и псевдовыпуклости действительно оказались эквивалентными.

---

[1]) Легко видеть, что L-выпуклость не нарушается при аналитических поворотах (9).

В заключение этого параграфа приведем сводку условий, характеризующих области голоморфности в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 4. *Эквивалентны следующие пять условий*:

(I) D — *область голоморфности* (т. е. существует функция $f \in H(D)$, не продолжаемая голоморфно в более широкую область, см. п. 20);

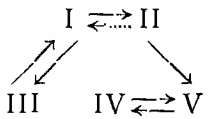
(II) D *не расширяема голоморфно в каждой граничной точке* (т. е. для любой точки $\zeta \in \partial D$ существует окрестность U и функция $f \in H(D \cap U)$, не продолжаемая голоморфно в точку ζ, см. п. 24);

(III) D *голоморфно выпукла* (т. е. для любого множества $K \Subset D$ голоморфно выпуклая оболочка $\widehat{K}_H = \{z \in D: |f(z)| \leqslant \|f\|_K$ для всех $f \in H(D)\} \Subset D$, см. п. 21);

(IV) D *псевдовыпукла* (т. е. функция $-\ln e(z, \partial D)$ является плюрисубгармонической в D, см. п. 26);

(V) D *выпукла в смысле Леви* (т. е. не существует последовательности компактных аналитических поверхностей $S_\nu \to S$, $\partial S_\nu \to \partial S$ таких, что S_ν, $\partial S \Subset D$, а S содержит точку $\zeta \in \partial D$, см. п. 24).

◀ Выше были доказаны импликации, изображенные сплошными стрелками на схеме



(импликация (I) $\to$ (II) тривиальна, импликации (I) $\rightleftarrows$ (III) составляют содержание теоремы 4 п. 21, (II) $\to$ (V) — теоремы 1 п. 24, (IV) $\rightleftarrows$ (V) — теорем 2 и 3 этого пункта).

Изображенная пунктирной стрелкой импликация (II) $\dashrightarrow$ (I) составляет содержание теоремы Ока, решающей проблему Леви, о которой мы говорили в п. 24; эта теорема будет доказана в гл. IV. Пользуясь теоремой Ока, мы докажем сейчас, что (IV) $\to$ (I), и это замкнет цепочку эквивалентностей.

Итак, пусть для некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция

$$\varphi(z) = -\ln e(z, \partial D)$$

плюрисубгармонична в D. По теореме 4 п. 25 построим последовательность функций $\varphi_\mu \searrow \varphi$, плюрисубгармонических класса C^∞ в открытых множествах G_μ, причем G_μ образуют возрастающую последовательность, аппроксимирующую область D изнутри.

Так как функция $\varphi(z) \to \infty$ при $z \to \partial D$, то для любого μ можно найти номер $\nu = \nu(\mu)$ такой, что множество

$$\{z \in D: \varphi(z) < \mu\} \Subset G_\nu.$$

Будем считать, что функция $\nu(\mu) \nearrow \infty$; тогда множества $G_\mu^* = G_{\nu(\mu)}$ также образуют возрастающую последовательность, аппроксимирующую D изнутри. Положим, наконец,

$$\varphi_\mu^*(z) = \varphi_{\nu(\mu)}(z) + \frac{1}{\mu}|z|^2 - \mu. \tag{11}$$

Очевидно, $\varphi_\mu^* \in C^\infty(G_\mu^*)$, и простой подсчет показывает, что для любого $\omega \in \mathbb{C}^n$

$$H_\mu^*(\omega, \bar{\omega}) = \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\mu^*}{\partial z_s \partial \bar{z}_t} \omega_s \bar{\omega}_t = \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial z_s \partial \bar{z}_t} \omega_s \bar{\omega}_t + \frac{1}{\mu}|\omega|^2.$$

В силу плюрисубгармоничности функций φ_ν сумма в правой части неотрицательна, откуда следует, что

$$H_\mu^*(\omega, \bar{\omega}) \geqslant \frac{1}{\mu}|\omega|^2,$$

т. е. что функции φ_μ^* строго плюрисубгармоничны. По теореме Леви — Кшоски п. 24 отсюда вытекает, что открытое множество

$$D_\mu^* = \{z \in G_\mu^*: \varphi_\mu^*(z) < 0\}$$

не расширяемо голоморфно в каждой своей граничной точке (см. пункт а) доказательства этой теоремы).

Из этого по теореме Ока следует, что каждая связная компонента множества D_μ^* является областью голоморфности. Но при фиксированном z и растущем μ величина $\varphi_\mu(z)$ уменьшается, причем $\lim\limits_{\mu \to \infty} \varphi_\mu(z) = \varphi(z)$. Отсюда видно, что существует возрастающая последовательность компонент D_μ^*, аппроксимирующая D изнутри. По теореме 2 п. 22 отсюда можно заключить, что D является областью голоморфности ▶

§ 9. Оболочки голоморфности

Если D не является областью голоморфности, то любая функция $f \in H(D)$ голоморфно продолжается в более широкую область. Возникает вопрос об отыскании так называемой оболочки голоморфности области D — наименьшей области, в которую продолжаются все функции из $H(D)$. Этот вопрос важен как с принципиальной точки зрения, так и с точки зрения приложений в квантовой физике [1]).

[1]) См. Дж. Иост, Теория квантованных полей, «Мир», М., 1967.

27. Однолистные оболочки голоморфности. В п. 20 мы привели пример области D, из которой каждая голоморфная функция продолжается в более широкую область, причем некоторые функции при продолжении оказываются многозначными. Желая избежать рассмотрения многозначных функций, мы приходим к необходимости рассматривать многолистные области, аналогичные римановым поверхностям аналитических функций одного переменного.

В частности, и оболочки голоморфности могут оказаться такими многолистными областями (как в упомянутом примере). Мы рассмотрим понятие многолистных областей в следующих пунктах, а здесь лишь сформулируем определение оболочки голоморфности так, чтобы оно охватывало и многолистный случай.

Определение. Область $\tilde{D}$ (однолистная или нет) называется *оболочкой голоморфности* области $D \subset \mathbb{C}^n$, если: 1) $\tilde{D}$ содержит D, 2) любая функция $f \in H(D)$ продолжается до функции, голоморфной в $\tilde{D}$, и 3) для любой точки $z^0 \in \tilde{D}$ существует функция $f_0 \in H(\tilde{D})$, сужение которой на поликруг $U(z^0, r)$, где $r = \rho(z^0, \partial\tilde{D})$, не продолжается голоморфно ни в какой поликруг $U(z^0, R)$, где $R > r$.

Замечание. Хотя определение сформулировано про запас и для случая многолистных областей, в многолистном случае оно нуждается в пояснениях (например, понятий $\tilde{D} \supset D$ и $\rho(z^0, \partial\tilde{D})$). Эти пояснения будут даны в следующих пунктах; здесь же читатель может понимать под $\tilde{D}$ однолистную область.

В этом пункте мы рассмотрим основные свойства оболочек голоморфности в предположении их однолистности, а также вопросы построения оболочек для областей простейших классов.

Прежде всего отметим, что оболочки голоморфности являются голоморфными расширениями областей в смысле п. 20. Поэтому по теореме 2 п. 20 любая функция, голоморфная в области D, принимает в оболочке $\tilde{D}$ этой области лишь те значения, которые она принимает в D. В частности, оболочка голоморфности ограниченной области всегда является ограниченной областью (это утверждение получается из предыдущего, если применить его к координатам z_ν, $\nu = 1, \ldots, n$).

Далее, условие максимальности 3) в определении оболочки голоморфности можно существенно усилить. Это условие является условием локальной непродолжаемости некоторой функции из $H(\tilde{D})$, но можно утверждать, что в $H(\tilde{D})$ существует и глобально непродолжаемая функция. Иными словами, имеет место

Теорема 1. *Если оболочка голоморфности $\tilde{D}$ области $D \subset \mathbb{C}^n$ однолистна, то она является областью голоморфности.*

◀ На основании результатов п. 21 достаточно доказать, что $\tilde{D}$ голоморфно выпукла. Пусть $K \Subset \tilde{D}$ и $\rho(K, \partial\tilde{D}) = r$; по теореме об одновременном продолжении (п. 21) любая функция $f \in H(\tilde{D})$ голоморфно продолжается в поликруг $U(z, r)$ с центром в любой точке $z \in \hat{K}_{H(\tilde{D})}$. Из условия 3) в определении оболочки голоморфности отсюда следует, что $\rho(z, \partial\tilde{D}) \geqslant r$ и, значит, $\rho(\hat{K}_{H(\tilde{D})}, \partial\tilde{D}) \geqslant r$. Но так как это расстояние не может быть больше r, то

$$\rho(\hat{K}_{H(\tilde{D})}, \partial\tilde{D}) = \rho(K, \partial\tilde{D}),$$

и $\tilde{D}$ голоморфно выпукла ▶

Следствие. *Если область $D \subset \mathbb{C}^n$ имеет однолистную оболочку голоморфности $\tilde{D}$, то последняя является наименьшей областью голоморфности, содержащей D (т. е. пересечением всех областей голоморфности, содержащих D).*

◀ Если G — область голоморфности, содержащая D, то $G \supset \tilde{D}$ (так как $H(G) \subset H(D)$, то любая $f \in H(G)$ голоморфно продолжается в $\tilde{D}$). Но $\tilde{D}$ по теореме 1 — область голоморфности, следовательно, $\tilde{D}$ — наименьшая область голоморфности, содержащая D ▶

Замечание. На первый взгляд может показаться, что подобно теореме 1 из локальной нерасширяемости области выводится ее глобальная нерасширяемость, т. е. импликация (II) → (I) в теореме 4 предыдущего пункта. Однако в условии (II) рассматриваются функции, голоморфные не во всей области, а лишь в окрестности граничной точки, и поэтому доказательство теоремы 1 здесь не проходит. Как мы уже говорили, импликация (II) → (I) составляет содержание весьма тонкой теоремы Ока, которая будет доказана в гл. IV.

Для доказательства следующей теоремы нам нужна

Лемма. *Если D — область голоморфности, то любая связная компонента Δ ее r-сжатия $D_r = \{z \in D: \rho(z, \partial D) > r\}$ также является областью голоморфности.*

◀ Пусть $K \Subset \Delta$ и $\rho(K, \partial\Delta) = \rho$; для любых точек $z \in K$ и $\zeta \in \partial D$ на отрезке $[z, \zeta]$ найдется точка $z' \in \partial\Delta$ такая, что

$$\rho(z, \zeta) = \rho(z, z') + \rho(z', \zeta) \geqslant \rho + r$$

(рис. 109). Поэтому $\rho(K, \partial D) \geqslant \rho + r$, а так как D — область голоморфности, то по теореме 6 п. 21 и

$$\rho(\hat{K}_{H(D)}, \partial D) \geqslant \rho + r. \tag{1}$$

Нам нужно доказать, что $\rho(\hat{K}_{H(\Delta)}, \partial\Delta) \geqslant \rho$, т. е. что $\rho(z^0, z') \geqslant \rho$ для любых точек $z^0 \in \hat{K}_{H(\Delta)}$ и $z' \in \partial\Delta$. Но так как $\Delta \subset D$, то $\hat{K}_{H(\Delta)} \subset \hat{K}_{H(D)}$, следовательно $z^0 \in \hat{K}_{H(D)}$ и согласно (1) $\rho + r \leqslant \leqslant \rho(z^0, \partial D) \leqslant \rho(z^0, z') + \rho(z', \partial D) = \rho(z^0, z') + r$ (у нас $\rho(z', \partial D) = r$, ибо $z' \in \partial\Delta$). Отсюда и следует, что $\rho(z^0, z') \geqslant \rho$ ▶

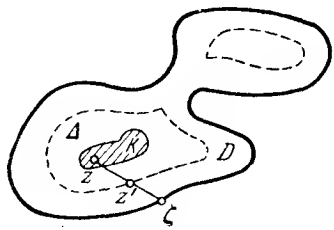


Рис. 109.

Теорема 2. *Если $D \subset G$ и эти области имеют однолистные оболочки $\tilde{D}$ и соответственно $\tilde{G}$, то $\tilde{D} \subset \tilde{G}$ и*

$$\rho(\partial\tilde{D}, \partial\tilde{G}) \geqslant \rho(\partial D, \partial G). \qquad (2)$$

◀ Так как $H(G) \subset H(D)$, то любая функция $f \in H(G)$ голоморфно продолжается в $\tilde{D}$, следовательно, $\tilde{D} \subset \tilde{G}$. Пусть $\rho(\partial D, \partial G) = r > 0$ (для $r = 0$ теорема тривиальна), тогда $D \subset G_r \subset (\tilde{G})_r$. Очевидно, D принадлежит некоторой связной компоненте множества $(\tilde{G})_r$, которая по доказанной лемме является областью голоморфности. Но тогда и $\tilde{D}$ принадлежит этой компоненте, а значит, и множеству $(\tilde{G})_r$; поэтому $\rho(\partial\tilde{D}, \partial\tilde{G}) \geqslant r$ ▶

Следствие. *Если D — ограниченная область, имеющая однолистную оболочку $\tilde{D}$, то пересечение $\partial D \cap \partial\tilde{D}$ непусто.*

◀ Применим к областям D и $G = \tilde{D}$ теорему 2:

$$\rho(\partial D, \partial\tilde{D}) \leqslant \rho(\partial\tilde{D}, \partial\tilde{D}) = 0$$

(мы воспользовались тем, что оболочка области голоморфности совпадает с этой областью). Так как ∂D — компакт (ибо D ограничена), то из равенства $\rho(\partial D, \partial\tilde{D}) = 0$ следует, что множества ∂D и $\partial\tilde{D}$ пересекаются ▶

Перейдем к описанию оболочек голоморфности областей простейших классов.

1. Трубчатые области. Напомним, что трубчатой областью с основанием $B \subset \mathbb{R}^n$ называется область $T = B \times \mathbb{R}^n(y)$, т. е. $T = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n\colon x \in B\}$ (см. п. 2).

Теорема 3. *Оболочкой голоморфности трубчатой области T является ее выпуклая оболочка $\hat{T}$.*

◀ Очевидно, $\hat{T} = \hat{B} \times \mathbb{R}^n(y)$, где $\hat{B}$ — выпуклая оболочка основания B в пространстве $\mathbb{R}^n(x)$. Покажем, что любая функция $f \in H(T)$ голоморфно продолжается в $\hat{T}$. Область $\hat{B}$ представляет собой совокупность точек отрезков $[x^1, x^2]$, где $x^1, x^2 \in B$.

Если x^1 и x^2 можно соединить в B двузвенной ломаной $[x^1, x^0] \cup [x^0, x^2]$, то продолжаемость f в окрестность множества $[x^1, x^2] \times \mathbb{R}^n(y)$ следует непосредственно из леммы о призме (п. 23).

В общем случае точки $x^1, x^2 \in B$ можно соединить в B конечнозвенной ломаной (рис. 110). При помощи той же леммы индукцией по числу звеньев мы снова докажем, что f голоморфно продолжается в окрестность множества $[x^1, x^2] \times \mathbb{R}^n(y)$. Та же лемма показывает, что функция f при описанном продолжении остается однозначной. В самом деле, пусть x — точка пересечения двух отрезков $[x^1, x^2]$ и $[\tilde{x}^1, \tilde{x}^2]$ с концами в B и в окрестности точки $z = x + iy$ мы получили два значения f и $\tilde{f}$. Рассмотрим призму $[x^1, x, \tilde{x}^1] \times \mathbb{R}^n(y)$; функции f и $\tilde{f}$ по цитированной лемме голоморфны в ней, а так как они совпадают в окрестности точек $x^1 + iy$ и $\tilde{x}^1 + iy$, то по теореме единственности они совпадают во всей призме.

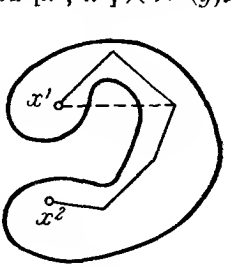


Рис. 110.

Таким образом, любая функция $f \in H(T)$ голоморфно продолжается в $\hat{T}$. Но $\hat{T}$ — выпуклая область и поэтому является областью голоморфности (п. 20). Следовательно, $\hat{T}$ служит оболочкой области T ▶

2. Области Рейнхарта. В п. 7 мы доказали, что любая функция f, голоморфная в полной области Рейнхарта [1]) D с центром в точке a, голоморфно продолжается в логарифмически выпуклую оболочку $\hat{D}_L$ этой области. Такое продолжение осуществляется при помощи разложения f в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{3}$$

область сходимости $\overset{\circ}{S}$ которого всегда представляет собой логарифмически выпуклую область (теорема 3 п. 7).

Докажем, что $\overset{\circ}{S}$ является областью голоморфности. Это вытекает из следующего более общего результата. Назовем D *областью сходимости последовательности функций* $f_\mu \in H(D)$, если эта последовательность равномерно сходится внутри D (т. е. на каждом компактном подмножестве D) и сужения f_μ на поликруг $U(z, r)$ с центром в произвольной точке $z \in D$ и радиусом $r = \rho(z, \partial D)$ нельзя продолжить до функций $\tilde{f}_\mu$,

[1]) Определение полной области Рейнхарта см. в п. 2.

голоморфных в поликруге $U(z, R)$, где $R>r$, так, чтобы последовательность $\tilde{f}_\mu$ равномерно сходилась внутри $U(z, R)$. Область D называется *областью сходимости*, если существует последовательность голоморфных в ней функций, для которой она является областью сходимости.

Теорема 4. *Область D тогда и только тогда является областью голоморфности, когда она является областью сходимости.*

◀ Необходимость условия тривиальна: если D — область голоморфности, то она является областью сходимости последовательности $f_\mu = f$, где f — функция, областью голоморфности которой D является.

Достаточность. Возьмем $K \Subset D$ и обозначим $\rho(K, \partial D) = r$; все будет доказано, если мы покажем, что $\rho(\hat{K}_{H(D)}, \partial D) \geqslant r$, т. е. что для любой точки $z \in \hat{K}_{H(D)}$

$$\rho(z, \partial D) \geqslant r. \tag{4}$$

Пусть G — связная компонента пересечения $U(z, r) \cap D$, содержащая z; сужения $f_\mu|_G$ по теореме об одновременном продолжении (п. 21) можно продолжить до функций $\tilde{f}_\mu$, голоморфных в поликруге $U(z, r)$. Покажем, что последовательность $\tilde{f}_\mu$ равномерно сходится внутри $U(z, r)$. Для этого возьмем любое число $r_1 < r$ и заметим, что по теореме 5 п. 21 для любых натуральных μ и ν имеем

$$\|\tilde{f}_\mu - \tilde{f}_\nu\|_{U(z, r_1)} \leqslant \|f_\mu - f_\nu\|_{K^{(r_1)}}.$$

Так как D является областью сходимости и r_1-раздутие $K^{(r_1)} \Subset D$, то последовательность f_μ сходится равномерно на $K^{(r_1)}$. По критерию Коши отсюда можно заключить, что она равномерно сходится и на $U(z, r_1)$, т. е. внутри $U(z, r)$.

Но по определению области сходимости из этого следует, что $U(z, r) \subset D$, т. е. что $\rho(z, \partial D) \geqslant r$ ▶

Теперь совсем просто выяснить вопрос об оболочках областей Рейнхарта.

Теорема 5. *Оболочкой голоморфности полной области Рейнхарта D является ее логарифмически выпуклая оболочка $\hat{D}_L$.*

◀ Мы видели, что каждая функция $f \in H(D)$ голоморфно продолжается в область сходимости $\overset{\circ}{S}_f$ своего ряда Тейлора, которая по теореме 4 является областью голоморфности. Следовательно, все функции класса $H(D)$ продолжаются в пересечение $\hat{D}_L$ всех областей $\overset{\circ}{S}_f$, $f \in H(D)$, являющееся логарифми-

чески выпуклой оболочкой области D и в то же время (по теореме 1 п. 22) — областью голоморфности. Таким образом, $\tilde{D}_L$ является оболочкой голоморфности области D ▶

Следствие. *Любая логарифмически выпуклая полная область Рейнхарта является областью сходимости некоторого степенного ряда.*

◀ Такая область D по только что доказанному является областью голоморфности, и, следовательно, существует функция $f \in H(D)$, не продолжаемая за пределы D. Тейлоровское разложение f имеет D своей областью сходимости ▶

Замечание. Если мы будем рассматривать вместо тейлоровских разложений разложения Лорана, то получим более общий результат: *оболочкой голоморфности любой относительно полной области Рейнхарта* (см. п. 8) *является ее логарифмически выпуклая оболочка.*

3. Области Хартогса[1]). Для простоты письма ограничимся областями с плоскостью симметрии $a_n = 0$ — это не уменьшает общности.

Теорема 6. *Оболочкой голоморфности полной области Хартогса* $D = \{z = ('z, z_n)\colon 'z \in 'D, |z_n| < r('z)\}$, *проекцией которой* $'D$ *служит область голоморфности в пространстве* $\mathbb{C}^{n-1}$, *является область Хартогса*

$$\tilde{D} = \{z = ('z, z_n)\colon \ 'z \in 'D, \ |z_n| < e^{V('z)}\}, \tag{5}$$

где $V('z)$ — *наилучшая плюрисупергармоническая мажоранта функции* $\ln r('z)$ *в области* $'D$.

◀ Область D_V вида (5), где V строго плюрисупергармоническая в $'D$ функция, голоморфно не расширяема в каждой своей граничной точке. В самом деле, пусть $\zeta \in \partial D_V$, $'\zeta \in \partial' D$ и $f('z)$ — голоморфная функция, для которой $'D$ является областью голоморфности. Эта f, как функция в D_V, очевидно, не продолжается голоморфно в точку ζ. Если же $\zeta \in \partial D_V$ и $'\zeta \notin \partial' D$, то в окрестности ζ область D_V задается неравенством $\varphi(z) = |z_n|^2 e^{-2V('z)} < 1$. Так как φ строго плюрисубгармонична в точке ζ (это проверяется непосредственными выкладками), то по теореме Леви — Кшоски (п. 24) область D_V голоморфно не расширяется в точке ζ. Отсюда по теореме Ока (которая будет доказана в гл. IV) мы заключаем, что D_V — область голоморфности.

Из теоремы об аппроксимации плюрисубгармонических функций (п. 25) мы получаем, что оболочка голоморфности $\tilde{D}$

[1]) Определение области Хартогса см. в п. 2.

области D содержится в пересечении всех D_V, где V — произвольная плюрисупергармоническая мажоранта функции $\ln r('z)$ в $'D$. С другой стороны, в п. 8 было доказано, что любая функция $f \in H(D)$ представляется в D своим рядом Хартогса

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu('z)\, z_n^\mu \tag{6}$$

и, следовательно, голоморфно продолжается в область сходимости этого ряда $G_f = \{('z, z_n)\colon 'z \in 'D,\ |z_n| < R_f('z)\}$. По теореме 1 п. 26 функция $\ln R_f$ плюрисупергармонична в $'D$, т. е. G_f является областью вида (5), где V — некоторая плюрисупергармоническая мажоранта функции $\ln r$.

Так как $\tilde{D}$ — пересечение всех G_f, где $f \in H(D)$, а это пересечение содержит $\bigcap D_V \supset \tilde{D}$, то теорема доказана ▶

Замечание. Если рассматривать разложения Хартогса — Лорана, то можно получить более общий результат: *оболочкой голоморфности области* $D = \{('z, z_n)\colon 'z \in 'D,\ r_1('z) < |z_n| < r_2('z)\}$, *проекцией которой* $'D$ *служит область голоморфности в пространстве* $\mathbb{C}^{n-1}$, *является область вида*

$$\tilde{D} = \{('z, z_n)\colon 'z \in 'D,\ e^{v_1('z)} < |z_n| < e^{V_2('z)}\}, \tag{7}$$

где v_1 — *наилучшая плюрисубгармоническая миноранта функции* $-\ln r_1$, *а* V_2 — *наилучшая плюрисупергармоническая мажоранта* $\ln r_2$ [1]).

В теореме 6 (и ее обобщении) существенно, что проекция $'D$ области D является областью голоморфности, — иначе области (5) и (7) будут не оболочками, а лишь голоморфными расширениями D. Заметим, что и не всякая область Хартогса имеет однолистную оболочку. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять в $\mathbb{C}^3$ область Хартогса, проекцией которой в $\mathbb{C}^2$ является область из примера в п. 20 с неоднолистной оболочкой.

28. Области наложения. Выше не раз отмечалась необходимость рассмотрения многолистных областей, аналогичных римановым поверхностям над комплексной плоскостью. Здесь мы изложим основные определения и некоторые результаты, связанные с этим понятием.

Каждое комплексное многообразие размерности n посредством локальных координат локально гомеоморфно отображается в пространство $\mathbb{C}^n$. Однако локальные координаты не

[1]) См. В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», М., 1964, стр. 217.

определены глобально на многообразии, т. е. не являются на нем функциями в смысле п. 9.

Мы выделим специальный класс многообразий условием существования глобально определенного непрерывного отображения в $\mathbb{C}^n$, всюду локально гомеоморфного. Такие многообразия вместе с заданными на них отображениями в $\mathbb{C}^n$ и будут предметом нашего изучения в этом пункте.

Определение. *Многообразием наложения над пространством* $\mathbb{C}^n$ (короче: *многообразием над* $\mathbb{C}^n$) мы будем называть пару (M, π), где M — многообразие, а $\pi\colon M \to \mathbb{C}^n$ — локально гомеоморфное отображение, которое называется *проектированием*. Если M связно, то (M, π) называется *областью наложения над* $\mathbb{C}^n$.

Это определение распространяет на пространственный случай определение римановой поверхности над $\mathbb{C}$ (см. п. 32 ч. I). Как и в плоском случае, проектирование позволяет перенести на многообразия понятия, введенные в $\mathbb{C}^n$. Так, мы назовем *поликругом* на (M, π) с центром в точке $P_0 \in M$ и радиусом r множество $\tilde{U}(P_0, r)$ точек $P \in M$, содержащее P_0, которое π гомеоморфно преобразует в точки поликруга $U(z^0, r)$, где $z^0 = \pi(P_0)$ — проекция точки P_0:

$$\tilde{U}(P_0, r) = \{P \in M:\ \pi(P) \in U(z^0, r),\ P_0 \in \tilde{U} \text{ и } \pi|_{\tilde{U}} \text{ гомеоморфно}\}. \quad (1)$$

Объединение всех поликругов на (M, π) с данным центром P_0 также является поликругом, который называется *максимальным*; радиус этого поликруга (конечный или бесконечный) называется *расстоянием* P_0 *до границы* M и обозначается через $\rho(P_0, \partial M)$. Под расстоянием до границы некоторого множества $N \subset M$ понимается $\inf\limits_{P \in N} \rho(P, \partial M)$.

Если M — комплексно аналитическое многообразие (см. п. 9), то на (M, π) можно ввести понятие голоморфной функции. Именно, функция $f\colon M \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной* на (M, π), если для любого поликруга $\tilde{U} = \tilde{U}(P, r)$ на (M, π), функция $f \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}$ голоморфна в поликруге $U(z, r) = \pi(\tilde{U})$. Очевидно, что это определение голоморфности совпадает с принятым в п. 9. В частности, на (M, π) будут голоморфными все локальные координаты: $z_\nu \circ \pi(P)$, которые коротко обозначаются через $\pi_\nu(P)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Кольцо всех функций, голоморфных в области (M, π) над $\mathbb{C}^n$, мы будем обозначать через $H(M)$.

Важный пример комплексно аналитического многообразия над $\mathbb{C}^n$ доставляет процесс *аналитического продолжения*

голоморфных функций. В случае нескольких переменных он проводится в точности так же, как в плоском случае, и мы ограничимся его кратким описанием. Будем исходить из какого-либо *элемента* (U, f), т. е. совокупности поликруга $U = U(z^0, r) \subset \mathbb{C}^n$ и голоморфной в этом поликруге функции $f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z - z^0)^k$. Точно так, как в случае одного переменного, определяется непосредственное аналитическое продолжение, аналитическое продолжение и *аналитическое продолжение вдоль пути* γ: $J \to \mathbb{C}^n$ (здесь $J = [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$, отображение γ задается n непрерывными комплексными функциями $z_\nu = z_\nu(t)$, $t \in J$). Доказывается, что аналитическое продолжение вдоль пути (если оно возможно) не зависит от выбора промежуточных точек, а также не меняется при замене пути γ гомотопным ему путем γ_1 с теми же концами, если вдоль всех путей γ_τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, осуществляющих гомотопию [1]), продолжение начального элемента (U, f) возможно. Приведем теперь основное

Определение. *Аналитической функцией* n комплексных переменных называется совокупность элементов (U_α, f_α), $\alpha \in A$ (A — некоторое множество индексов), каждый из которых получается из любого другого аналитическим продолжением вдоль какого-либо пути.

Построим теперь комплексно аналитическое многообразие над $\mathbb{C}^n$, связанное с аналитическими функциями. Рассмотрим множество $\mathfrak{R}$, точками которого служат пары $A = \{a, f_a\}$, где точка $a \in \mathbb{C}^n$ и функция

$$f_a(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k^{(a)} (z - a)^k \tag{2}$$

голоморфна в некотором поликруге U_a с центром в a, который для определенности будем считать поликругом сходимости ряда (2) [2]). Введем в $\mathfrak{R}$ топологию следующим образом: под *окрестностью* $U(A)$ точки $A \in \mathfrak{R}$ понимается совокупность точек $B = \{b, f_b\} \in \mathfrak{R}$ таких, что: 1) $\rho(a, b) < r$ и 2) элемент (U_b, f_b) является непосредственным аналитическим продолже-

---

[1]) Два пути γ_0 и γ_1 в $D \subset \mathbb{C}^n$ называются *гомотопными* (как пути с неподвижными концами), если существует непрерывное отображение $\gamma(t, \tau)$: $J \times J \to D$ такое, что $\gamma(t, 0) \equiv \gamma_0(t)$, $\gamma(t, 1) \equiv \gamma_1(t)$ и $\gamma(0, \tau) \equiv \gamma_0(0)$, $\gamma(1, \tau) \equiv \gamma_0(1)$; через γ_τ обозначается путь $\gamma(t, \tau)$: $J \to D$, где $\tau \in J$ фиксировано (ср. п. 16 ч. I).

[2]) Второй компонентой точки $A = \{a, f_a\}$ можно считать также р о с т о к аналитической функции в точке $a \in \mathbb{C}^n$, т. е. класс эквивалентности голоморфных в точке a функций по отношению: $f \sim g$, если $f \equiv g$ в некоторой окрестности a.

нием элемента (U_a, f_a). Мы предоставляем читателю доказать, что эта топология превращает $\mathfrak{R}$ в хаусдорфово пространство.

Определим теперь *проекцию* $\mathfrak{R}$ в $\mathbb{C}^n$ отображением

$$p\colon \{a, f_a\} \to a. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что p — локальный гомеоморфизм и что это отображение определяет на $\mathfrak{R}$ структуру комплексно аналитического многообразия комплексной размерности n (ср. п. 32 ч. I); мы будем называть $\mathfrak{R}$ *римановым многообразием*.

Таким образом, пара $(\mathfrak{R}, p)$ является комплексно аналитическим многообразием над $\mathbb{C}^n$ (окрестности $U(A)$ оказываются на нем поликругами). Примером голоморфной на $(\mathfrak{R}, p)$ функции является функция

$$f\colon A \to f_a(a), \tag{4}$$

сопоставляющая точке $A = \{a, f_a\}$ свободный член ряда (2).

Риманово многообразие $\mathfrak{R}$, очевидно, несвязно. Однако подмножества $\mathfrak{R}_0$ его точек $\{a, f_a\}$ таких, что элементы (U_a, f_a) принадлежат одной аналитической функции (т. е. являются аналитическим продолжением друг друга вдоль какого-либо пути), связны. Такие множества являются областями в $\mathfrak{R}$; мы будем называть их *римановыми поверхностями*. Очевидно, каждой области $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$ соответствует аналитическая функция и, обратно, каждой аналитической функции соответствует область $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$.

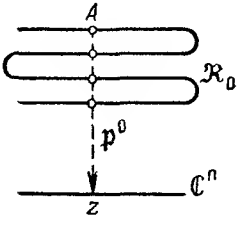


Рис. 111.

Пусть $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$ — какая-либо риманова поверхность; через p^0 и f_0 обозначим соответственно сужения на $\mathfrak{R}_0$ отображений (3) и (4). Локально гомеоморфное отображение p^0 не обязано быть в целом гомеоморфизмом, поэтому оно может переводить в одну точку $z \in \mathbb{C}^n$ несколько точек $A \subset \mathfrak{R}_0$ (рис. 111). Функция f_0, однозначная на $(\mathfrak{R}_0, p^0)$, будет тогда многозначной, если ее рассматривать в зависимости от z. Таким образом, и в случае многих переменных мы можем рассматривать (многозначные) аналитические функции как (однозначные) голоморфные функции, если вместо областей в $\mathbb{C}^n$ перейдем к областям над $\mathbb{C}^n$, т. е. римановым поверхностям.

Кроме областей $(\mathfrak{R}_0, p^0)$ рассматриваются и другие модели римановых поверхностей, эквивалентные этим областям (понятие эквивалентности мы сейчас определим). Мы будем далее заниматься расширением областей наложения и, чтобы можно было сравнивать между собой различные модели, введем

понятия вложения многообразий и сужения функций, связав их с возможностью отображения одного многообразия на другое.

Определение 1. Пусть даны два многообразия (M_1, π^1) и (M_2, π^2) над $\mathbb{C}^n$; если существует такое непрерывное отображение φ: $M_1 \to M_2$, что на M_1

$$\pi^1 = \pi^2 \circ \varphi, \tag{5}$$

то говорят, что первое многообразие (*слабо*) φ-*вложено* во второе, и пишут: $(M_1, \pi^1) \underset{\varphi}{\subset} (M_2, \pi^2)$. Если при этом φ является взаимно однозначным отображением M_1 в M_2, то говорят, что (M_1, π^1) *сильно* φ-*вложено* в (M_2, π^2). Если еще φ — гомеоморфизм M_1 на M_2, то (M_1, π^1) и (M_2, π^2) называются *эквивалентными*.

Это определение обобщает обычное понятие включения: если $M_1 \subset M_2$ в обычном смысле, то $\pi^1 = \pi^2|_{M_1}$ является сужением функции π^2 на M_1, и в качестве φ можно принять естественное отображение вложения φ: $M_1 \to M_2$, где φ переводит каждую точку $P \in M_1$ в ту же точку P, рассматриваемую как точка M_2[1]). Очевидно, что эквивалентные многообразия (M_1, π^1) и (M_2, π^2) сильно вложены друг в друга (одно — посредством φ, другое — φ^{-1}). В случае слабого вложения $(M_1, \pi^1) \underset{\varphi}{\subset} (M_2, \pi^2)$ первое многообразие может оказаться «более разветвленным», чем второе. Так, риманова поверхность функции $w = \sqrt[4]{z}$ над $\mathbb{C}^1$ оказывается слабо вложенной в риманову поверхность $w = \sqrt{z}$ (в качестве φ надо принять отображение, склеивающие пары точек первой поверхности, в которых $\sqrt{z}$ принимает одинаковые значения). Всякое многообразие (M, π) над $\mathbb{C}^n$ является π-вложенным в $\mathbb{C}^n$.

Обобщая понятие функции, голоморфной на многообразии, введем понятие голоморфного отображения многообразий. Пусть даны два комплексно аналитических многообразия (M_1, π^1) и (M_2, π^2) соответственно над пространствами $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$; отображение φ: $M_1 \to M_2$ называется *голоморфным*, если оно непрерывно и все функции

$$z_\nu \circ \pi^2 \circ \varphi(P), \qquad \nu = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

голоморфны на (M_1, π^1). Если еще φ — гомеоморфизм M_1 на M_2 (тогда непременно $m = n$) и обратное отображение φ^{-1}: $M_2 \to M_1$ также голоморфно, то φ называется *голоморфным изоморфиз-*

[1]) Так как отображение вложения $\varphi(P) \equiv P$ взаимно однозначно, то обычное включение является сильным φ-вложением.

мом (короче, *голоморфизмом*) или *биголоморфным* отображением.

Отметим, что если одно комплексно аналитическое многообразие φ-вложено в другое такое же, то отображение вложения $\varphi\colon M_1 \to M_2$ непременно является голоморфным. В самом деле, по определению вложения функции (6)

$$z_\nu \circ \pi^2 \circ \varphi(P) = z_\nu \circ \pi^1(P),$$

а последние голоморфны, ибо (M_1, π^1) — комплексно аналитическое многообразие. Эквивалентность многообразий в этом случае сводится к голоморфной эквивалентности.

Определение 2. Пусть $(M_1, \pi^1) \underset{\varphi}{\subset} (M_2, \pi^2)$ и $f_2\colon M_2 \to \mathbb{C}$ — функция на втором многообразии; функцию $f_1\colon M_1 \to \mathbb{C}$ будем называть φ-*сужением* функции f_2 на первое многообразие (обозначение: $f_1 = f_2|^{\varphi}_{M_1}$), если на M_1

$$f_1 = f_2 \circ \varphi; \tag{7}$$

функцию f_2 тогда будем называть φ-*расширением* f_1.

Если $M_1 \subset M_2$, а φ — естественное отображение вложения, то мы имеем обычное сужение $f_1 = f_2|_{M_1}$.

Покажем, что построенное выше риманово многообразие $(\mathfrak{R}, \mathfrak{p})$ является «универсальной моделью» многообразий над $\mathbb{C}^n$, т. е. что любое комплексно аналитическое многообразие над $\mathbb{C}^n$ можно φ-вложить в риманово многообразие. Точнее, имеет место

Теорема 1. *Пусть D — связное комплексно аналитическое многообразие, (D, π) — область наложения над $\mathbb{C}^n$ и $f\colon D \to \mathbb{C}$ — голоморфная на (D, π) функция; существуют связная компонента $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$ и отображение $\varphi\colon D \to \mathfrak{R}_0$ такие, что*

$$(D, \pi) \underset{\varphi}{\subset} (\mathfrak{R}_0, \mathfrak{p}^0), \quad f = f_0|^{\varphi}_{D}, \tag{8}$$

где $\mathfrak{p}^0 = \mathfrak{p}|_{\mathfrak{R}_0}$ и $f_0 = f|_{\mathfrak{R}_0}$ — сужения на $\mathfrak{R}_0$ отображений (3) *и* (4).

◀ Для любой точки $P \in D$ обозначим через $\varphi(P) = A$ совокупность точки $a = \pi(P) \in \mathbb{C}^n$ и голоморфной функции $f_a(z)$ (разложения в ряд Тейлора с центром в a функции $f \circ \pi^{-1}(z)$). Пусть $\varphi(D)$ — образ области D при построенном отображении; так как φ непрерывно, а D связно, то $\varphi(D) \subset \mathfrak{R}_0$ — связной компоненте $\mathfrak{R}$. По построению $\pi = \mathfrak{p}^0 \circ \varphi$ и $f = f_0 \circ \varphi$, так что (8) имеет место ▶

Теперь мы хотим ввести понятие многолистных областей голоморфности. Определим их как области над $\mathbb{C}^n$, в которых существует голоморфная функция, не расширяемая на области, неэквивалентные данной. Иными словами, примем такое

Определение. Область наложения (D, π) называется *областью голоморфности*, если существует функция $f \in H(D)$, обладающая следующим свойством: из того, что некоторая область $(D_1, \pi^1) \underset{\varphi}{\supset} (D, \pi)$ и функция $f_1 \in H(D_1)$ является φ-расширением функции f, следует, что (D_1, π^1) эквивалентна (D, π) (т. е. что φ взаимно однозначно отображает D на D_1).

В этом определении, по существу, используется, что эквивалентность областей наложения сводится к голоморфной эквивалентности, и постулируется инвариантность областей голоморфности при биголоморфных отображениях (для однолистных областей голоморфности это свойство было доказано в п. 22).

Важные примеры многолистных областей голоморфности представляют максимальные связные компоненты риманова многообразия $(\mathfrak{R}, \mathfrak{p})$. Для доказательства нам понадобится

Лемма. *Если отображение вложения* φ *области* (D, π) *над* $\mathbb{C}^n$ *в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку, то оно тождественно.*

◀ Множество всех неподвижных точек отображения φ замкнуто (ибо φ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства в себя) и по условию непусто. Покажем, что оно открыто. Пусть P_0 — неподвижная точка φ и $\tilde{U} = \tilde{U}(P_0, r)$ — поликруг на (D, π). Обозначим $\tilde{V} = \tilde{U} \cap \varphi^{-1}(\tilde{U})$; это — открытое множество на D (в силу непрерывности φ), содержащее P_0, причем проекция π гомеоморфна на $\tilde{V}$. По определению φ-вложения на D имеем $\pi(P) = \pi \circ \varphi(P)$, а так как на $\tilde{V}$ отображение π гомеоморфно, то отсюда следует, что $\varphi(P) = P$ при $P \in \tilde{V}$, т. е. все точки из $\tilde{V}$ неподвижные. Итак, множество неподвижных точек отображения φ непусто и одновременно замкнуто и открыто; так как D связно, то это множество совпадает с D ▶

Теорема 2. *Любая область* $(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{p}^0)$ *риманова многообразия* $(\mathfrak{R}, \mathfrak{p})$, *где* $\mathfrak{R}_0$ — *максимальная связная компонента* $\mathfrak{R}$, *является областью голоморфности.*

◀ Функция $f_0 = f|_{\mathfrak{R}_0}$ голоморфна на $(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{p}^0)$ и $(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{p}^0) \underset{\varphi}{\subset} (D, \pi)$, причем функция f_1 голоморфна на (D, π) и $f_1|^{\varphi}_{\mathfrak{R}_0} = f_0$; надо показать, что в этой ситуации φ является взаимно однозначным отображением $\mathfrak{R}_0$ на D. Так как $f_1 \in H(D)$, то по теореме 1 существует ψ-вложение (D, π) в многообразие $(\mathfrak{R}, \mathfrak{p})$, для которого $f|^{\psi}_{D} = f_1$. По построению этого ψ-вложения для $A \in \mathfrak{R}_0$ имеем $\psi \circ \varphi(A) = A$ и $\varphi \circ \psi[\varphi(A)] = \varphi[\psi \circ \varphi(A)] = \varphi(A)$, следовательно, отображение $\varphi \circ \psi$ имеет в D неподвижные точки. По лемме $\varphi \circ \psi(P) \equiv P$ всюду в D, откуда видно, что φ взаимно однозначно отображает $\mathfrak{R}_0$ на D ▶

Чтобы сформулировать необходимые и достаточные условия для областей голоморфности над $\mathbb{C}^n$, условимся называть область (D, π) *голоморфно отделимой*, если для любых двух различных точек $P_1, P_2 \in D$ найдется функция $f \in H(D)$, разделяющая эти точки, т. е. такая, что $f(P_1) \neq f(P_2)$.

Для однолистных областей условие голоморфной отделимости выполняется автоматически, ибо в качестве разделяющей функции всегда можно взять одну из координат. Для многолистных областей это не так: вот соответствующий пример. Пусть $\Gamma = \{|z_1| = 1,\ |z_2| = 1\}$ — тор в $\mathbb{C}^2$ и $D_0 = \mathbb{C}^2 \setminus \Gamma$; возьмем область (D, π) над $\mathbb{C}^2$, диаграмма Рейнхарта которой изображена на рис. 112. Эта диаграмма представляет собой лежащую над первым квадрантом плоскости $\zeta = |z_1| + i|z_2|$ часть двулистной римановой поверхности функции $\sqrt{\zeta - (1+i)}$ с точками ветвления над $\zeta = 1 + i$ и $\zeta = \infty$.

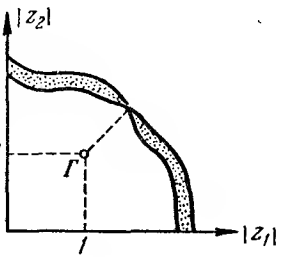


Рис. 112.

Рассмотрим произвольную функцию f, голоморфную на (D, π). Ее значения на любом из двух «листов» (D, π) голоморфны вне шара $\{|z| \leqslant \sqrt{2}\}$, ибо многообразие ветвления (тор Γ) лежит на сфере $\{|z| = \sqrt{2}\}$, и вне шара область не разветвлена. По теореме Осгуда — Брауна (п. 18) эти значения продолжаются до целых функций, а так как на Γ они должны совпадать, то они совпадают тождественно (см. задачу 15 к гл. I). Таким образом, значения f в точках различных листов области (D, π), лежащих над одной точкой (z_1, z_2), должны совпадать: точки (D, π) с одинаковой проекцией не отделимы голоморфно.

Теорема 3 (Картан — Туллен). *Область наложения (D, π) тогда и только тогда является областью голоморфности, когда она голоморфно выпукла* [1]) *и голоморфно отделима.*

Мы не будем подробно излагать доказательство, опишем лишь изменения, которые нужно внести в многолистном случае.

◀ Необходимость. Доказательство теоремы об одновременном продолжении (п. 21) без существенных изменений

---

[1]) Определение голоморфной выпуклости переносится на многолистные области без изменений. Например, его можно сформулировать в виде условия $\rho(K, \partial D) = \rho(\widehat{K}_H, \partial D)$, где K — произвольное компактное подмножество D, а $\widehat{K}_H$ — его оболочка относительно класса функций, голоморфных на (D, π).

переносится на многомерный случай [1]), а из этой теоремы вытекает голоморфная выпуклость области голоморфности (D, π).

Для доказательства голоморфной отделимости возьмем на (D, π) функцию f, описанную в определении области голоморфности, и по теореме 1 построим соответствующее ей φ-вложение (D, π) в риманово многообразие $(\mathfrak{R}, p)$. Из того же определения следует, что отображение φ взаимно однозначно, т. е. что $\varphi(P_1) \neq \varphi(P_2)$ для различных точек $P_1, P_2 \in D$. Пусть $\varphi(P_\nu) = A_\nu (\nu = 1, 2)$; из (8) и (7) имеем $f(P_\nu) = f_0 \circ \varphi(P_\nu) = f_0(A_\nu)$, а так как $A_1 \neq A_2$, то из определения функции f_0 следует, что в точках P_1 и P_2 значения функции f или какой-либо ее производной различны (в противном случае $A_1 = A_2$). Это и означает голоморфную отделимость (D, π).

Достаточность. Пусть $K_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ — компактное исчерпывание области D (напомним, что D является многообразием, а по нашему определению в п. 9 каждое многообразие счетно исчерпываемо). Пользуясь голоморфной выпуклостью D, мы можем считать, что $K_\nu = (\widehat{K_\nu})_{H(D)}$. Покроем ∂K_ν конечным числом поликругов и в пересечении каждого из них с $D \setminus K_\nu$ возьмем по точке $P_{\nu i} (i = 1, \ldots, k_\nu)$; через $f_{\nu i}$ обозначим функцию из $H(D)$ такую, что

$$f_{\nu i}(P_{\nu i}) = \nu, \quad \| f_{\nu i} \|_{K_\nu} < 2^{-\nu - i} \quad \text{и} \quad f_{\nu i}(P_{\nu j}) = 0, \ j \neq i.$$

Функция $f = \sum_{\nu, i} f_{\nu i} \in H(D)$, и

$$|f(P_{\nu i})| \geqslant \nu - 1. \tag{9}$$

Пользуясь голоморфной отделимостью, можно исправить функцию f так, чтобы она, оставаясь голоморфной в (D, π) и удовлетворяя неравенству (9), имела в любых двух различных точках P, $P' \in D$ с одинаковой проекцией $\pi(P') = \pi(P)$ различные элементы (о том, как осуществить такое исправление, см. книгу Б. А. Фукса [2]), стр. 193).

Покажем, что (D, π) является областью голоморфности (исправленной) функции f. Пусть имеется φ-расширение функции f в область (D_1, π^1); требуется доказать, что φ взаимно однозначно отображает D на D_1. Если $\varphi(P') = \varphi(P)$, то согласно (5) $\pi(P') = \pi(P)$, а согласно (7) $f(P') = f(P)$. Отсюда по построению f вытекает, что $P' = P$, т. е. φ взаимно однозначно. Кроме того, $\varphi(D) = D_1$, ибо в противном случае область $\varphi(D)$

---

[1]) Производные функции f в точке $P \in (D, \pi)$ можно определить при помощи дифференцирования степенных рядов для $f \circ \pi^{-1}(z)$.

[2]) Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1962.

имела бы в D_1 граничную точку, а в этой точке функция $f_1 = f \circ \varphi$ в силу неравенств (9) не может быть голоморфной ▶

Замечание. К. Ока доказал в 1953 г., что всякая голоморфно выпуклая область над $\mathbb{C}^n$ голоморфно отделима. Поэтому условия в теореме 3 не являются независимыми.

Области наложения (D, π) над $\mathbb{C}^n$, которые являются областями голоморфности, мы будем называть еще *многообразиями Штейна*. Заметим, что обычно этот термин трактуется шире: многообразием Штейна называется любое комплексно аналитическое многообразие X комплексной размерности n, обладающее следующими тремя свойствами: 1) X голоморфно выпукло, 2) X голоморфно отделимо, 3) для любой точки $P \in X$ существует n функций f_ν, голоморфных на X, которые образуют локальные координаты в этой точке.

29. Многолистные оболочки голоморфности. В заключение этой главы мы хотим описать процесс построения оболочек голоморфности для произвольных областей наложения (в частности, областей $D \subset \mathbb{C}^n$). Такая оболочка является областью голоморфности над $\mathbb{C}^n$, в которую голоморфно продолжается (в смысле, принятом в предыдущем пункте) любая функция, голоморфная в данной области. Пример, который был приведен в начале главы, показывает, что задача построения оболочек голоморфности в классе однолистных областей в общем случае неразрешима. Здесь мы покажем, что эта задача всегда разрешима в классе областей наложения.

Пользуясь свободой выбора модели в определении областей наложения, мы будем строить оболочки из несколько необычного материала — линейных мультипликативных функционалов над кольцом голоморфных функций.

Пусть дана область наложения (D, π) над $\mathbb{C}^n$ (в частности, однолистная область $D \subset \mathbb{C}^n$, если π — естественное отображение вложения). Обозначим через $\hat{D}$ совокупность всех не тождественно равных нулю функционалов $h: H(D) \to \mathbb{C}$, непрерывных в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах D, а также линейных и мультипликативных, т. е. таких, что

$$h(f_1 + f_2) = h(f_1) + h(f_2), \qquad h(f_1 \cdot f_2) = h(f_1) \cdot h(f_2) \tag{1}$$

для всех $f_1, f_2 \in H(D)$[1]). Множество $\hat{D}$ непусто: оно содержит все функционалы $h_P(f) = f(P)$, ставящие каждой функции $f \in H(D)$ ее значение в произвольной фиксированной точке $P \in D$.

[1]) Функционалы $h \in \hat{D}$ являются гомоморфизмами кольца $H(D)$ в кольцо комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Мы хотим ввести на $\hat{D}$ структуру многообразия наложения над $\mathbb{C}^n$. Для этого прежде всего определим проекцию — отображение $\hat{D}$ в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $\pi_\nu(P) = z_\nu \circ \pi(P)$ координаты на (D, π); так как они принадлежат $H(D)$, то для любого $h \in \hat{D}$ определены значения $\hat{\pi}_\nu = h(\pi_\nu)$. Мы положим

$$\hat{\pi}(h) = (h(\pi_1), \ldots, h(\pi_n)) \tag{2}$$

и тем самым построим отображение $\hat{\pi}\colon \hat{D} \to \mathbb{C}^n$.

Докажем, что $\hat{\pi}$ локально взаимно однозначно. Нам понадобится

Лемма. *Для любого $h \in \hat{D}$ существует множество $K \Subset D$ такое, что*

$$|h(f)| \leqslant \|f\|_K \tag{3}$$

для всех $f \in H(D)$.

◀ Пусть такого множества не существует. Тогда найдется последовательность компактов $K_\nu \subset D$ таких, что $K_\nu \subset K_{\nu+1}$, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = D$, и функций $f_\nu \in H(D)$ таких, что $|h(f_\nu)| > \|f_\nu\|_{K_\nu}$. На основании этих неравенств можно выбрать достаточно высокие степени $g_\nu = \left(\frac{f_\nu}{h(f_\nu)}\right)^{p_\nu}$ так, чтобы $\|g_\nu\|_{K_\nu} < \frac{1}{2^\nu}$ для всех $\nu = 1, 2, \ldots$. Ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве D, и по теореме Вейерштрасса его сумма $g \in H(D)$. По свойствам гомоморфизма h мы должны иметь $h(g) = \sum_{\nu=1}^{\infty} h(g_\nu)$, но так как $h(g_\nu) = 1$ для всех ν, то последний ряд расходится. Противоречие доказывает лемму ▶

Фиксируем $h \in \hat{D}$ и построим степенной ряд

$$L_z(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h(D^k f)(z - \hat{\pi}(h))^k, \tag{4}$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — целочисленный вектор и

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|}}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} f \circ \pi^{-1}(z).$$

Согласно лемме найдем для h множество $K \Subset D$ и возьмем произвольное число $r < \rho(K, \partial D)$; по (3) и неравенствам Коши будем тогда иметь

$$|h(D^k f)| \leqslant \|D^k f\|_K \leqslant \frac{k!}{r^{|k|}} \|f\|_{K(r)}, \tag{5}$$

где $K^{(r)}$ — раздутие множества K. Отсюда видно, что ряд (4) сходится для всех z из поликруга $U(\hat{\pi}(h), r)\subset\mathbb{C}^n$.

Если еще фиксировать z, то L_z можно рассматривать как функционал над кольцом $H(D)$. Он, очевидно, линеен, а так как из (5) для любой $f\in H(D)$ вытекает оценка

$$|L_z(f)|\leqslant\|f\|_{K^{(r)}}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{r}{r-|z_\nu-\hat{\pi}_\nu(h)|} \tag{6}$$

(см. доказательство теоремы 5 из п. 21), то он и непрерывен. Пользуясь мультипликативностью h и правилом Лейбница дифференцирования произведения, легко доказать также, что он мультипликативен. Таким образом, $L_z\in\hat{D}$ и тем самым определено отображение

$$L_z\colon\quad U(\hat{\pi}(h), r)\to\hat{D}. \tag{7}$$

Применяя формулу (4) к функциям $f=\pi_\nu(\nu=1, \ldots, n)$, мы найдем $L_z(\pi_\nu)=h(\pi_\nu)+h(1)(z_\nu-h(\pi_\nu))=z_\nu$, т. е. $\hat{\pi}(L_z)\equiv z$ для всех $z\in U(\hat{\pi}(h), r)$. Но это означает, что отображение (7) локально обращает (2), и локальная взаимная однозначность отображения $\hat{\pi}$ доказана.

Нам нужно доказать, что пара $(\hat{D}, \hat{\pi})$ является многообразием наложения над $\mathbb{C}^n$. Для этого нам остается ввести на множестве $\hat{D}$ топологию, превращающую его в хаусдорфово пространство, и убедиться в том, что $\hat{\pi}$ и его локальное обращение L_z являются в этой топологии непрерывными отображениями. Топологию в $\hat{D}$ мы перенесем из $\mathbb{C}^n$ при помощи отображения L_z. Именно, *поликругом* на $\hat{D}$ с центром в точке h и радиусом r мы назовем образ $\hat{U}(h, r)$ поликруга $U(\hat{\pi}(h), r)\subset\mathbb{C}^n$ при отображении (7); он определен при любом $h\in\hat{D}$ и $r<\rho(K, \partial D)$, где K — множество, соответствующее функционалу h по лемме. Множество $\Omega\subset\hat{D}$ мы назовем *открытым*, если для любой точки $h\in\Omega$ существует такое число $r>0$, что поликруг $\hat{U}(h, r)\subset\Omega$. Остается доказать, что любой поликруг $\hat{U}(h, r)\subset\hat{D}$ является открытым множеством. Пусть $\hat{\pi}(h)=0$, т. е. соответствующий функционал

$$L_z(f)=\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{1}{k!}h(D^k f)z^k \tag{8}$$

(это предположение не ограничивает общности). Мы должны доказать, что для любого $h'\in\hat{U}(h, r)$ существует поликруг $\hat{U}(h', r')\subset\hat{U}(h, r)$. Точка $z'=\hat{\pi}(h')\in U(0, r)$, и, значит, найдется

число $r'>0$ такое, что $U(z',\ r')\subset U(0,\ r)$. Построим по h' функционал

$$L'_z(f)=\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{1}{k!}h'(D^kf)(z-z')^k \tag{9}$$

и сравним его с (8). Так как ряд (9) сходится в $U(z',\ r')$, то по формуле Тейлора

$$L_z(f)=\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{1}{k!}D^kL_z(f)|_{z=z'}(z-z')^k. \tag{10}$$

Но дифференцированием ряда (8) для любого $l=(l_1,\ \ldots,\ l_n)$ получаем

$$D^lL_z(f)=\sum_{|k|\geqslant|l|}\frac{k\ldots(k-l+1)}{k!}h(D^kf)z^{k-l}=\sum_{|j|\geqslant 0}\frac{1}{j!}h(D^{j+l}f)z^j$$

(мы заменили индекс суммирования k индексом $j=k-l$), откуда видно, что $D^lL_z(f)=L_z(D^lf)$. Пользуясь этим соотношением, мы можем переписать (10) в виде

$$L_z(f)=\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{1}{k!}L_{z'}(D^kf)(z-z')^k.$$

Так как $L_z=\hat{\pi}^{-1}(z)$, то $L_{z'}(D^kf)=h'(D^kf)$ и, следовательно, последнее разложение совпадает с (9), т. е. $L'_z(f)=L_z(f)$ для любой $f\in H(D)$. Отсюда и следует, что $\hat{U}(h',\ r')\subset\hat{U}(h,\ r)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для любой области наложения $(D,\ \pi)$ над $\mathbb{C}^n$ можно построить многообразие наложения $(\hat{D},\ \hat{\pi})$, где $\hat{D}$ — пространство всех не тождественно равных нулю линейных и мультипликативных функционалов над кольцом $H(D)$, а проекция $\hat{\pi}\colon \hat{D}\to\mathbb{C}^n$ определяется по формуле* (2).

Заметим, что отображение $\hat{\pi}$ задает на $\hat{D}$ локальные координаты, в которых $\hat{D}$ можно рассматривать как комплексно аналитическое многообразие.

Построим теперь вложение $(D,\ \pi)$ в $(\hat{D},\ \hat{\pi})$ в смысле определения 1 предыдущего пункта. Для этого рассмотрим в $\hat{D}$ функционалы специального вида, которые каждой функции $f\in H(D)$ ставят в соответствие ее значение в фиксированной точке $P\in D$:

$$h_P(f)=f(P). \tag{11}$$

Тем самым определено отображение

$$\Phi\colon\ P \to h_P \tag{12}$$

области D в $\hat{D}$, очевидно, непрерывное. Но по построению $\hat{\pi} \circ \Phi(P) = \hat{\pi}(h_P) = \pi(P)$, что и требуется в определении вложения.

Заметим, что отображение Φ локально взаимно однозначно (ибо из соотношения $\hat{\pi} \circ \Phi = \pi$ следует, что локально $\Phi = (\hat{\pi})^{-1} \circ \pi$) и голоморфно (как отображение вложения комплексно аналитических многообразий; см. предыдущий пункт).

Обозначим через $\tilde{D}$ связную компоненту, содержащую $\Phi(D)$, и через $\tilde{\pi}$ сужение $\hat{\pi}$ на $\tilde{D}$, тогда $(\tilde{D}, \tilde{\pi})$ будет областью над $\mathbb{C}^n$.

Теорема 2. *Область наложения* $(\tilde{D}, \tilde{\pi})$ *является оболочкой голоморфности* (D, π).

◀ Любая функция $f \in H(D)$ расширяется (в смысле определения 2 предыдущего пункта) до функции $\tilde{f} \in H(\tilde{D})$. В самом деле, при фиксированной f функционалы $h \in \tilde{D}$ определяют функцию $\tilde{f}\colon\ h \to h(f)$. Эта функция принадлежит $H(\tilde{D})$, ибо $\tilde{f}$ в окрестности h разлагается в степенной ряд $L_z(f)$. Так как, в частности, $\tilde{f} \circ \Phi(P) = \tilde{f}(h_P) = h_P(f) = f(P)$, то $\tilde{f}$ является Φ-расширением f.

Остается доказать, что $(\tilde{D}, \tilde{\pi})$ является областью голоморфности, а для этого по теореме 3 предыдущего пункта достаточно убедиться в том, что $(\tilde{D}, \tilde{\pi})$ голоморфно отделима и голоморфно выпукла. Голоморфная отделимость доказывается так: если $h_1 \neq h_2$, то существует функция $f \in H(D)$ такая, что $h_1(f) \neq h_2(f)$; расширение этой функции $\tilde{f}(h) = h(f)$ и есть функция из $H(\tilde{D})$, разделяющая точки h_1 и h_2.

Чтобы доказать голоморфную выпуклость $(\tilde{D}, \tilde{\pi})$, возьмем произвольное множество $K \Subset \tilde{D}$ и обозначим $\rho(K, \partial\tilde{D}) = r$. По теореме об одновременном продолжении п. 21 (она без изменений переносится на области наложения) любая $\tilde{f} \in H(\tilde{D})$ голоморфно продолжается в поликруг $\hat{U}(h, r)$ с центром в любой точке h, принадлежащей оболочке $\hat{K}_{H(\tilde{D})}$ множества K относительно класса $H(\tilde{D})$. Это означает, что степенной ряд, представляющий функцию $\tilde{f} \circ L_z = L_z(f)$, сходится в поликруге $U = U(\tilde{\pi}(h), r)$. Но по построению области $\tilde{D}$ она содержит образ U при отображении L_z, т. е. $\hat{U}(h, r) \subset \tilde{D}$ и, значит, $\rho(h, \partial\tilde{D}) \geqslant r$. Отсюда следует, что $\rho(\hat{K}_{H(\tilde{D})}, \partial\tilde{D}) \geqslant r$, а это и означает голоморфную выпуклость $(\tilde{D}, \tilde{\pi})$ ▶

ЗАДАЧИ

1. Пусть U — бикруг $\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$ и E — подмножество единичного круга в $\mathbb{C}$, имеющее 0 своей предельной точкой. Предположим, что функция $f(z_1, z_2)$ ограничена в U, голоморфна по z_1 при каждом z_2, $|z_2|<1$, и голоморфна по z_2 при каждом $z_1 \in E$. Доказать, что f голоморфна в U.

2. Пусть функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ по каждой координате $x_1, \ldots, x_{2n}$ и в некотором шаре $V \subset D$ голоморфна по комплексным координатам $z_\nu = x_\nu + ix_{\nu+n}$, $\nu = 1, \ldots, n$. Доказать, что f голоморфна в D (относительно координат z_ν).

3. Доказать, что всякая функция, аналитическая по действительным координатам в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и плюригармоническая в некотором шаре $V \subset D$, плюригармонична во всей D.

4. Доказать, что всякая функция, гармоническая в области $D \subset \mathbb{C}^n$, плюрисубгармоническая в некотором шаре $V \subset D$, плюригармонична в D. Привести пример функции, аналитической по всем действительным координатам, плюрисубгармонической в полупространстве $x_1 > 0$ и плюрисупергармонической при $x_1 < 0$.

5. Описать области $D \subset \mathbb{C}^n$, выпуклые относительно класса $\mathcal{F}$, состоящего из одной функции $f(z) = z_n$.

6. Область Рейнхарта с центром $a = 0$ тогда и только тогда логарифмически выпукла, когда она выпукла относительно класса мономов $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$, где α_ν — целые неотрицательные числа.

7. Если компакт K связен, то его полиномиально выпуклая оболочка $\hat{K}_P$ тоже связна.

8. Если X и Y — непересекающиеся связные полиномиально выпуклые множества и $X \cup Y$ не полиномиально выпукло, то $(\widehat{X \cup Y})_P$ связно.

9. Полиномиальный полиэдр Вейля является полиномиально выпуклым множеством.

10. Всякий компакт K, расположенный в действительном подпространстве $\mathbb{C}^n$, является полиномиально выпуклым.

11. График комплексной функции φ, гармонической в окрестности единичного круга, — множество $\{(z, \varphi(z)): |z| \leqslant 1\}$ — является полиномиально выпуклым в $\mathbb{C}^2$.

12. Пусть K — график функции $\varphi(z) = |z|$ над единичным кругом $|z| \leqslant 1$. Доказать, что для любой области $D \supset K$ и любого класса $\mathcal{F}$ голоморфных в D функций равенство $K = \hat{K}_{\mathcal{F}}$ невозможно.

13. Область сходимости ряда из полиномов (соответственно рациональных функций) является полиномиально (соответственно рационально) выпуклой.

14. Рационально выпуклая оболочка $\hat{K}_R$ компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ совпадает со множеством

$$\{z \in \mathbb{C}^n: p(z) \in p(K) \text{ для всех полиномов } p\}.$$

15. Доказать, что полиномиально выпуклая оболочка множества $M \subset \mathbb{C}^2$, состоящего из окружности без малой дуги $\{z_1 = e^{it}, \delta \leqslant t \leqslant 2\pi; z_2 = 0\}$ и из цилиндра $\left\{z_1 = e^{it}, 0 \leqslant t \leqslant \delta; |z_2| = \frac{1}{4}\right\}$, содержит круг $\{|z_1| \leqslant 1, z_2 = 0\}$.

16. Если функция f голоморфна в полиномиально выпуклой оболочке $\hat{K}_P$ компакта K, то $\partial f(\hat{K}_P) \subset f(K)$.

17. Доказать, что область $D = \left\{z \in \mathbb{C}^2: |z_1|^2 + x_2^2 > \rho^2\right\}$ не является областью голоморфности.

18. Доказать, что компакт $K = \{|z_1| \leqslant 1,\ |z_2| \leqslant |z_1|\}$ нельзя представить как предел убывающей последовательности областей голоморфности.

19. Пусть D_1 и D_2 — ограниченные области на плоскости, звездные относительно начала координат, и $K = \{tz\colon 0 \leqslant t \leqslant 1,\ z \in \partial D_1 \times \partial D_2\}$. Доказать, что всякая функция, голоморфная в окрестности K, продолжается до функции, голоморфной в окрестности $\overline{D}_1 \times \overline{D}_2$.

20. Пусть M — дважды гладкое многообразие в $\mathbb{C}^n$, не имеющее аналитических касательных плоскостей (отсюда вытекает, что действительная размерность M не выше n). Доказать, что M является пределом некоторой убывающей последовательности областей голоморфности.

21. Функция $u\colon D \to \mathbb{R}$ класса C^2 тогда и только тогда плюригармонична в области $D \subset \mathbb{C}^n$, когда для всех $z \in D$ и всех $\alpha_\nu \in \mathbb{C}$

$$H[u] = \sum_{\mu,\ \nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_\mu\, \partial \bar{z}_\nu}\, \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu = 0.$$

22. Определение субгармоничности без всяких изменений переносится на случай пространства $\mathbb{R}^m$, если мажорантой считать гармоническую функцию $2n$ действительных переменных. Показать, что плюрисубгармонические функции в области $D \subset \mathbb{C}^n$ $(= \mathbb{R}^{2n})$ составляют подкласс функций, субгармонических в D.

23. Пусть u — полунепрерывная сверху функция в области D, плюрисубгармоническая в $D \setminus E$, где E — относительно замкнутое подмножество D меры нуль. Доказать, что u плюрисубгармонична в D; если $u < \infty$.

24. а) Если u плюрисубгармонична в области $D \subset \mathbb{C}^n$, то функции u^p $(p \geqslant 1)$ и e^u также плюрисубгармоничны в D. б) Если $f \in H(D)$, то функции $\ln^+ |f| = \max(0, \ln |f|)$ и $|f|^p$ $(p \geqslant 0)$ плюрисубгармоничны в D.

25. Пусть D — ограниченная область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Тогда существует плюрисубгармоническая функция u класса C^∞ в D такая, что $\{z \in D\colon\ u(z) \leqslant \alpha\} \Subset D$ для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$.

26. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}^n$, z^0 — произвольная точка из его полиномиальной оболочки $\hat{K}_P$, U — окрестность z^0 в $\mathbb{C}^n$ и $S = (U \cap K) \cup (\partial U \cap \hat{K}_P)$. Тогда для любого многочлена p выполняется неравенство $|p(z^0)| \leqslant \max\limits_{z \in S} |p(z)|$ (локальный принцип максимума Росси).

27. В обозначениях предыдущей задачи пусть функция $u(z)$ плюрисубгармонична в $\overline{U}$. Доказать, что

$$u(z^0) \leqslant \sup_{z \in S} u(z).$$

28. Полиномиально выпуклая оболочка компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ совпадает с множеством

$\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ u(z) \leqslant \sup\limits_K u$ для всех функций u, плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n\}$.

29. Обобщенной трубчатой областью называется произведение области $B \subset \mathbb{R}^n(x)$ на область $D \subset \mathbb{R}^n(y)$ (при $D = \mathbb{R}^n(y)$ получаем обычную трубчатую область). Убедиться, что теорема об оболочке голоморфности трубчатых областей (теорема 3 п. 27) не распространяется на обобщенные трубчатые области. [Указание: рассмотреть функцию $f(z) = \dfrac{1}{z_1^2 + z_2^2}$ в произведении областей

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ \frac{1}{2} < |x| < 1\right\} \text{ и } D = \left\{y \in \mathbb{R}^2\colon\ |y_1| < \frac{1}{4},\ |y_2| < \frac{1}{4}\right\}.]$$

30. Если p — многочлен или целая функция, то все связные компоненты множества $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ p(x + iy) \neq 0$ для $\forall y \in \mathbb{R}^n\}$ выпуклы.

ГЛАВА IV

МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРОБЛЕМЫ КУЗЕНА

В этой главе мы рассмотрим класс функций с особенностями простейшего типа — мероморфных функций. Главное внимание будет уделено решению проблем Кузена, которые состоят в построении мероморфных функций по заданным главным частям и нулям. Сначала мы рассмотрим элементарное решение этих проблем в простейших случаях, затем познакомим читателей с методами алгебраической топологии, которые приводят к общему их решению.

§ 10. Мероморфные функции

30. Понятие мероморфной функции. Определение 1. Функция f называется *мероморфной* в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если она: 1) голоморфна всюду в D, за исключением некоторого множества $\mathscr{P}$, 2) не продолжаема аналитически ни в одну точку $\mathscr{P}$ и 3) для любой точки $z^0 \in \mathscr{P}$ существуют окрестность U и голоморфная в ней функция $\psi \not\equiv 0$ такие, что голоморфная в $D \cap \{U \setminus \mathscr{P}\}$ функция $\varphi = f\psi$ голоморфно продолжается в U.

Очевидно, что $\psi(z^0) = 0$ в каждой точке $z^0 \in \mathscr{P}$ (иначе вместе с $f\psi$ и функция f продолжалась бы в некоторую окрестность точки z^0). Если предположить, что для любой $z^0 \in \mathscr{P}$ функции φ и ψ не имеют общих множителей, голоморфных в некоторой окрестности z^0 и равных нулю в этой точке (на такие множители всегда можно сократить φ и ψ), то ψ будет обращаться в нуль лишь на множестве $\mathscr{P}$. Таким образом, $\mathscr{P}$ является аналитическим множеством — в окрестности U_{z^0} своей произвольной точки оно определяется условием

$$\mathscr{P} = \{z \in U_{z^0}\colon \psi(z) = 0\}, \tag{1}$$

где $\psi \in H(U_{z^0})$. Множество $\mathscr{P}$ называется *полярным множеством функции* f.

Однако не во всех точках полярного множества $\mathscr{P}$ поведение мероморфной функции f одинаково. Точки $z^0 \in \mathscr{P}$ делятся на *полюсы*, в которых функция $\varphi = f\psi$ отлична от нуля, и *точки неопределенности*, в которых $\varphi = 0$ (мы по-прежнему считаем, что φ и ψ не имеют общих множителей, голоморфных в точке z^0 и равных там нулю). При приближении к полюсу функция

$f=\frac{\varphi}{\psi}$ неограниченно возрастает, а в окрестности точки неопределенности она принимает любое комплексное значение (именно значение w_0 на аналитическом множестве $\{z\in U_{z^0}: \varphi(z)-w_0\psi(z)=0\}$, очевидно, содержащем точку неопределенности z^0). Комплексная размерность множества точек неопределенности по меньшей мере на единицу ниже размерности множества полюсов, ибо точки неопределенности характеризуются дополнительным условием $\varphi(z)=0$.

Пример. Для функции $f=\frac{w}{z}$, мероморфной в $\mathbb{C}^2$, полярным множеством служит аналитическая плоскость $\{z=0\}$. Все точки этой плоскости являются полюсами, кроме $\{z=0,\ w=0\}$, которая есть точка неопределенности.

Как и в случае одного переменного, справедлива следующая теорема о рациональных функциях (см. ч. I, п. 24):

Теорема 1 (Вейерштрасс, Гурвиц). *Любая функция f, мероморфная в компактифицированном пространстве n комплексных переменных ($\overline{\mathbb{C}}^n$ или $\mathbb{P}^n$), является рациональной.*

◀ Пусть f мероморфна в $\overline{\mathbb{C}}^n$; тогда при любом фиксированном $(z_1^0, \ldots, z_{\nu-1}^0, z_{\nu+1}^0, \ldots, z_n^0)\in\mathbb{C}^{n-1}$ она мероморфна по z_ν в $\overline{\mathbb{C}}$ ($\nu=1, \ldots, n$). По теореме 4 из п. 24 ч. I f является рациональной функцией от переменного z_ν. Но функция, рациональная по каждому переменному при любых фиксированных остальных, является рациональной (см. задачу 16 к гл. I). Доказательство в случае пространства $\mathbb{P}^n$ предоставляется читателю ▶

Теорема 2. *Рациональная функция f, существенно зависящая от $n\geqslant 2$ комплексных переменных, имеет хотя бы одну точку неопределенности в $\overline{\mathbb{C}}^n$.*

◀ Если f многочлен, то он имеет хотя бы одну точку неопределенности в бесконечности. В самом деле, мы можем считать, что $\frac{\partial f}{\partial z_1}(0)$ и $\frac{\partial f}{\partial z_2}(0)\neq 0$ и что коэффициент при старшей степени z_1 равен 1 (это можно сделать линейной заменой координат). Многочлен $g_b(z_1)=f(z_1, a_2, 0, \ldots, 0)-b$, где $b\in\mathbb{C}$, при больших a_2 имеет большие коэффициенты. Из теоремы Виета следует, что у него должен быть хотя бы один большой по модулю корень $a_1(b)$. По последовательности $(a_1^{(k)}(b), a_2^{(k)}, 0, \ldots, 0)$, сходящейся к точке $(\infty, \infty, 0, \ldots, 0)$, многочлен f стремится к пределу b; так как b можно выбирать произвольно, то $(\infty, \infty, 0, \ldots, 0)$ — точка неопределенности f. Остается рассмотреть случай $f=\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые много-

члены не ниже первой степени. В этом случае точками неопределенности будут решения системы уравнений $p=0$, $q=0$, а в случае $n\geqslant 2$ эта система непременно имеет конечные или бесконечные решения ▶

В некоторых вопросах удобнее пользоваться другим определением мероморфной функции, в котором полярное множество заранее не фиксируется. Более того, в этом новом определении функция не предполагается заданной в целом во всей области, а характеризуется лишь ее локальными свойствами. Описательно говоря, под мероморфной здесь понимается функция, которая локально представляется как отношение двух голоморфных функций, причем такие локальные представления в пересекающихся областях должны быть согласованы между собой так, чтобы в совокупности они образовывали «единую» функцию. Особое преимущество это определение имеет при изучении функций на многообразиях, поэтому мы и рассмотрим сразу этот случай [1]).

Пусть дано комплексно аналитическое многообразие M и область D на нем. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ этой области ($U_\alpha\subset D$ — открытые множества, объединение которых совпадает с D, индекс α пробегает некоторое множество A) и семейство троек $f_\alpha=(U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha)$, $\alpha\in A$, где φ_α и ψ_α — функции, голоморфные в U_α, причем ни одна $\psi_\alpha\not\equiv 0$. Кроме того, мы предположим, что выполняется следующее *условие согласованности*: если $U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}\neq\varnothing$, то в этом пересечении

$$\varphi_{\alpha_1}\psi_{\alpha_2}\equiv\varphi_{\alpha_2}\psi_{\alpha_1}. \tag{2}$$

Множество всех семейств $\{f_\alpha\}$, удовлетворяющих в D описанным условиям, мы обозначим через $\mathfrak{M}(D)$.

Наряду с $\{f_\alpha\}$, $\alpha\in A$, рассмотрим еще семейство троек $g_\beta=(U'_\beta, \varphi'_\beta, \psi'_\beta)$, $\beta\in B$, из $\mathfrak{M}(D)$. *Объединением* этих семейств мы будем называть семейство всех троек, принадлежащих $\{f_\alpha\}$ или $\{g_\beta\}$. Два семейства $\{f_\alpha\}$ и $\{g_\beta\}$ из $\mathfrak{M}(D)$ мы назовем *эквивалентными*, если их объединение также принадлежит $\mathfrak{M}(D)$. Очевидно, что в этом определении существенно лишь требование, чтобы любые две тройки из объединения $\{f_\alpha\}$ с $\{g_\beta\}$ удовлетворяли условию согласованности.

Проверим, что принятое определение эквивалентности удовлетворяет обычным аксиомам. Рефлексивность и симмет-

[1]) Определение, о котором мы сейчас говорим, еще не полностью локализовано, оно имеет «предпучковый» характер (смысл этого термина скоро выяснится). В дальнейшем мы приведем еще вполне локализованный его «пучковый» вариант.

ричность очевидны, а для проверки аксиомы транзитивности достаточно проверить, что если $\{f_\alpha\} \sim \{g_\beta\}$ и $\{g_\beta\} \sim \{h_\gamma\}$, то для объединения $\{f_\alpha\}$ и $\{h_\gamma\}$ выполняется условие согласованности. Возьмем произвольные тройки $f_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha)$ и $h_\gamma = (U''_\gamma, \varphi''_\gamma, \psi''_\gamma)$, для которых $U_\alpha \cap U''_\gamma \neq \varnothing$, и выберем $g_\beta = (U'_\beta, \varphi'_\beta, \psi'_\beta)$ так, чтобы $\Delta = U_\alpha \cap U'_\beta \cap U''_\gamma \neq \varnothing$ (это возможно, так как $\bigcup U'_\beta = D$). В силу (2) для объединений $\{f_\alpha\}$ с $\{g_\beta\}$ и $\{g_\beta\}$ с $\{h_\gamma\}$ на Δ имеем $\varphi_\alpha \psi'_\beta \equiv \varphi'_\beta \psi_\alpha$ и $\varphi'_\beta \psi''_\gamma \equiv \varphi''_\gamma \psi'_\beta$, а значит, $\varphi_\alpha \psi'_\beta \psi''_\gamma \equiv \varphi'_\beta \psi_\alpha \psi''_\gamma \equiv \psi_\alpha \varphi''_\gamma \psi'_\beta$, откуда (в силу условия $\psi'_\beta \not\equiv 0$) следует, что $\varphi_\alpha \psi''_\gamma \equiv \psi_\alpha \varphi''_\gamma$ [1]).

Определение 2. *Мероморфной функцией* в области D, принадлежащей комплексно аналитическому многообразию M, мы будем называть любой класс эквивалентности f на множестве $\mathfrak{M}(D)$. Иными словами, мероморфная функция — это совокупность семейств троек $\{f_\alpha\} \in \mathfrak{M}(D)$ таких, что любые две тройки из этой совокупности связаны условием согласованности (2).

Если мероморфная функция f задана в области $D \subset M$, то в силу условия (2) в окрестности каждой точки $P \in D$ отношение $\frac{\varphi_\alpha}{\psi_\alpha}$ одинаково для всех троек $(U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha) = f_\alpha$ любого семейства $\{f_\alpha\}$, представляющего класс f. В этом смысле и можно говорить, что мероморфная функция локально представляется как отношение двух голоморфных функций.

По отношению к мероморфной функции f точки области D можно разбить на два типа. Будем говорить, что f *определена* в точке $P \in D$, если существует тройка $f_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha)$, принадлежащая к какому-либо семейству $\{f_\alpha\}$, которое представляет f, и такая, что $P \in U_\alpha$, а φ_α и ψ_α не обращаются в точке P одновременно в нуль. Каждой точке P, в которой мероморфная функция f определена, она ставит в соответствие значение $f(P) = \frac{\varphi_\alpha(P)}{\psi_\alpha(P)}$ — конечное, если $\psi_\alpha(P) \neq 0$, и бесконечное, если $\psi_\alpha(P) = 0$. Это значение, очевидно, не зависит ни от выбора представителя $\{f_\alpha\}$ класса эквивалентности f, ни от выбора тройки из семейства $\{f_\alpha\}$, т. е. определяется рассматриваемой мероморфной функцией. Множество точек, в которых f определена, очевидно, открыто. Точки области D, в которых мероморфная функция f, заданная в D, не определена, образуют *множество неопределенности* этой функции.

---

[1]) Если не избегать деления, то доказательство становится совсем тривиальным: из $\frac{\varphi_\alpha}{\psi_\alpha} = \frac{\varphi'_\beta}{\psi'_\beta}$ и $\frac{\varphi'_\beta}{\psi'_\beta} = \frac{\varphi''_\gamma}{\psi''_\gamma}$ следует, что $\frac{\varphi_\alpha}{\psi_\alpha} = \frac{\varphi''_\gamma}{\psi''_\gamma}$.

Покажем, как можно определить действия над мероморфными функциями. Пусть в области $D \subset M$ заданы две мероморфные функции f и g и семейства троек $\{f_\alpha\}, \{g_\beta\} \in \mathfrak{M}(D)$ соответственно представляют эти функции. Рассмотрим семейство всех троек $h_\gamma = (U_\gamma, \varphi_\gamma, \psi_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma = D$, для которых существуют $f_\alpha = (U'_\alpha, \varphi'_\alpha, \psi'_\alpha) \in \{f_\alpha\}$ и $g_\beta = (U''_\beta, \varphi''_\beta, \psi''_\beta) \in \{g_\beta\}$ такие, что $U_\gamma \subset U'_\alpha \cap U''_\beta$ и в U_γ справедливы соотношения[1])

$$\varphi_\gamma \equiv \varphi'_\alpha \psi''_\beta + \psi'_\alpha \varphi''_\beta, \quad \psi_\gamma \equiv \psi'_\alpha \psi''_\beta. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что $\{h_\gamma\} \in \mathfrak{M}(D)$ — условие согласованности проверяется простой выкладкой, а остальные условия очевидны. Класс эквивалентности h на $\mathfrak{M}(D)$, содержащий построенное семейство $\{h_\gamma\}$, и называется *суммой* мероморфных функций f и g (обозначение обычное: $h = f + g$). Аналогично определяется *произведение* $h = fg$, только (3) нужно теперь заменить соотношениями

$$\varphi_\gamma \equiv \varphi'_\alpha \varphi''_\beta, \quad \psi_\gamma \equiv \psi'_\alpha \psi''_\beta. \tag{4}$$

Пусть f — мероморфная в D функция, не равная тождественно нулю. Из теоремы единственности следует, что тогда для любой тройки $f_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha)$ из семейства $\{f_\alpha\}$, представляющего класс f, функция $\varphi_\alpha \not\equiv 0$ в U_α. Поэтому семейство $\{g_\alpha\}$, состоящее из троек $(U_\alpha, \psi_\alpha, \varphi_\alpha)$, которые получаются из f_α перестановкой φ_α и ψ_α, также принадлежит $\mathfrak{M}(D)$. Класс эквивалентности на $\mathfrak{M}(D)$, содержащий $\{g_\alpha\}$, мы назовем мероморфной функцией $\frac{1}{f}$; очевидно, произведение $f \cdot \frac{1}{f}$ дает мероморфную функцию, тождественно равную 1. *Частное* двух мероморфных в D функций f и $g \not\equiv 0$ мы определим как произведение $f \cdot \frac{1}{g}$.

Нетрудно убедиться в том, что совокупность функций, мероморфных в области D, с определенными выше действиями образует (коммутативное) поле. Очевидно также, что при действиях над мероморфными функциями их значения подвергаются тем же действиям: имеем $(f+g)(P) = f(P) + g(P)$, $fg(P) = f(P)g(P)$,

---

[1]) Соотношения (3) выражают, что $\frac{\varphi_\gamma}{\psi_\gamma} = \frac{\varphi'_\alpha}{\psi'_\alpha} + \frac{\varphi''_\beta}{\psi''_\beta}$ во всех точках, где определены обе функции f и g.

$\frac{1}{f}(P) \doteq \frac{1}{f(P)}$ во всякой точке $P \in D$, где определены функции f и g.

31. Первая проблема Кузена. Естественно возникает проблема построения глобально определенной во всей области мероморфной функции f по локально заданным ее «главным частям», т. е. мероморфным функциям, локально отличающимся от f на голоморфные функции. Приведем общую постановку этой проблемы.

Проблема Кузена I (аддитивная). Дана область D, принадлежащая аналитическому многообразию M, а также открытое покрытие $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ этой области. В каждом U_α задана мероморфная функция f_α так, что выполняется следующее условие согласованности:

В любом пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ разность $f_\alpha - f_\beta$ является голоморфной функцией.

Требуется построить мероморфную в D функцию f так, чтобы в каждом U_α разность $f - f_\alpha$ была голоморфной.

Пусть, в частности, D — плоская область; зададимся последовательностью точек $a_\nu \in D$, не имеющей предельных точек в D, и последовательностью главных частей $g_\nu(z) = \sum_{k=1}^{p_\nu} \frac{c_k^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^k}$. Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ области D обозначим через f_α сумму g_ν по всем точкам $a_\nu \in U_\alpha$[1]); если же U_α не содержит точек a_ν, мы положим $f_\alpha \equiv 0$. Условие согласованности при этом, очевидно, выполняется. Проблема Кузена с этими данными сводится, следовательно, к задаче построения мероморфной в области D функции с заданными полюсами и главными частями. Аддитивная проблема Кузена является, таким образом, естественным распространением этой задачи на пространственный случай.

Разрешимость задачи для любой плоской области D доказывает теорема Миттаг-Леффлера (ч. I, п. 42). Однако в пространстве существуют области, для которых не всякая проблема Кузена разрешима.

Пример. Пусть $D = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ и $\varphi(z_1)$ — функция, голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, с (неустранимой) особенностью в точке $z_1 = 0$. Рассмотрим покрытие D окрестностями следующих двух типов: для точек $\alpha = (\alpha_1, 0)$, $\alpha_1 \neq 0$, в качестве U_α возьмем шар $B(\alpha, |\alpha_1|)$, а для точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_2 \neq 0$, — шар $B(\alpha, |\alpha_2|)$.

---

[1]) Условимся считать, что в каждом U_α имеется лишь конечное число точек a_ν.

В окрестностях первого типа положим $f_\alpha(z)=\dfrac{\varphi(z_1)}{z_2}$, а в окрестностях второго типа — $f_\alpha(z)\equiv 0$; эти данные Кузена, очевидно, согласованы (см. схему на рис. 113).

Допустим, что поставленная проблема Кузена разрешима и существует мероморфная в D функция f, для которой $f-f_\alpha=h_\alpha$ голоморфна в U_α ($\alpha\in D$ — любое). Тогда (глобально определенная) функция $g=z_2f$, в каждой окрестности U_α первого типа равная $\varphi(z_1)+z_2h_\alpha(z)$ и равная $h_\alpha(z)$ в каждой U_α второго типа, голоморфна в D (заметим, что в U_α первого типа $z_1\neq 0$). По теореме Осгуда — Брауна g продолжается в точку $z=0$ до целой функции. Но тогда и функция $g(z_1, 0)=\varphi(z_1)$ (мы пользуемся тем, что плоскость $\{z_2=0\}$ покрывается лишь окрестностями первого типа) является целой, а у нас φ имеет особенность в точке $z_1=0$. Противоречие и доказывает неразрешимость поставленной проблемы Кузена.

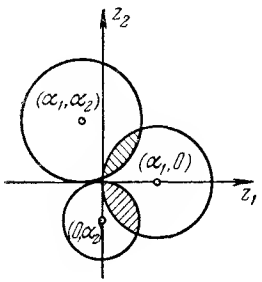


Рис. 113.

Приведем необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы Кузена, которое, впрочем, столь близко к самой проблеме, что его можно рассматривать как изменение формулировки. Имея данные Кузена $\{f_\alpha\}$ для покрытия $\{U_\alpha\}$ области $D\subset M$, мы можем в каждом пересечении $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$ рассматривать разность

$$h_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta, \tag{1}$$

голоморфную в $U_{\alpha\beta}$ в силу условия согласованности. В каждом $U_{\alpha\beta}$, очевидно, имеем

$$h_{\alpha\beta}+h_{\beta\alpha}=0, \tag{2}$$

а в каждом пересечении $U_{\alpha\beta\gamma}=U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ —

$$h_{\alpha\beta}+h_{\beta\gamma}+h_{\gamma\alpha}=0. \tag{3}$$

Любое семейство функций $h_{\alpha\beta}\in H(U_{\alpha\beta})$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), мы будем называть *голоморфным коциклом* для данного покрытия $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ области D. Если эти функции связаны с данными Кузена соотношениями (1), то коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$ будем называть *соответствующим* проблеме Кузена $\{f_\alpha\}$. Наконец, голоморфный коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$ мы назовем *когомологичным нулю*, если для всех $\alpha\in A$ существуют функции $h_\alpha\in H(U_\alpha)$ такие, что в каждом пересечении $U_{\alpha\beta}$

$$h_\beta-h_\alpha=h_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Введенные термины и позволяют сформулировать условие разрешимости, о котором мы говорили:

Теорема 1. *Для разрешимости проблемы Кузена* $\{f_\alpha\}$ *для данного покрытия* $\mathscr{U}$ *области* D *необходимо и достаточно, чтобы соответствующий этой проблеме голоморфный коцикл* $\{h_{\alpha\beta}\}$ *был когомологичным нулю.*

◀ Если проблема Кузена $\{f_\alpha\}$ разрешима, то существует функция f, мероморфная в D и такая, что все разности $f-f_\alpha=h_\alpha$ голоморфны в U_α ($\alpha\in A$). Отсюда для соответствующего голоморфного коцикла $h_{\alpha\beta}$ имеем

$$h_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta=h_\beta-h_\alpha,$$

а это и означает, что $\{h_{\alpha\beta}\}$ когомологичен нулю.

Пусть, обратно, голоморфный коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$, соответствующий проблеме Кузена $\{f_\alpha\}$, когомологичен нулю. Тогда существуют функции $h_\alpha\in H(U_\alpha)$ такие, что $h_\beta-h_\alpha=h_{\alpha\beta}$ в каждом пересечении $U_{\alpha\beta}$, т. е. в каждом $U_{\alpha\beta}$ имеем $f_\alpha-f_\beta=h_\beta-h_\alpha$ или

$$f_\alpha+h_\alpha=f_\beta+h_\beta$$

для любых α, $\beta\in A$. Таким образом, функции $f_\alpha+h_\alpha$, мероморфные в U_α, не зависят от выбора окрестности U_α и во всей области D глобально определена мероморфная функция f, равная $f_\alpha+h_\alpha$ в каждом U_α. Она и решает рассматриваемую проблему Кузена ▶

Перефразируем доказанную теорему. Для данного покрытия $\{U_\alpha\}$ области D голоморфные коциклы $h_{\alpha\beta}$ можно складывать (поточечно в каждом пересечении $U_{\alpha\beta}$), и относительно этой операции они образуют группу, которую мы обозначим $Z^1(\mathscr{U})$ и будем называть *группой голоморфных коциклов* для данного покрытия $\mathscr{U}$. В этой группе есть подгруппа $B^1(\mathscr{U})$ голоморфных коциклов, когомологичных нулю. Факторгруппу

$$Z^1(\mathscr{U})/B^1(\mathscr{U})=H^1(\mathscr{U}) \tag{5}$$

мы будем называть (первой) *группой когомологий* для покрытия $\mathscr{U}$ области D (с голоморфными коэффициентами).

Элементами $H^1(\mathscr{U})$ служат классы когомологичных друг другу голоморфных коциклов. Тривиальность этой группы ($H^1(\mathscr{U})=0$) означает, что для рассматриваемого покрытия все голоморфные коциклы когомологичны нулю. Поэтому теорему 1 можно сформулировать в таком виде:

Теорема 1′. *Для разрешимости проблемы Кузена с произвольными* $\{f_\alpha\}$ *для данного покрытия* $\mathscr{U}$ *области* D *необходимо*

и достаточно, чтобы соответствующая группа когомологий была тривиальной:

$$H^1(\mathscr{U}) = 0. \tag{6}$$

Введенные выше понятия допускают прямую аналогию в классе C^∞ бесконечно дифференцируемых функций. Пусть D — область на многообразии $M \in C^\infty$ и $D = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ — ее покрытие окрестностями на M; пусть еще в каждом пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ задана бесконечно дифференцируемая функция $h_{\alpha\beta}$. Если система таких функций $\{h_{\alpha\beta}\}$ удовлетворяет условиям (2) и (3), то мы будем называть ее *дифференциальным коциклом*. Если при этом выполняется еще аналог условия (4), т. е. в каждом U_α существует функция $h_\alpha \in C^\infty$ такая, что $h_\beta - h_\alpha = h_{\alpha\beta}$ в $U_{\alpha\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in A$, то коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$ называется *когомологичным нулю*.

Точно так же, как в голоморфном случае, определяется и первая группа когомологий (с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами). Оказывается, однако, что эта группа всегда тривиальна:

Теорема 2. *Для любого открытого покрытия $\mathscr{U}$ области D на многообразии $M \in C^\infty$ любой дифференциальный коцикл когомологичен нулю.*

◀ Построим для $\{U_\alpha\}$ разбиение единицы, т. е. семейство функций $e_\alpha \in C^\infty(D)$ таких, что: 1) $\sum_{\alpha \in A} e_\alpha(P) = 1$ для всех точек $P \in D$, 2) носитель каждой e_α компактно принадлежит U_α и 3) каждая точка $P \in D$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом носителей e_α. Для этого построим сначала локально конечное покрытие V_i, $i \in I$, такое, что для каждого $i \in I$ задано $\alpha(i) \in A$, при котором $V_i \subset U_{\alpha(i)}$ (существование такого покрытия следует из того, что M является объединением возрастающего семейства компактов; покрытие $\mathscr{V} = \{V_i\}$ называют подчиненным покрытию $\mathscr{U}$). Построим разбиение единицы $e'_i \in C^\infty$, $i \in I$, подчиненное покрытию $\mathscr{V}$ (см. п. 11), и положим $e_\alpha = 0$, если $\alpha \neq \alpha(i)$ ни для какого i, а $e_{\alpha(i)} = \sum e'_j$, сумма по всем $j \in I$, для которых $\alpha(j) = \alpha(i)$. Семейство $\{e_\alpha\}$, очевидно, удовлетворяет указанным условиям.

При помощи этого разбиения единицы мы сгладим функции $h_{\alpha\beta}$, заменив их функциями

$$h'_{i\alpha} = \begin{cases} e_i h_{i\alpha} & \text{в } U_{i\alpha}, \\ 0 & \text{в } U_\alpha \setminus U_{i\alpha}. \end{cases}$$

При этом мы продолжили $h_{i\alpha}$ во всю окрестность U_α, но отличной от нуля она оказывается лишь в пересечении $U_{i\alpha}$. Теперь в каждой U_α мы можем определить функцию

$$h_\alpha = \sum_i h'_{i\alpha}; \tag{7}$$

здесь суммирование распространяется на все множество индексов, но в каждой точке $P \in U_\alpha$ отлично от нуля лишь конечное число слагаемых.

Очевидно, все $h_\alpha \in C^\infty$ и в любой точке каждого пересечения $U_{\alpha\beta}$

$$h_\beta - h_\alpha = \sum_i (h'_{i\beta} - h'_{i\alpha}) = \sum_i e_i (h_{i\beta} - h_{i\alpha}). \tag{8}$$

Но так как $\{h_{\alpha\beta}\}$ — коцикл, то в каждой точке пересечения $U_{\alpha\beta i}$ в силу (2) и (3) имеем $h_{i\beta} - h_{i\alpha} = h_{\alpha i} + h_{i\beta} = h_{\alpha\beta}$, поэтому согласно (8) в каждом $U_{\alpha\beta}$

$$h_\beta - h_\alpha = \sum_i e_i h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, семейство $\{h_\alpha\}$ и есть искомое, т. е. $\{h_{\alpha\beta}\}$ — коцикл, когомологичный нулю ▶

Читатель, несомненно, заметил, что введенные здесь термины аналогичны тем, которые были введены в п. 14 при изучении дифференциальных форм. Напомним их, ограничиваясь формами первой степени с коэффициентами класса C^∞, которые в локальных комплексных координатах z_ν, $\bar{z}_\nu$ имеют вид

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \, d\bar{z}_\nu, \tag{9}$$

т. е. формами бистепени (0, 1). В отличие от п. 14 мы будем дифференцировать эти формы лишь по переменным $\bar{z}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) и оператор дифференцирования по этим переменным обозначим через $\bar{\partial}$. Таким образом,

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{\mu,\,\nu}{}' \left(\frac{\partial a_\nu}{\partial \bar{z}_\mu} - \frac{\partial a_\mu}{\partial \bar{z}_\nu} \right) d\bar{z}_\mu \wedge d\bar{z}_\nu$$

(напомним, что штрих означает упорядоченное суммирование: $1 \leqslant \mu < \nu \leqslant n$). Форма (9) называется *замкнутой формой* или *коциклом*, если $\bar{\partial}\omega = 0$, т. е.

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial \bar{z}_\nu} = \frac{\partial a_\nu}{\partial \bar{z}_\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Коцикл (замкнутая форма) ω называется *когомологичным нулю* (или *точной формой*), если существует функция $f \in C^\infty$ такая, что $\omega = \bar\partial f$, т. е.

$$a_\nu = \frac{\partial f}{\partial \bar z_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Коциклы образуют (по сложению) группу, которую мы обозначим через $\tilde Z^1$, а коциклы, когомологичные нулю, — ее подгруппу $\tilde B^1$. Факторгруппу

$$\tilde H^1 = \tilde Z^1 / \tilde B^1$$

назовем (первой) *группой когомологий* с коэффициентами в группе дифференциальных форм (мы ставим значки над буквами, чтобы отличить эти группы от таких же групп, введенных в п. 12 на основе обычного дифференцирования d, по всем координатам z_ν и $\bar z_\nu$).

В следующем пункте мы убедимся в том, что связь дифференциальных форм с проблемой Кузена достаточно глубока и не исчерпывается сходством терминологии.

32. Решение для поликругов. Здесь будет доказана разрешимость аддитивной проблемы Кузена в простейшем случае, когда область D и все области покрытия U_α являются поликругами. В частности, сюда относится случай покрытия всего пространства $\mathbb{C}^n$ поликругами. При доказательстве нам понадобится

Лемма. *В любой односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ для любой функции $g \in C^\infty$ неоднородная система Коши — Римана*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = g(z) \tag{1}$$

разрешима в классе $C^\infty(D)$. Если при этом g является голоморфной (или класса C^∞) *функцией некоторого параметра, то и решение f голоморфно* (или бесконечно дифференцируемым образом) *зависит от него.*

◀ Пусть сначала функция g финитна, т. е. равна нулю вне некоторого компакта из D. По формуле Коши — Грина (п. 18 ч. 1) имеем тогда

$$g(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D\int \frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{d\sigma}{\zeta - z}, \tag{2}$$

где $d\sigma$ — элемент площади.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D\int \frac{g(\zeta)\,d\sigma}{\zeta - z}; \tag{3}$$

мы можем продолжить g на всю плоскость, полагая ее равной 0 в $\mathbb{C} \setminus D$, и тогда считать, что интегрирование распространяется на $\mathbb{C}$. Сделаем еще замену переменного интегрирования $\zeta \to \zeta + z$, тогда будем иметь

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \int \frac{g(z+\zeta)}{\zeta} d\sigma. \tag{4}$$

Дифференцированием под знаком интеграла (которое, очевидно, законно) находим

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \int \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \frac{d\sigma}{\zeta}$$

или, возвращаясь к старому переменному интегрирования,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \int \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\sigma}{\zeta - z}.$$

Сравнивая это с (2), мы убеждаемся, что f удовлетворяет системе (1). Дифференцировать интеграл (4) по z можно любое число раз, следовательно, $f \in C^\infty(D)$. Если g голоморфно зависит от параметра, то и интеграл так же от него зависит. Для финитных g лемма доказана.

В общем случае мы возьмем компактное исчерпывание D односвязными областями G_ν ($G_\nu \Subset G_{\nu+1}$, $\bigcup G_\nu = D$) и построим функции $g_\nu \in C^\infty(D)$ так, чтобы $g_\nu = g$ в G_ν и $g_\nu = 0$ в $D \setminus G_{\nu+1}$. По доказанному каждая система

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g_\nu$$

разрешима в классе $C^\infty(D)$; мы покажем сейчас, что решения f_ν можно выбрать так, чтобы в каждой G_ν было

$$|f_{\nu+1} - f_\nu| < \frac{1}{2^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

В самом деле, выберем решение f_1 по формуле (3), в которой g заменена функцией g_1, потом возьмем $\tilde{f}_2$ по той же формуле с заменой $g = g_2$ и заметим, что разность $\tilde{f}_2 - f_1$ голоморфна в G_1 $\left(\text{ибо там } \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\tilde{f}_2 - f_1) = g_2 - g_1 = 0\right)$. По теореме Рунге (п. 22 ч. I) можно подобрать многочлен P_1 так, чтобы в G_1 было

$$|\tilde{f}_2 - f_1 - P_1| < \frac{1}{2};$$

теперь видно, что $f_2 = \tilde{f}_2 - P_1$ удовлетворяет системе $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g_2$ и условию (5) при $\nu = 1$. Точно такой же прием можно применить и для $\nu = 2, 3, \ldots$.

Построенная последовательность f_ν на каждом компакте $K \Subset D$ равномерно сходится к функции

$$f = f_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (f_{\nu+1} - f_\nu).$$

В любой G_μ функция f представляется как конечная сумма функций класса C^∞ и суммы равномерно сходящегося ряда из голоморфных функций $f_{\nu+1} - f_\nu$, где $\nu \geqslant \mu$ $\left(\text{при } \nu \geqslant \mu \text{ на } G_\mu \right.$ имеем $\left. \frac{\partial f_{\nu+1}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_\nu}{\partial \bar{z}} = g \right)$. Следовательно, $f \in C^\infty(D)$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{\partial f_\nu}{\partial \bar{z}} = g$ всюду в D; голоморфная зависимость f от параметра, от которого зависит g, следует из теоремы Вейерштрасса (п. 22 ч. I) ▶

Приступаем к доказательству объявленной выше теоремы.

Теорема. *Для любого поликруга* $D = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < R_\nu\}$, $R_\nu \leqslant \infty$, *и любого его покрытия* $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ *поликругами любая аддитивная проблема Кузена разрешима.*

◀ С учетом теоремы 1 предыдущего пункта достаточно доказать, что для рассматриваемого покрытия $\mathscr{U}$ группа когомологий $H^1(\mathscr{U})$ тривиальна. Вместо этого мы сначала докажем тривиальность группы $\tilde{H}^1$, а затем установим, что $H^1(\mathscr{U})$ изоморфна $\tilde{H}^1$.

I. *Группа* $\tilde{H}^1$ *тривиальна.* Нам нужно доказать, что каждая замкнутая форма $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu d\bar{z}_\nu$ с коэффициентами из $C^\infty(D)$ точна, или, другими словами, доказать разрешимость в классе $C^\infty(D)$ любой неоднородной системы Коши — Римана

$$\bar{\partial} f = \omega \tag{6}$$

для любой формы $\omega \in C^\infty(D)$ бистепени (0,1), для которой $\bar{\partial}\omega = 0$. Перепишем (6) в виде системы

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} = a_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

и ее разрешимость в классе $C^\infty(D)$ будем доказывать индукцией по n.

При $n = 1$ утверждение доказано леммой; предположим, что оно справедливо, когда число переменных не превосходит

$n-1$, и докажем его справедливость для системы (7) с n переменными. Рассмотрим последнее уравнение этой системы

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} = a_n$$

и обозначим через g его решение в круге $D_n = \{|z_n| < R_n\}$ — функцию от z_n, зависящую от $'z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ как от параметра. Решение системы (7) мы будем искать в виде $f = g + \varphi$, тогда φ должна быть голоморфной по z_n в D_n, а по остальным переменным в поликруге $'D = \{|z_1| < R_1, \ldots, |z_{n-1}| < R_{n-1}\}$ удовлетворять системе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\nu} = a_\nu - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_\nu} \equiv b_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Так как форма ω замкнута и $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}_\mu \partial \bar{z}_\nu} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}_\nu \partial \bar{z}_\mu}$, то $\dfrac{\partial b_\mu}{\partial \bar{z}_\nu} = \dfrac{\partial b_\nu}{\partial \bar{z}_\mu}$ для всех $\mu, \nu = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, форма $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} b_\nu \, d\bar{z}_\nu$ замкнута и, по индуктивному предположению, существует решение $\varphi \in C^\infty('D)$ системы (8), зависящее от z_n как от параметра. Остается проверить, что φ зависит от z_n голоморфно, а для этого достаточно убедиться в том, что правые части системы (8) голоморфно зависят от z_n[1]). Но мы имеем

$$\frac{\partial b_\nu}{\partial \bar{z}_n} = \frac{\partial a_\nu}{\partial \bar{z}_n} - \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}_n \partial \bar{z}_\nu} = \frac{\partial a_\nu}{\partial \bar{z}_n} - \frac{\partial a_n}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$$

для всех $\nu = 1, \ldots, n-1$ в силу замкнутости формы ω.

II. *Группа $H^1(\mathscr{U})$ изоморфна группе $\tilde{H}^1$.* Пусть $\{h_{\alpha\beta}\}$ — произвольный голоморфный коцикл для покрытия $\{U_\alpha\}$. Так как по теореме 2 предыдущего пункта в классе C^∞ каждый коцикл когомологичен нулю, то существуют функции $g_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ такие, что в каждом пересечении $U_{\alpha\beta}$

$$h_{\alpha\beta} = g_\beta - g_\alpha. \tag{9}$$

Для любого $\alpha \in A$ рассмотрим форму

$$\omega_\alpha = \bar{\partial} g_\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{z}_\nu} \, d\bar{z}_\nu,$$

замкнутую в смысле оператора $\bar{\partial}$. В пересечении $U_{\alpha\beta}$ в силу (9) имеем

$$\omega_\beta - \omega_\alpha = \bar{\partial} h_{\alpha\beta} = 0,$$

[1]) Это утверждение доказывается индукцией по n при помощи леммы.

ибо коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$ голоморфен. Поэтому формы ω_α, по существу, определяют единую форму $\omega \in C^\infty(D)$, лишь по разному задаваемую в различных окрестностях U_α. Форма ω, очевидно, замкнута в D.

Мы построили соответствие между голоморфными коциклами $\{h_{\alpha\beta}\}$ и замкнутыми формами ω. При этом заданному коциклу соответствует много форм, но если ω и ω' соответствуют одному $\{h_{\alpha\beta}\}$, то в каждом $U_{\alpha\beta}$ имеем $g_\beta - g_\alpha = g'_\beta - g'_\alpha = h_{\alpha\beta}$, т. е. разности $g'_\beta - g_\beta = g'_\alpha - g_\alpha$ образуют в D единую функцию $g \in C^\infty$. В каждом U_α имеем $\bar\partial g'_\alpha - \bar\partial g_\alpha = \bar\partial g$, поэтому $\omega' - \omega = \bar\partial g$, т. е. ω' отличается от ω на точный дифференциал, и, следовательно, обе эти формы принадлежат одному классу эквивалентности. Далее, если $\{h'_{\alpha\beta}\}$ и $\{h_{\alpha\beta}\}$ эквивалентны, то в каждом $U_{\alpha\beta}$

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + h_\beta - h_\alpha, \tag{10}$$

где h_β и h_α — голоморфные функции; если $\{h_{\alpha\beta}\}$ соответствует форма ω, равная $\bar\partial g_\alpha$ в каждой U_α, то в силу (9) и (10) имеем $h'_{\alpha\beta} = g_\beta + h_\beta - (g_\alpha + h_\alpha)$, и, значит, $\{h'_{\alpha\beta}\}$ соответствует форма ω', которая в каждой U_α равна $\bar\partial(g_\alpha + h_\alpha) = \bar\partial g_\alpha$, т. е. форма, равная ω. Таким образом, фактически мы построили отображение

$$Z^1/B^1 \to \tilde Z^1/\tilde B^1 \tag{11}$$

группы $H^1(\mathscr{U})$ в $\tilde H^1$; это отображение, очевидно, является гомоморфизмом.

Покажем, что построенное отображение взаимно однозначно, т. е. что его ядро равно нулю. Пусть это не так, т. е. существует не когомологичный нулю коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$, которому соответствует точная форма $\omega = \bar\partial f$. В каждом $U_{\alpha\beta}$ имеем $h_{\alpha\beta} = g_\beta - g_\alpha$ и $\omega = \bar\partial g_\alpha$ в каждой U_α, т. е. там $\bar\partial(g_\alpha - f) = 0$ и $g_\alpha - f = h_\alpha$ — голоморфная функция. Но тогда $h_{\alpha\beta} = (f + h_\beta) - (f + h_\alpha) = h_\beta - h_\alpha$, и коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$ когомологичен нулю.

Остается показать, что (11) является отображением на $\tilde H^1$. Пусть $\omega \in C^\infty(D)$ — произвольная замкнутая форма бистепени (0, 1). Так как по условию все U_α — поликруги, то по доказанному в I эта форма локально точна: существует $g_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ такая, что $\omega = \bar\partial g_\alpha$ в U_α. В пересечениях $U_{\alpha\beta}$ имеем $\bar\partial(g_\beta - g_\alpha) = \omega - \omega = 0$, т. е. $g_\beta - g_\alpha = h_{\alpha\beta}$ — голоморфные функции. Они, очевидно, образуют голоморфный коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$, который соответствует форме ω ▶

Приведенное доказательство без всяких изменений распространяется на поликруговые области, представляющие собой произведения односвязных областей. На самом же деле аддитивная проблема Кузена разрешима для произвольных областей голоморфности — однолистных или многолистных. Однако в общем случае доказательство разрешимости этой проблемы требует привлечения новых идей. Мы будем говорить о них в следующем параграфе.

33. Применения. Вторая проблема Кузена. Здесь мы хотим привести примеры задач, приводящихся к аддитивной проблеме Кузена. Начнем с одной теоремы о продолжении. Чтобы ее сформулировать, условимся называть голоморфную функцию φ *определяющей функцией* комплексно $(n-1)$-мерного множества M в некоторой области D, если, во-первых, $M \cap D = \{z \in D\colon \varphi(z) = 0\}$ и, во-вторых, если какая-либо функция $\psi \in H(D)$ обращается в 0 на M, то она представляется в виде $\psi = \varphi h$, где $h \in H(D)$. Последнее условие выражает некоторого рода минимальность определяющей функции (так, для плоскости $\{z_1 = 0\}$ функция $\varphi = z_1$ является определяющей, а $\varphi = z_1^2$ — нет); определяющая функция, конечно, не единственна, но если φ_1 и φ_2 — две определяющие функции одного множества M в D, то их отношение φ_1/φ_2 — голоморфная в D и отличная от нуля функция. Чтобы формулировка теоремы о продолжении имела общий характер, мы воспользуемся высказанным без доказательства в конце предыдущего пункта утверждением о том, что аддитивная проблема Кузена разрешима для любой области голоморфности.

Теорема 1. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — произвольная область голоморфности и $M \subset D$ — аналитическое множество, определяющая функция которого $\varphi \in H(D)$. Тогда любую функцию g, локально голоморфную на M, можно продолжить до функции f, голоморфной во всей области D.*

◀ Локальная голоморфность функции g на M означает, что для каждой точки $z^0 \in M$ найдется окрестность U_0 такая, что g продолжается в ней до функции $f_0 \in H(U_0)$. Учитывая это, мы можем рассмотреть такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ области D, что в каждой U_α существует голоморфная функция f_α, совпадающая с g в пересечении $U_\alpha \cap M$:

$$f_\alpha|_{U_\alpha \cap M} = g|_{U_\alpha \cap M}; \tag{1}$$

если $U_\alpha \cap M$ пусто, то мы положим $f_\alpha \equiv 0$. В любом пересечении $U_{\alpha\beta}$ разность $f_\alpha - f_\beta$ обращается, следовательно, в нуль на $M \cap U_{\alpha\beta}$, и по свойству определяющей функции в этом пересечении $f_\alpha - f_\beta = \varphi h_{\alpha\beta}$, где $h_{\alpha\beta} \in H(U_{\alpha\beta})$. Мы примем мероморфные

функции (f_α/φ) за данные Кузена для покрытия $\{U_\alpha\}$ (они, очевидно, согласованы), и тогда

$$h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha - f_\beta}{\varphi} \tag{2}$$

будут образовывать голоморфный коцикл, т. е. удовлетворять условиям (2) и (3) предыдущего пункта. Так как D — область голоморфности, то эта проблема Кузена разрешима, и, значит, существуют функции $h_\alpha \in H(U_\alpha)$ такие, что $h_\beta - h_\alpha = h_{\alpha\beta}$ в любом $U_{\alpha\beta}$. Подставляя сюда значение $h_{\alpha\beta}$ из (2), найдем, что $f_\alpha + \varphi h_\alpha = f_\beta + \varphi h_\beta$ в каждом $U_{\alpha\beta}$. Отсюда видно, что в области D определяется голоморфная функция f, равная $f_\alpha + \varphi h_\alpha$ в каждой окрестности U_α. Но так как $\varphi|_M = 0$, то, пользуясь еще соотношением (1), мы найдем, что

$$f|_{U_\alpha \cap M} = f_\alpha|_{U_\alpha \cap M} = g|_{U_\alpha \cap M}.$$

Таким образом, f действительно является искомым продолжением функции g ▶

Теорема 1 позволяет получить разложение Хефера, которое мы без доказательства применяли в п. 18 при выводе интегральной формулы Вейля. В основе лежит следующая

Лемма. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область голоморфности и $(n-k)$-мерная аналитическая плоскость $\Pi = \{z \in \mathbb{C}^n\colon z_1 = \ldots = z_k = 0\}$ имеет с ней непустое пересечение. Тогда любая функция $f \in H(D)$, равная нулю на $\Pi \cap D$, допускает в D представление*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{k} z_\nu g_\nu(z), \tag{3}$$

где все $g_\nu \in H(D)$.

◀ Доказательство будем вести индукцией по k. При $k = 1$ утверждение очевидно, ибо в качестве g_1 можно принять функцию f/z_1; пусть оно верно для $k-1$. Обозначим $G = D \cap \{z_k = 0\}$; все связные компоненты этого пересечения являются, очевидно, областями голоморфности в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ переменных $z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n$. Сужение $f|_{\{z_k=0\}} \in H(G)$ и по условию обращается в нуль на $G \cap \{z_1 = \ldots = z_{k-1} = 0\}$. Отсюда, согласно индуктивному предположению, вытекает, что в G имеет место представление

$$f|_{\{z_k=0\}} = \sum_{\nu=1}^{k-1} z_\nu g_\nu^0(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n),$$

где все $g_\nu^0 \in H(G)$. По теореме 1 все g_ν^0 продолжаются с $G = D \cap \{z_k = 0\}$ во всю область D до голоморфных функций $g_\nu(z)$.

Рассмотрим теперь разность

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_{\nu=1}^{k-1} z_\nu g_\nu(z);$$

очевидно, $\varphi|_{\{z_k=0\}} = 0$, и, по свойству определяющих функций, найдется $g_k \in H(D)$ такая, что $\varphi(z) = z_k g_k(z)$ для всех $z \in D$. Отсюда видно, что представление (3) справедливо и для k ▶

Из этой леммы совсем просто выводится

Теорема 2 (Хефер). *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область голоморфности и $W(z) \in H(D)$ — произвольная функция. Существуют такие функции $P_\nu(\zeta, z) \in H(D \times D)$, $\nu = 1, \ldots, n$, что для всех $\zeta, z \in D$ справедливо представление*

$$W(\zeta) - W(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu) P_\nu(\zeta, z). \tag{4}$$

◀ Разность $W(\zeta) - W(z) \in H(D \times D)$, и так как $D \times D$ — область голоморфности в $\mathbb{C}^{2n}$, а эта разность обращается в нуль на n-мерной аналитической плоскости $\Pi = \{z, \zeta: z_\nu = \zeta_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}$, то, положив $Z_\nu = \zeta_\nu - z_\nu$, $Z_{n+\nu} = z_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$), мы можем применить к рассматриваемой разности лемму. Получим нужное разложение (4) ▶

В качестве следующего примера задачи, приводящейся к аддитивной проблеме Кузена, мы рассмотрим один простой случай разрешимости так называемой *мультипликативной* или *второй проблемы Кузена*. Если первая проблема представляет собой пространственный аналог теоремы Миттаг-Леффлера, то эта проблема является таким же аналогом теоремы Вейерштрасса о существовании голоморфных функций с заданными нулями. Вот ее постановка:

Проблема Кузена II (мультипликативная). Дано открытое покрытие $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$, области D на аналитическом многообразии M и в каждой U_α — голоморфная функция f_α; при этом ни одна $f_\alpha \not\equiv 0$ и выполняется следующее условие согласованности:

В любом пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ частное f_α/f_β является голоморфной функцией.

Требуется построить голоморфную в D функцию f так, чтобы в каждой U_α частное f/f_α было голоморфной функцией, не обращающейся в нуль.

Замечание. Из условия согласованности следует, что частное $f_\alpha/f_\beta \neq 0$ в $U_{\alpha\beta}$, ибо там вместе с f_α/f_β голоморфно и частное f_β/f_α.

Имея данные второй проблемы Кузена $\{f_\alpha\}$ для рассматриваемого покрытия $\mathcal{U}$, мы можем в каждом пересечении рассмотреть функции

$$h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}, \tag{5}$$

голоморфные и отличные от нуля в силу условия согласованности. Эти функции в каждом $U_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию

$$h_{\alpha\beta}h_{\beta\alpha} = 1, \tag{6}$$

а в каждом $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ — условию

$$h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha} = 1. \tag{7}$$

Мы видим, что эти условия представляют собой мультипликативный аналог условий (2) и (3) п. 31, имеющих аддитивный характер. Как и в п. 31, просто проверить, что разрешимость проблемы сводится к построению функций h_α, голоморфных и отличных от нуля в окрестностях $U_\alpha (\alpha \in A)$ таких, что

$$\frac{h_\beta}{h_\alpha} = h_{\alpha\beta} \tag{8}$$

в каждом пересечении $U_{\alpha\beta}$.

Возникает естественное желание свести вторую проблему Кузена к первой при помощи логарифмирования. Так как функции $h_{\alpha\beta}$ голоморфны и отличны от нуля, то, предполагая, что пересечения $U_{\alpha\beta}$ односвязны [1]), мы можем в каждом из них выбрать некоторую голоморфную ветвь $\ln h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, и притом, в силу условия (6), так, что

$$g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} = 0.$$

Из (7) мы тогда получим, что в пересечениях $U_{\alpha\beta\gamma}$

$$g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} + g_{\gamma\alpha} = 2\pi i k_{\alpha\beta\gamma},$$

где $k_{\alpha\beta\gamma}$ — некоторые целые числа. Если все эти числа равны нулю, мы приходим к первой проблеме Кузена и, решив ее, получим решение второй проблемы. Однако, вообще говоря, это не так, и на область D, кроме условия разрешимости первой проблемы Кузена, надо наложить еще некоторые топологические ограничения, которые должны обеспечить возмож-

[1]) Под односвязностью области здесь и далее понимается *линейная односвязность*: любой замкнутый путь, принадлежащий этой области, гомотопен в ней нулю.

ность выбора таких ветвей $\ln h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, чтобы все $k_{\alpha\beta\gamma}$ оказались равными нулю.

Об этих ограничениях мы будем говорить в следующем параграфе. Здесь же приведем лишь простую теорему, в которой топологические трудности снимаются условием существования глобальной (т. е. определенной во всей области D) функции g, решающей проблему, но не обязательно голоморфной, а лишь непрерывной.

Теорема 3. *Пусть для области D разрешима первая проблема Кузена и данные f_α второй проблемы для покрытия $\{U_\alpha\}$ таковы, что существует непрерывная в D функция g, для которой все частные g/f_α непрерывны и отличны от нуля в U_α. Тогда проблема $\{f_\alpha\}$ разрешима.*

◀ Предположим сначала, что все U_α односвязны. Тогда в каждой U_α можно выбрать непрерывную ветвь $\ln(f_\alpha/g)$. Мы выбираем эти ветви произвольно, а затем в каждом пересечении $U_{\alpha\beta}$ полагаем

$$\ln h_{\alpha\beta} = \ln \frac{f_\alpha}{g} - \ln \frac{f_\beta}{g},$$

где $h_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta$ и в правой части взяты выбранные ветви. Функции $g_{\alpha\beta} = \ln h_{\alpha\beta}$ голоморфны в $U_{\alpha\beta}$ и удовлетворяют, очевидно, условиям

$$g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} = 0, \qquad g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} + g_{\gamma\alpha} = 0$$

(т. е. образуют голоморфный коцикл). По условию первая проблема Кузена $\{g_{\alpha\beta}\}$ разрешима и существуют голоморфные в U_α функции g_α такие, что

$$g_{\alpha\beta} = g_\beta - g_\alpha \tag{9}$$

в каждом пересечении $U_{\alpha\beta}$. Полагая $h_\alpha = e^{g_\alpha}$ для каждого $\alpha \in A$, мы получаем голоморфные в U_α и отличные от нуля функции и из соотношения (9) находим, что $h_{\alpha\beta} = h_\beta/h_\alpha$ в любом $U_{\alpha\beta}$. Это равносильно решению второй проблемы Кузена.

Общий случай, когда не все U_α односвязны, приводится к разобранному при помощи измельчения покрытия. Разобьем каждую окрестность U_α на односвязные области U'_{α_ν} и положим $f'_{\alpha_\nu} = f_\alpha$ в каждом U'_{α_ν}. По условию все частные g/f'_{α_ν} непрерывны и отличны от нуля. Если теперь положить $h'_{\alpha_\mu\beta_\nu} = h_{\alpha\beta}$ в каждом пересечении $U'_{\alpha_\mu\beta_\nu}$, то функции $\{h'_{\alpha_\mu\beta_\nu}\}$ будут удовле-

творять условиям (6) и (7). Мы находимся в условиях уже разобранного случая. По доказанному существует голоморфная в D функция f такая, что все частные f/f'_{α_ν} голоморфны и отличны от нуля в U'_{α_ν}. Но так как $f'_{\alpha_\nu} = f_\alpha$ в U_{α_ν} и эти U_{α_ν} покрывают U_α, то f решает вторую проблему и для покрытия $\{U_\alpha\}$ ▶

Доказанная теорема позволяет усилить теорему 1 о продолжении. В этой теореме предполагается, что множество M определяется функцией φ, голоморфной в области D. Оказывается, можно требовать меньшего: лишь непрерывности φ в D и ее локальной голоморфности в точках M, и это требование равносильно предыдущему. В самом деле, справедливо

Следствие. *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область голоморфности и $M \subset D$ — аналитическое множество комплексной размерности $n-1$. Если существует непрерывная в D функция φ, определяющая M, то существует и определяющая его функция f, голоморфная в D.*

◀ Рассмотрим открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ области D, столь мелкое, что в каждой U_α пересечение $U_\alpha \cap M$ имеет голоморфную определяющую функцию f_α (это следует из определения аналитического множества); в тех U_α, которые не пересекаются с M, положим $f_\alpha \equiv 1$. Такой выбор f_α, если учесть еще свойство определяющих функций, обеспечивает голоморфность всех отношений f_α/f_β в пересечениях $U_{\alpha\beta}$. Поэтому набор $\{f_\alpha\}$ можно принять за данные второй проблемы Кузена. Наконец, так как φ и f_α обе определяют M в U_α, то все частные φ/f_α непрерывны и отличны от нуля в U_α. По теореме 3 рассматриваемая проблема разрешима, и ее решение f обладает нужными свойствами ▶

Замечание. В этом следствии условие существования функции φ не является необходимым: оно вызвано тем, что мы пользуемся в доказательстве теоремой 3. Очевидно, его можно опустить, если известно, что в области D разрешима вторая проблема Кузена. В такой области, следовательно, всякое комплексно $(n-1)$-мерное аналитическое множество M имеет глобальную определяющую голоморфную функцию. Если же в этой области разрешима и первая проблема Кузена, то по теореме 1 всякая функция, локально голоморфная на M, оказывается и глобально голоморфной во всей области. Подчеркнем, что это свойство может не иметь места, если M не является аналитическим множеством: пример такого рода был приведен в п. 3.

§ 11. Методы теории пучков

В этом параграфе мы хотим познакомить читателя с новыми мощными методами, которые возникли при сочетании идей комплексного анализа с идеями алгебры и топологии. Главная заслуга в создании этих методов принадлежит французской математической школе, в первую очередь А. Картану и Ж. П. Серру. Нашей целью являются не сами методы, а их применения. Поэтому мы подробно прослеживаем связи этих методов с понятиями комплексного анализа, из которых они возникли, и примеры применений, но опускаем доказательства некоторых утверждений.

34. Основные определения. Еще в п. 28 ч. I мы ввели понятие ростка аналитической функции, к которому пришли, желая локализовать понятие аналитичности. Напомним это понятие для общего случая функций, голоморфных на аналитическом многообразии произвольной размерности.

Определение 1. Две функции f и g, голоморфные в точке P аналитического многообразия M, называются *эквивалентными*, если существует окрестность (в топологии M) этой точки, в которой $f \equiv g$. Любой класс эквивалентности по этому отношению называется *ростком* аналитической функции в точке P.

Росток, содержащий данную функцию f, голоморфную в точке P, мы будем обозначать символом $\mathfrak{f}_P$. Совокупность всех ростков аналитических функций в точке $P \in M$ будем обозначать через $\mathcal{O}_P$. Очевидно, $\mathcal{O}_P$ можно рассматривать как кольцо, если под суммой и произведением его элементов понимать росток, принадлежащий соответственно сумме и произведению представителей этих элементов (функций, голоморфных в точке P). Это — коммутативное кольцо с единицей, без делителей нуля [1]).

Чтобы прийти к основному в этом параграфе понятию пучка, напомним определение области наложения над аналитическим многообразием M, обобщающее определение римановой поверхности в ч. I. Прежде всего на множестве ростков

$$\mathcal{O} = \bigcup_{P \in M} \mathcal{O}_P \tag{1}$$

вводится топология, в которой окрестностями служат совокупности ростков, принадлежащие одной голоморфной функции,

---

[1]) В самом деле, если $\mathfrak{f}_P$ и $\mathfrak{g}_P$ — ненулевые ростки, то их представители f и g — голоморфные функции, не равные тождественно нулю. Но тогда и fg — такая же функция, т. е. $\mathfrak{f}_P \mathfrak{g}_P \neq 0$.

Это делается так. Рассмотрим произвольный росток $\mathbf{f}_P \in \mathcal{O}$ и любую функцию f, его представляющую (т. е. входящую в класс эквивалентности $\mathbf{f}_P$). Пусть U — произвольная окрестность точки $P \in M$, в которой f голоморфна; совокупность ростков $\tilde{U} = \bigcup_{Q \in U} \mathbf{f}_Q$, принадлежащих этой функции, и называется *окрестностью* $\mathbf{f}_P$.

В определении области наложения участвует еще *проекция*, т. е. отображение

$$\pi\colon \mathcal{O} \to M, \tag{2}$$

которое каждому ростку $\mathbf{f}_P \in \mathcal{O}$ ставит в соответствие точку $P \in M$. Обратное отображение неоднозначно: оно преобразует точку P в совокупность $\mathcal{O}_P$ всех ростков функций, голоморфных в этой точке. Однако топология на $\mathcal{O}$ построена так, что локально, в окрестности $\tilde{U}$ каждого ростка $\mathbf{f}_P$, отображение (2) взаимно однозначно, ибо по теореме единственности для любой $Q \in U$ в $\tilde{U}$ существует лишь один росток $\mathbf{f}_Q$, соответствующий этой точке. Очевидно, сужение $\pi|_{\tilde{U}}$ является гомеоморфизмом.

Отметим, наконец, что во введенной на $\mathcal{O}$ топологии алгебраические действия с ростками (которые определены лишь для ростков над одной точкой) оказываются *непрерывными*. Под этим понимается следующее: пусть $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ — ростки из $\mathcal{O}_P$ такие, что $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$; тогда для любой окрестности $\tilde{U}_{\mathbf{h}} \subset \mathcal{O}$ найдутся такие окрестности $\tilde{V}_{\mathbf{f}}$, $\tilde{V}_{\mathbf{g}} \subset \mathcal{O}$, что для всех $\mathbf{f}_Q \in \tilde{V}_{\mathbf{f}}$ и $\mathbf{g}_Q \in \tilde{V}_{\mathbf{g}}$ росток $\mathbf{f}_Q + \mathbf{g}_Q \in \tilde{U}_{\mathbf{h}}$ (мы определили непрерывность суммы, непрерывность произведения определяется аналогично). Для построения окрестностей $\tilde{V}_{\mathbf{f}}$ и $\tilde{V}_{\mathbf{g}}$ достаточно выбрать столь малую окрестность V точки $P \in M$, чтобы в ней были голоморфными функции f и g, представляющие соответственно ростки $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Тогда в V будет голоморфной и функция $h \in \mathbf{h}$ и, по принятому выше определению окрестностей, для любых $\mathbf{f}_Q \in \tilde{V}_{\mathbf{f}}$, $\mathbf{g}_Q \in \tilde{V}_{\mathbf{g}}$ сумма $\mathbf{f}_Q + \mathbf{g}_Q$ будет принадлежать функции h, которая, по определению суммы классов эквивалентности, всюду в V равна $f + g$. Но это и означает, что $\mathbf{f}_Q + \mathbf{g}_Q \in \tilde{U}_{\mathbf{h}}$.

Понятие пучка возникает при алгебраико-топологической обработке понятия поверхности наложения. При этой обработке сохраняются все топологические элементы только что описанной конструкции, а от голоморфных функций остается лишь их алгебраическая структура — то, что они образуют кольцо.

Определение 2. *Пучком* некоторых алгебраических структур (нас будут интересовать лишь кольца или группы) над топологическим пространством X (*базой* пучка) называется

пара $(\mathscr{S}, \sigma)$, составленная из топологического пространства $\mathscr{S}$ и отображения $\sigma\colon \mathscr{S} \to X$ (*проекции*), если выполняются следующие условия:

1) проекция σ является локальным гомеоморфизмом всюду на $\mathscr{S}$;

2) для каждой точки $P \in X$ в прообразе $\mathscr{S}_P = \sigma^{-1}(P)$, называемом *стеблем* пучка над P, введена алгебраическая структура;

3) алгебраические операции в стеблях непрерывны в топологии $\mathscr{S}$.

Таким образом, описанное выше топологическое пространство $\mathcal{O}$ ростков голоморфных функций с проекцией π является пучком колец над комплексно аналитическим многообразием M. Этот пример будет для нас основным, ниже мы введем и другие примеры пучков колец и групп.

Понятие пучка отражает полную локализацию изучаемых объектов. Однако практическая ценность этого понятия определяется главным образом тем, что оно позволяет переходить и к не полностью локализованным, а иногда и к глобальным объектам. Такой переход обобщает переход от ростков $\mathfrak{f}_P$ из пучка $\mathcal{O}$[1]) к функциям f, голоморфным в окрестности точки P, а затем — если это возможно — к функциям, голоморфным на всем многообразии M. Поэтому теория пучков дает весьма мощные методы решения ряда задач, в которых от локальных свойств нужно переходить к глобальным.

Описанный сейчас переход осуществляется при помощи важного понятия сечения.

Определение 3. *Сечением* пучка $(\mathscr{S}, \sigma)$ над открытым множеством $U \subset X$ называется непрерывное отображение $f\colon U \to \mathscr{S}$ такое, что композиция $\sigma \circ f$ является в U тождественным отображением.

Таким образом, сечения — это обращения сужений проекции σ на множества $\tilde{U} \subset \mathscr{S}$. Условие 1) в определении пучка показывает, что в достаточно мелких окрестностях каждой точки $P \in X$ сечения существуют. Совокупность всех сечений пучка над открытым множеством $U \subset X$ мы будем обозначать символом

$$\mathscr{S}_U = \Gamma(U, \mathscr{S}). \tag{3}$$

Заметим, что в силу локальной гомеоморфности проекции сечения над связной окрестностью $U \subset X$ обладают таким свойством: если два сечения f и g из $\mathscr{S}_U$ совпадают в какой-

[1]) Здесь мы пишем $\mathcal{O}$ вместо $(\mathcal{O}, \pi)$; аналогичные сокращения записи мы будем делать и дальше.

либо точке $P \in U$, то $f \equiv g$ всюду в U (доказательство повторяет доказательство леммы из п. 28). Это свойство вместе с условием 3) из определения пучка позволяет распространить на $\mathscr{S}_U$ алгебраические действия, введенные в стеблях $\mathscr{S}_P$ [1]).

Рассматриваемые в анализе пучки естественным образом возникают в результате предельного перехода из не вполне локализованных образований, которые называются предпучками.

Определение 4. Говорят, что над топологическим пространством X задан *предпучок* некоторых алгебраических структур, если

1) задана база $\{U\}$ открытых множеств топологии X, т. е. такой их набор, что любое открытое множество является объединением этих множеств;

2) с каждым множеством U базы ассоциирована алгебраическая структура $\mathscr{S}_U$;

3) с каждой парой U, $V \in \{U\}$ такой, что $V \subset U$, ассоциирован гомоморфизм

$$\rho_{UV}\colon \mathscr{S}_U \to \mathscr{S}_V, \tag{4}$$

причем выполняется следующее условие транзитивности: если U, V, $W \in \{U\}$ и $W \subset V \subset U$, то

$$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV} \tag{5}$$

(здесь $\circ$ обозначает композицию гомоморфизмов).

Важнейшим примером предпучка колец является набор функций, голоморфных в открытых множествах U, составляющих базу аналитического многообразия M, т. е. набор сечений $\Gamma(U, \mathcal{O}) = H(U)$. Гомоморфизмами ρ_{UV} здесь служат естественные отображения вложения кольца $H(U)$ в $H(V)$, которые каждой функции $f \in H(U)$ относят ее сужение $f|_V$ на множество $V \subset U$ (условие транзитивности при этом, очевидно, выполняется). Описанное выше построение пучка $\mathcal{O}$, по существу, можно рассматривать как процесс локализации, приводящий к $\mathcal{O}$ от этого предпучка.

Аналогичный процесс локализации, приводящий от предпучков к пучкам, можно провести и в общем случае. Это делается при помощи так называемого топологического предела. Пусть дан некоторый предпучок $\{\mathscr{S}_U\}$ над топологическим

---

[1]) Пусть даны $f, g \in \mathscr{S}_U$, где U — область. Фиксируем точку $P \in U$ и обозначим $\mathbf{f} = \mathbf{f}_P$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_P$; так как $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathscr{S}_P$, то определен элемент $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g} \in \mathscr{S}_P$. Обращение σ в точке $\mathbf{h}$ является сечением в некоторой окрестности P, и нетрудно видеть, что оно продолжается на U до сечения $h \in \mathscr{S}_U$. Мы полагаем $f + g = h$; в наших условиях легко доказать, что это определение не зависит от выбора точки $P \in U$.

пространством X. Для каждой точки $P \in X$ мы рассмотрим базу $\mathcal{U}_P$ окрестностей этой точки; семейство $\mathcal{U}_P$ частично упорядочено отношением вложения. Назовем два элемента f_U и g_V, принадлежащие соответственно $\mathcal{S}_U$ и $\mathcal{S}_V$, *эквивалентными* в точке P, если существует окрестность $W \in \mathcal{U}_P$ такая, что $W \subset U \cap V$ и

$$\rho_{UW}(f_U) = \rho_{VW}(g_V). \tag{6}$$

Множество классов эквивалентности по этому отношению называется *топологическим пределом* и обозначается символом

$$\mathcal{S}_P = \lim_{U \in \mathcal{U}_P} \operatorname{top} \mathcal{S}_U. \tag{7}$$

В множестве $\mathcal{S}_P$ естественным образом вводится структура, заданная в $\mathcal{S}_U$.

Покажем теперь, что $\bigcup_{P \in X} \mathcal{S}_P = \mathcal{S}$ можно рассматривать как пучок над пространством X. Проекция $\sigma\colon \mathcal{S} \to X$ определяется просто как отображение $\mathcal{S}_P \to P$. Далее, для каждой окрестности $U \in \mathcal{U}_P$ можно построить отображение $\rho_{UP}\colon \mathcal{S}_U \to \mathcal{S}_P$, которое сопоставляет каждому элементу $f \in \mathcal{S}_U$ класс эквивалентности $\mathfrak{f}_P \in \mathcal{S}_P$, содержащий этот элемент (отображение ρ_{UP} можно рассматривать как гомоморфизм соответствующих алгебраических структур). При помощи построенных отображений мы для каждого элемента $\mathfrak{f} \in \mathcal{S}_P$ и окрестности $U \in \mathcal{U}_P$ определим множество

$$\tilde{U}_{\mathfrak{f}} = \bigcup_{Q \in U} \rho_{UQ}(f) \subset \mathcal{S}.$$

Набор $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_{\mathfrak{f}}\}$ для всех $\mathfrak{f} \in \mathcal{S}$ и всех U из базы открытых множеств X можно принять в качестве такой же базы для топологии в $\mathcal{S}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что если $\tilde{U}_{\mathfrak{f}}$, $\tilde{V}_{\mathfrak{g}} \in \tilde{\mathcal{U}}$ и $\Pi = \tilde{U}_{\mathfrak{f}} \cap \tilde{V}_{\mathfrak{g}} \neq \varnothing$, то для каждого элемента $\mathfrak{h}_P \in \Pi$ в $\tilde{\mathcal{U}}$ найдется $\tilde{W}_{\mathfrak{h}_P} \subset \Pi$. По построению $P \subset U \cap V$ и $\mathfrak{h}_P = \rho_{UP}(f) = \rho_{VP}(g)$, где f и g соответственно принадлежат $\mathcal{S}_U$ и $\mathcal{S}_V$. По определению топологического предела существует открытое множество $W \subset U \cap V$, содержащее точку P и такое, что $\rho_{UW}(f) = \rho_{VW}(g)$; полагая $h = \rho_{UW}(f)$, мы получаем элемент $\mathcal{S}_W$, и тогда искомой окрестностью $\tilde{W}_{\mathfrak{h}_P}$ будет $\bigcup_{Q \in W} \rho_{WQ}(h)$. Наконец, очевидно, что в построенной топологии проекция σ локально гомеоморфна, а алгебраические операции непрерывны.

Замечание. Мы обозначаем одним символом $\mathscr{S}_U$ кольцо некоторого предпучка, ассоциированное с открытым множеством $U \subset X$, и совокупность сечений над U пучка $\mathscr{S}$, который получается в пределе из этого предпучка. Дело в том, что при достаточно общих предположениях эти кольца изоморфны[1]) и нет опасности их смешать.

Примеры. Символом $\mathscr{U}$ мы всюду будем обозначать базу открытых множеств пространства, над которым рассматриваются пучки и предпучки.

1. Пучок $\mathcal{O}$ *ростков голоморфных функций* над комплексно аналитическим многообразием M и соответствующий ему предпучок $\{\mathcal{O}_U\}$ функций, голоморфных на множествах $U \in \mathscr{U}$, мы уже рассматривали. Множество $\mathcal{O}_U = \Gamma(U, \mathcal{O})$ является также множеством сечений пучка $\mathcal{O}$ над U.

2. Предпучок $\{\mathscr{M}_U\}$ функций, *мероморфных* на множествах $U \in \mathscr{U}$, был определен в начале этой главы. Его можно рассматривать как предпучок полей, причем гомоморфизмами $\rho_{UV}\colon \mathscr{M}_U \to \mathscr{M}_V$, как и в предыдущем примере, являются сужения (они определены, если $V \subset U$). Пучок $\mathscr{M}$, который получается локализацией этого предпучка, называется *пучком ростков мероморфных функций*. Последний можно определить и независимо от предпучка, если ввести для каждой точки $P \in M$ стебель $\mathscr{M}_P$ как поле отношений в кольце $\mathcal{O}_P$. Под этим понимается следующее: упорядоченные пары $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ и $(\mathbf{f}', \mathbf{g}')$ ростков из $\mathcal{O}_P$ (где $\mathbf{g}, \mathbf{g}' \neq 0$) считаются эквивалентными, если $\mathbf{fg}' = \mathbf{f}'\mathbf{g}$; классы эквивалентности (они называются отношениями) обозначаются символом $\mathbf{m} = \mathbf{f}/\mathbf{g}$ и объявляются *ростками* мероморфных функций. Так как $\mathcal{O}_P$ — коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля, то ростки (отношения) $\mathbf{m}$ образуют коммутативное поле $\mathscr{M}_P$. Объединение

$$\mathscr{M} = \bigcup_{P \in M} \mathscr{M}_P \tag{8}$$

можно рассматривать как пучок полей.

3. Пучок $\mathscr{F}^{(p, q)}$ *ростков дифференциальных форм* бистепени (p, q) над комплексным многообразием M действительной размерности $2n$ можно определить следующим образом. Фиксируем точку $P \in M$ и рассмотрим совокупность дифференциальных форм, каждая из которых в некоторой окрестности $U_P \subset M$ представляется в локальных координатах $z = (z_1, \ldots, z_n)$,

---

[1]) Доказательство см. в книге: Р. Ганнинг и Х. Росси, Аналитические функции нескольких комплексных переменных, «Мир», М., 1969, гл. IV, раздел А, лемма 3.

$\bar{z}=(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, действующих в U_P, в виде

$$\omega=\sum_{I, J} f_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J, \tag{9}$$

где $I=(i_1, \ldots, i_p)$, $J=(j_1, \ldots, j_q)$, $1 \leqslant i_\mu, j_\nu \leqslant n$, а коэффициенты f_{IJ} — функции из $C^\infty(U_P)$, кососимметрические по индексам. Две такие формы, (9) и $\omega'=\sum f'_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J$, будем считать эквивалентными, если существует окрестность точки P, в которой $f'_{IJ}=f_{IJ}$ для всех I, J. Классы эквивалентности по этому отношению назовем *ростками* форм бистепени (p, q) в точке P. Совокупность таких ростков обозначим через $\mathscr{F}_P^{(p, q)}$ и будем рассматривать как абелеву группу относительно покоэффициентного сложения [1]). Объединение

$$\mathscr{F}^{(p, q)}=\bigcup_{P \in M} \mathscr{F}_P^{(p, q)} \tag{10}$$

мы будем рассматривать как пучок групп. Топология и проекция в нем вводятся точно так же, как в пучке $\mathscr{O}$.

В частности, $\mathscr{F}^{(0, 0)}=\mathscr{F}$ представляет собой *пучок ростков функций* из $C^\infty(M)$.

Можно рассматривать также предпучок, соответствующий пучку $\mathscr{F}^{(p, q)}$, который состоит из совокупностей $\mathscr{F}_U^{(p, q)}$, $U \in \mathscr{U}$, форм бистепени (p, q), принадлежащих $C^\infty(U)$. Гомоморфизмами ρ_{UV} здесь по-прежнему служат сужения.

4. *Постоянные пучки* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Пусть каждой точке $P \in M$ соответствует один и тот же объект, скажем кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Тогда мы будем говорить, что над M задан постоянный пучок, и будем обозначать его тем же символом, что и этот объект (в нашем случае — символом $\mathbb{Z}$). Сечением такого пучка над связной окрестностью $U \subset M$ служит набор функций, каждая из которых постоянна в U (в нашем случае — целочисленная постоянная).

35. Группы когомологий. Начнем с определения этих групп для покрытий. Как мы сейчас увидим, это определение обобщает определение, которое было дано в п. 31 при изучении аддитивной проблемы Кузена. Пусть X — топологическое пространство и над ним задан пучок абелевых групп $\mathscr{S}$. Рассмотрим открытое покрытие $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$, пространства X и для любого целого числа $p \geqslant 0$ построим мультииндекс $\alpha=(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in$

[1]) Разумеется, сумма ростков $\omega+\omega'$ определяется как росток, соответствующий сумме $\omega+\omega'$, где $\omega \in \omega$ и $\omega' \in \omega'$.

$\in A^{p+1} = A \times \ldots \times A$; символом

$$U_\alpha = U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p} \tag{1}$$

обозначим пересечение множеств покрытия.

Определение 1. *Коцепью* порядка p с коэффициентами в пучке $\mathscr{S}$ для данного покрытия $\mathscr{U}$ мы будем называть функцию h, которая каждому мультииндексу $\alpha \in A^{p+1}$ относит некоторое сечение $h_\alpha \in \mathscr{S}_{U_\alpha} = \Gamma(U_\alpha, \mathscr{S})$ пучка $\mathscr{S}$ над U_α, и притом так, что h_α является кососимметрической функцией индексов $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$, составляющих α. Если U_α пусто, то мы будем считать, что $h_\alpha = 0$. Множество всех коцепей порядка p с коэффициентами в $\mathscr{S}$ образует набор групп, который мы обозначим символом $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{S})$.

Определим теперь *кограничный оператор* δ, который каждой коцепи h порядка p относит коцепь δh порядка $p+1$ по правилу

$$(\delta h)_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum_{\nu=0}^{p+1} (-1)^\nu h_{\alpha_0 \ldots \overset{\vee}{\alpha_\nu} \ldots \alpha_{p+1}} \tag{2}$$

(справа индекс α_ν опускается). Отображение

$$\delta\colon C^p(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \to C^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{S}), \tag{3}$$

очевидно, является гомоморфизмом соответствующих групп коцепей.

Частными случаями кограничного оператора для пучка форм $\mathscr{F}^{(p, q)}$ являются операторы дифференцирования d (по всем переменным z, $\bar{z}$) и $\bar{\partial}$ (по переменным $\bar{z}$). Как и для этих операторов (см. п. 13), в общем случае доказывается, что квадрат оператора δ равен 0:

$$\delta \cdot \delta = 0. \tag{4}$$

Определение. 2. *Коциклом* порядка p называется коцепь h, для которой $\delta h = 0$; совокупность

$$Z^p(\mathscr{U}, \mathscr{S}) = \{h \in C^p(\mathscr{U}, \mathscr{S})\colon \delta h = 0\} \tag{5}$$

называется *группой*[1]) *коциклов* (с коэффициентами в $\mathscr{S}$). Коцикл $h \in C^p$ называется *когомологичным нулю* или *кограницей*, если существует коцепь $g \in C^{p-1}$ такая, что $\delta g = h$; группу таких коциклов мы будем обозначать символом $B^p(\mathscr{U}, \mathscr{S})$.

[1]) Конечно, $Z^p(\mathscr{U}, \mathscr{S})$, как и вводимые ниже аналогичные объекты, является не группой, а набором групп $Z^p(U_\alpha, \mathscr{S})$, $\alpha \in A^{p+1}$; мы называем их просто группами, чтобы не усложнять и без того громоздкой терминологии.

Она является подгруппой группы (5), и факторгруппа

$$H^p(\mathscr{U}, \mathscr{S}) = Z^p(\mathscr{U}, \mathscr{S})/B^p(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \tag{6}$$

называется p-й *группой когомологий* (с коэффициентами в $\mathscr{S}$) для покрытия $\mathscr{U}$.

В частном случае $p=1$ коцепи $\{h_{\alpha_0\alpha_1}\}$ определены на пересечениях $U_{\alpha_0\alpha_1}$ множеств покрытия так, что $h_{\alpha_0\alpha_1} + h_{\alpha_1\alpha_0} = 0$ (кососимметричность по индексам). Кограничный оператор переводит их в коцепи порядка 2 такие, что $(\delta h)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = h_{\alpha_1\alpha_2} - h_{\alpha_0\alpha_2} + h_{\alpha_0\alpha_1}$ в $U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$. Поэтому коциклами будут такие коцепи, для которых еще $h_{\alpha_1\alpha_2} + h_{\alpha_2\alpha_0} + h_{\alpha_0\alpha_1} = 0$. Кограницей коцепи $\{h_\alpha\}$ порядка 0 является коцепь $(\delta h)_{\alpha_0\alpha_1} = h_{\alpha_1} - h_{\alpha_0}$, следовательно, когомологичными коциклами первого порядка будут те, для которых $h_{\alpha_0\alpha_1} = h_{\alpha_1} - h_{\alpha_0}$. Мы видим, что введенная здесь терминология при $p=1$ совпадает с той, которую мы рассматривали в п. 31, а определенная там группа когомологий есть группа $H^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$.

Рассмотрим еще группу когомологий нулевого порядка. Коциклами, как показано выше, будут коцепи $\{h_\alpha\}$, для которых $h_{\alpha_1} - h_{\alpha_0} = 0$ в каждом пересечении $U_{\alpha_0\alpha_1}$. Следовательно, каждый коцикл h нулевого порядка определяет сечение пучка $\mathscr{S}$ над всем пространством X, т. е. *глобальное сечение* — элемент группы $\Gamma(X, \mathscr{S})$, сужение которого на каждое U_α совпадает с h_α. Коцепью -1-го порядка по определению считается пустое множество, и, значит, кограницей нулевого порядка является лишь нулевой коцикл. Факторизация по нему тривиальна, следовательно, справедлива

Теорема 1. *Нулевая группа когомологий с коэффициентами в пучке $\mathscr{S}$ над пространством X для любого покрытия $\mathscr{U}$ изоморфна группе глобальных сечений этого пучка*:

$$H^0(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \approx \Gamma(X, \mathscr{S}). \tag{7}$$

Теперь мы хотим перейти от групп когомологий для покрытий к группам когомологий самого пространства. Для этого нужно построить процесс локализации, аналогичный переходу от предпучков к пучкам в предыдущем пункте. Именно, мы частично упорядочим множество покрытий по отношению включения, определим гомоморфизмы, связывающие группы для двух покрытий, из которых одно мельче другого, и при помощи таких гомоморфизмов перейдем к топологическому пределу.

Пусть даны два открытых покрытия $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\mathscr{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$; будем говорить, что второе покрытие *мельче*

первого (обозначение: $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$), если существует отображение

$$\rho\colon B \to A \tag{8}$$

такое, что $V_\beta \subset U_{\rho(\beta)}$ для любого $\beta \in B$. При заданном ρ каждой коцепи $h \in C^p(\mathcal{U})$ можно сопоставить коцепь $\rho h \in C^p(\mathcal{V})$, полагая для каждого мультииндекса $\beta \in B^{p+1}$ значение $(\rho h)_\beta$ равным сужению $h_{\rho(\beta)}$ на V_β [1]). Так как у нас $\delta(\rho h) = \rho(\delta h)$ для любой коцепи h (здесь δ — кограничный оператор), то ρ индуцирует отображение

$$\rho^*\colon H^p(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^p(\mathcal{V}, \mathcal{S}), \tag{9}$$

которое, очевидно, является гомоморфизмом групп.

Лемма. *Если* $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$, *то гомоморфизм* ρ^* *не зависит от выбора отображения* (8).

◀ Для $p = 0$ утверждение очевидно в силу теоремы 1, поэтому можно считать, что $p \geqslant 1$. Пусть наряду с ρ задано еще отображение $\rho'\colon B \to A$ такое, что $V_\beta \subset U_{\rho'(\beta)}$ для всех $\beta \in B$. Определим отображение $\sigma\colon C^{p+1}(\mathcal{U}) \to C^p(\mathcal{V})$, положив для каждого $\beta \in B^{p+1}$ с упорядоченными индексами $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_p$ и каждой коцепи $h \in C^{p+1}(\mathcal{U})$

$$(\sigma h)_\beta = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu h_{\rho(\beta_0) \ldots \rho(\beta_\nu)\, \rho'(\beta_\nu) \ldots \rho'(\beta_p)}. \tag{10}$$

Прямой подсчет [2]) показывает, что для всех $h \in C^{p+1}(\mathcal{U})$

$$\sigma(\delta h) + \delta(\sigma h) = \rho' h - \rho h. \tag{11}$$

---

[1]) В соответствии с принятыми выше обозначениями у нас $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_p)$, $\rho(\beta) = (\rho(\beta_0), \ldots, \rho(\beta_p))$ и $V_\beta = V_{\beta_0} \cap \ldots \cup V_{\beta_p}$.

[2]) Проведем этот подсчет для $p = 1$. Пусть $\beta = (\beta_0, \beta_1)$, $\rho(\beta_\nu) = \alpha_\nu$, $\rho'(\beta_\nu) = \alpha'_\nu$; имеем

$$(\rho' h - \rho h)_\beta = h_{\alpha'_0 \alpha'_1} - h_{\alpha_0 \alpha_1}.$$

С другой стороны, $(\delta h)_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} = h_{\alpha_1 \alpha_2} - h_{\alpha_0 \alpha_2} + h_{\alpha_0 \alpha_1}$ и, значит,

$$[\sigma(\delta h)]_\beta = (\delta h)_{\alpha_0 \alpha'_0 \alpha'_1} - (\delta h)_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha'_1} = h_{\alpha'_0 \alpha'_1} + h_{\alpha_0 \alpha'_0} - \left(h_{\alpha_1 \alpha'_1} + h_{\alpha_0 \alpha_1}\right).$$

Но по формуле, соответствующей (10) при $p = 0$, получаем $(\sigma h)_{\beta_0} = h_{\alpha_0 \alpha'_0}$, откуда $[\delta(\sigma h)]_\beta = (\sigma h)_{\beta_1} - (\sigma h)_{\beta_0} = h_{\alpha_1 \alpha'_1} - h_{\alpha_0 \alpha'_0}$. Таким образом

$$[\sigma(\delta h) + \delta(\sigma h)]_\beta = h_{\alpha'_0 \alpha'_1} - h_{\alpha_0 \alpha_1}.$$

В частности, если h — коцикл ($\delta h = 0$), то $\rho' h - \rho h = \delta(\sigma h)$, а значит, ρh и $\rho' h$ принадлежат одному классу эквивалентности при факторизации по когранicам. Отсюда и видно, что ρ и ρ' соответствует один и тот же гомоморфизм группы $H^p(\mathscr{U})$ в $H^p(\mathscr{V})$ ▶

По этой лемме $\rho^* = \rho_{\mathscr{U}\mathscr{V}}$ зависит лишь от покрытий (при заданных X и $\mathscr{S}$). Из нее видно также, что он удовлетворяет условию транзитивности: если $\mathscr{W} \prec \mathscr{V} \prec \mathscr{U}$, то

$$\rho_{\mathscr{U}\mathscr{W}} = \rho_{\mathscr{V}\mathscr{W}} \circ \rho_{\mathscr{U}\mathscr{V}}. \tag{12}$$

Таким образом, мы действительно имеем ту же ситуацию, что и в предыдущем пункте (с той лишь разницей, что вместо множеств здесь рассматриваются системы множеств — покрытия), и можем осуществить желаемую локализацию.

Для этого рассмотрим всевозможные открытые покрытия пространства X и условимся считать элементы $f \in H^p(\mathscr{U})$ и $g \in H^p(\mathscr{V})$ эквивалентными, если существует покрытие $\mathscr{W}$ такое, что $\mathscr{W} \prec \mathscr{U}$, $\mathscr{W} \prec \mathscr{V}$ и притом $\rho_{\mathscr{U}\mathscr{W}}(f) = \rho_{\mathscr{V}\mathscr{W}}(g)$.

Определение 3. Множество классов эквивалентности по этому отношению, т. е.

$$\varinjlim_{\mathscr{U}} \operatorname{top} H^p(\mathscr{U}, \mathscr{S}) = H^p(X, \mathscr{S}), \tag{13}$$

называется p-й *группой когомологий пространства* X (с коэффициентами в пучке $\mathscr{S}$).

Замечание. Из этого определения видно, что если для пространства X существуют сколь угодно мелкие покрытия $\mathscr{U}$, для которых $H^p(\mathscr{U}, \mathscr{S}) = 0$, то для этого пространства и $H^p(X, \mathscr{S}) = 0$.

36. Точные последовательности пучков. Начнем с понятия отображения пучков, которое вполне аналогично понятию отображения областей наложения над $\mathbb{C}^n$ (см. п. 28). Пусть даны два пучка $(\mathscr{S}, \sigma)$ и $(\mathscr{T}, \tau)$ над одним и тем же пространством X. Отображением пучков

$$\varphi\colon \mathscr{S} \to \mathscr{T} \tag{1}$$

мы назовем такое непрерывное отображение топологического пространства $\mathscr{S}$ в $\mathscr{T}$, для которого всюду в $\mathscr{S}$

$$\tau \circ \varphi = \sigma. \tag{2}$$

Понятие отображения пучков введено так, что оно сохраняет стебли: для любой точки $P \in X$ имеем $\varphi(\mathscr{S}_P) \subset \mathscr{T}_P$. Оно сохраняет также и сечения: если f — произвольное сечение пучка $\mathscr{S}_U$ над открытым множеством $U \subset X$, то отображение

$\varphi \circ f$ непрерывно в U и $\tau \circ (\varphi \circ f) = \sigma \circ f$ тождественно (по определению сечения $\mathscr{S}_U$), но это означает, что $\varphi \circ f \in \mathscr{T}_U$.

Отображение $\varphi\colon \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ называется *гомоморфизмом пучков*, если оно является отображением этих пучков и, кроме того, сохраняет алгебраические операции во всех стеблях. Гомоморфизм пучков называется их *изоморфизмом*, если φ является взаимно однозначным отображением на $\mathscr{T}$.

Далее, пусть $(\mathscr{S}, \sigma)$ — пучок абелевых групп над X и множество $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$; будем говорить, что $(\mathscr{T}, \sigma)$ является *подпучком* пучка $(\mathscr{S}, \sigma)$, если: 1) $\mathscr{T}$ открыто в $\mathscr{S}$, 2) $\sigma(\mathscr{T}) = X$ и 3) для любой точки $P \in X$ стебель $\mathscr{T}_P$ является подгруппой группы $\mathscr{S}_P$.

Если $\mathscr{T}$ является подпучком пучка абелевых групп $\mathscr{S}$, то для каждой точки P базы X можно образовать факторгруппу $\mathscr{F}_P = \mathscr{S}_P/\mathscr{T}_P$; объединение $\mathscr{F}$ таких факторгрупп для всех $P \in X$, наделенное фактортопологией[1]), называется *факторпучком* на X и обозначается символом

$$\mathscr{S}/\mathscr{T} = \bigcup_{P \in X} \mathscr{S}_P/\mathscr{T}_P. \tag{3}$$

Примеры.

1. Пусть 0 — тривиальный пучок над комплексно аналитическим многообразием M (в каждой точке $P \in M$ стебель этого пучка состоит из одного нуля), $\mathbb{C}$ — постоянный пучок, $\mathscr{O}$ — пучок ростков голоморфных, а $\mathscr{F}$ — пучок ростков бесконечно дифференцируемых функций над тем же M. Здесь каждый предыдущий пучок является подпучком следующего (проверьте условие открытости из определения подпучка).

2. Пучок $\mathscr{O}$ над комплексно аналитическим многообразием M является подпучком пучка $\mathscr{M}$ ростков мероморфных функций на M. Будем рассматривать $\mathscr{O}$ и $\mathscr{M}$ как пучки *аддитивных групп* (относительно сложения); тогда для любой $P \in M$ стебель $\mathscr{O}_P$ будет подгруппой $\mathscr{M}_P$, и можно образовать факторпучок

$$\mathscr{M}/\mathscr{O} = \bigcup_{P \in M} \mathscr{M}_P/\mathscr{O}_P. \tag{4}$$

Элементами этого факторпучка являются классы ростков мероморфных в точке $P \in M$ функций, разность между которыми является ростком голоморфной функции. (Иными словами, элементами $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ являются классы эквивалентных ростков $\mathbf{f}_P \in \mathscr{M}_P$, где $\mathbf{f}'_P$ и $\mathbf{f}''_P$ считаются эквивалентными, если $\mathbf{f}'_P - \mathbf{f}''_P \in \mathscr{O}_P$.) Как мы скоро увидим, этот пучок связан с первой проблемой Кузена.

[1]) Под фактортопологией понимается топология в $\mathscr{S}/\mathscr{T}$, в которой открытыми объявляются множества классов эквивалентности открытых множеств пространства $\mathscr{S}$.

3. Удалим из пучка $\mathscr{M}$ ростки, соответствующие нулевому сечению (т. е. функции, тождественно равной нулю на M); тогда $\mathscr{M}^* = \mathscr{M} \setminus \{0\}$ можно рассматривать как пучок мультипликативных групп с умножением как групповой операцией. Пучок $\mathscr{O}^*$ пусть состоит из обратимых элементов колец $\mathscr{O}_P$, $P \in M$, т. е. элементов, соответствующих функциям, которые не обращаются в 0 в точке P. Очевидно, $\mathscr{O}^*$ является подпучком $\mathscr{M}^*$, и можно образовать факторпучок

$$\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^* = \bigcup_{P \in M} \mathscr{M}^*_P/\mathscr{O}^*_P. \tag{5}$$

Элементами его служат классы ростков мероморфных функций, не равных тождественно нулю, частное которых является ростком голоморфной функции, не обращающейся в нуль (иными словами, это классы эквивалентных ростков $\mathbf{f} \in \mathscr{M}^*$, где $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{f}''$ считаются эквивалентными, если $\mathbf{f}'(\mathbf{f}'')^{-1} \in \mathscr{O}^*$). Как мы скоро увидим, этот пучок связан со второй проблемой Кузена.

Переходим к определению основного в этом пункте понятия точной последовательности пучков. Пусть даны два гомоморфизма пучков абелевых групп:

$$\mathscr{S}_0 \xrightarrow{\varphi_1} \mathscr{S}_1 \xrightarrow{\varphi_2} \mathscr{S}_2; \tag{6}$$

будем говорить, что последовательность (6) *точна* в $\mathscr{S}_1$, если

$$\operatorname{im} \varphi_1 = \ker \varphi_2. \tag{7}$$

Напомним, что символом $\operatorname{im} \varphi_1 = \varphi_1(\mathscr{S}_0)$ обозначается подгруппа элементов $\mathscr{S}_1$, которые являются образами элементов $\mathscr{S}_0$ (образ гомоморфизма φ_1), а символом $\ker \varphi_2$ — подгруппа из $\mathscr{S}_1$, образованная элементами, которые φ_2 переводит в нуль группы $\mathscr{S}_2$ (ядро гомоморфизма φ_2). Таким образом, точность последовательности (6) означает, что φ_2 переводит в 0 те и только те элементы, которые φ_1 приносит из $\mathscr{S}_0$.

Последовательность из любого числа пучков абелевых групп

$$\ldots \to \mathscr{S}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} \mathscr{S}_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathscr{S}_{i+1} \to \ldots \tag{8}$$

называется *точной*, если она точна в каждом $\mathscr{S}_i$.

Примеры. 1. Точность последовательности

$$0 \xrightarrow{i} \mathscr{S}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{S}_2 \xrightarrow{j} 0, \tag{9}$$

где крайние элементы — тривиальные пучки (все стебли которых — группы, состоящие из одного нуля), а i — отображение вложения, означает, что φ является изоморфизмом $\mathscr{S}_1$

на $\mathscr{S}_2$. В самом деле, так как $\ker\varphi = \operatorname{im} i = 0$, то отображение φ взаимно однозначно, а так как $\operatorname{im}\varphi = \ker j = \mathscr{S}_2$, то это отображение на $\mathscr{S}_2$.

2. Последовательность

$$0 \to \mathscr{S} \xrightarrow{i} \mathscr{T} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{T}/\mathscr{S} \to 0, \tag{10}$$

где $\mathscr{S}$ — подпучок $\mathscr{T}$, i — отображение вложения, а φ — естественный гомоморфизм, который каждому элементу из $\mathscr{T}$ сопоставляет класс эквивалентности, его содержащий, точна. В самом деле, точность (10) в $\mathscr{S}$ следует из того, что i взаимно однозначно, в члене $\mathscr{T}$ — из того, что $\varphi \circ i$ преобразует $\mathscr{S}$ в нуль, на месте $\mathscr{T}/\mathscr{S}$ — из того, что φ — отображение на.

3. Вообще, точность последовательности пучков абелевых групп

$$\mathscr{S}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathscr{S}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathscr{S}_3 \to 0 \tag{11}$$

означает, что φ_2 — гомоморфизм на и

$$\mathscr{S}_3 \approx \mathscr{S}_2/\varphi_1(\mathscr{S}_1) \tag{12}$$

образ $\operatorname{im}\varphi_2 = \mathscr{S}_3$ группы $\mathscr{S}_2$ изоморфен ее факторгруппе по ядру $\ker\varphi_2 = \varphi_1(\mathscr{S}_1)$).

В заключение приведем идею доказательства[1]) одной из двух теорем, на которых основываются приложения теории пучков в анализе. О второй из этих теорем мы будем говорить в следующем параграфе.

Теорема I (о точных последовательностях). *Пусть пространство X хаусдорфово и имеет счетную базу открытых множеств. Тогда всякой точной последовательности пучков над X*

$$0 \to \mathscr{S}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{S}'' \to 0 \tag{13}$$

соответствует точная последовательность групп когомологий

$$0 \to H^0(X, \mathscr{S}') \xrightarrow{\varphi^*} H^0(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\psi^*} H^0(X, \mathscr{S}'') \xrightarrow{\delta^*} \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathscr{S}') \xrightarrow{\varphi^*} H^1(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\psi^*} H^1(X, \mathscr{S}'') \xrightarrow{\delta^*} H^2(X, \mathscr{S}') \to \ldots \tag{14}$$

и так далее, по всем размерностям.

◀ Прежде всего сопоставим гомоморфизмам пучков гомоморфизмы соответствующих групп когомологий. Это делается так: возьмем произвольное открытое множество $U \subset X$ и определим гомоморфизм сечений $\tilde{\varphi}$: $\Gamma(U, \mathscr{S}') \to \Gamma(U, \mathscr{S})$, положив

[1]) Подробное доказательство см. в курсах Хёрмандера или Ганнинга и Росси.

$\tilde{\varphi}(f)=\varphi\circ f$ в каждой точке $P\in U$ для любой $f\in\Gamma(U,\ \mathscr{S}')$. От сечений естественным образом переходим к коцепям, и тогда возникает гомоморфизм $\tilde{\varphi}$: $C^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}')\to C^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S})$. Так как $\tilde{\varphi}$ коммутирует с оператором кограницы δ (имеем $\tilde{\varphi}\delta=\delta\tilde{\varphi}$), то по $\tilde{\varphi}$ можно построить гомоморфизм φ^*: $H^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}')\to H^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S})$ групп когомологий для покрытий [1]), а от него при помощи топологического предела перейти к гомоморфизму групп когомологий самого пространства φ^*: $H^p(X,\ \mathscr{S}')\to H^p(X,\ \mathscr{S})$. Точно так же по ψ строится гомоморфизм ψ^*: $H^p(X,\ \mathscr{S})\to H^p(X,\ \mathscr{S}'')$.

Остается построить гомоморфизм δ^*, повышающий размерность группы. Для этого рассмотрим какое-либо покрытие $\mathscr{U}$ и последовательность групп коцепей

$$0\to C^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}')\xrightarrow{\tilde{\Phi}} C^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S})\xrightarrow{\tilde{\Psi}} C^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}''). \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что она точна в силу точности последовательности (13). Однако $\tilde{\psi}$, вообще говоря, не является отображением на $C^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}'')$, и мы обозначим $\tilde{C}^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}'')=\operatorname{im}\tilde{\psi}$. Сейчас мы хотим построить отображение $\tilde{H}^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}'')=\tilde{Z}/\tilde{B}$, где $\tilde{Z}$ — подгруппа коциклов из $\tilde{C}^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}'')$, а $\tilde{B}$ — подгруппа кограниц, в группу $H^{p+1}(\mathscr{U},\ \mathscr{S}')$. Для этого возьмем коцикл $h\in\tilde{Z}$; существует коцепь $g\in C^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S})$ такая, что $\tilde{\psi}(g)=h$. Она не является коциклом, но $\delta g\in C^{p+1}(\mathscr{U},\ \mathscr{S})$ и $\tilde{\psi}(\delta g)=\delta(\tilde{\psi}g)=\delta h=0$. В силу точности (15), где p заменено на $p+1$, найдется $f\in C^{p+1}(\mathscr{U},\ \mathscr{S}')$ такая, что $\tilde{\varphi}(f)=\delta g$, причем f — коцикл, ибо $\tilde{\varphi}(\delta f)=\delta(\tilde{\varphi}f)=\delta(\delta g)=0$ и, значит, $\delta f=0$, так как отображение $\tilde{\varphi}$ взаимно однозначно. Таким образом, мы построили отображение

$$\delta^*\colon\ h\xrightarrow{\tilde{\psi}^{-1}} g\xrightarrow{\delta}\delta g\xrightarrow{\tilde{\varphi}^{-1}} f$$

группы $\tilde{Z}$ в $Z^{p+1}(\mathscr{U},\ \mathscr{S}')$. Нетрудно проверить, что при этом когомологичные друг другу циклы переходят в когомологичные, так что фактически построен гомоморфизм δ^*: $\tilde{H}^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}'')\to H^{p+1}(\mathscr{U},\ \mathscr{S}')$. Наконец, в условиях, наложенных на пространство X, можно доказать, что топологический предел групп $\tilde{H}^p(\mathscr{U},\ \mathscr{S}'')$ будет совпадать с $H^p(X,\ \mathscr{S}'')$, и мы придем к нужному гомоморфизму

$$\delta^*\colon\ H^p(X,\ \mathscr{S}'')\to H^{p+1}(X,\ \mathscr{S}'). \tag{16}$$

Точность полученной последовательности (14) ясна из построений ▶

[1]) По аналогии с тем, что мы делали в предыдущем пункте для отображения ρ при измельчении покрытия.

§ 12. Применения

Основное содержание этого параграфа составляет исследование разрешимости проблем Кузена методами теории пучков. Приведем их формулировки в пучковых терминах для произвольного открытого покрытия $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$, комплексно аналитического многообразия M. При этом мы будем пользоваться обозначениями предыдущего параграфа.

Первая (аддитивная) проблема. В каждом U_α задана мероморфная функция $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{M})$ так, что во всех пересечениях $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ выполняется условие согласованности $f_\alpha - f_\beta \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathscr{O})$. Требуется найти функцию $f \in \Gamma(M, \mathscr{M})$ так, чтобы $f - f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{O})$ для всех $\alpha \in A$.

Вторая (мультипликативная) проблема. В каждом U_α задана (не равная тождественно нулю) мероморфная [1]) функция $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{M}^*)$ так, что во всех пересечениях $U_{\alpha\beta}$ выполняется условие согласованности $f_\alpha / f_\beta \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathscr{O}^*)$. Требуется найти функцию $f \in \Gamma(M, \mathscr{M})$ так, чтобы $f/f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}^*)$ для всех $\alpha \in A$.

Центральным пунктом решения этих проблем является установление связи между локально заданными сечениями пучка в $U_{\alpha\beta}$ и глобальным сечением этого пучка над всем многообразием. Методы теории пучков хорошо приспособлены для выяснения такой связи.

Важной особенностью этих методов является также то, что они позволяют четко разделить топологическую и аналитическую части проблемы. В рассматриваемых нами приложениях топологическая часть проблемы решается теоремой о точных последовательностях — теоремой I из предыдущего пункта. Следуя Л. Хёрмандеру, мы используем для преодоления аналитических трудностей теорему существования решений неоднородных систем Коши — Римана.

37. Решение первой проблемы Кузена. Мы воспользуемся той же схемой, которая применялась в п. 32 для решения этой проблемы в случае поликругов. Именно, разрешимость мы выведем из тривиальности группы когомологий с коэффициентами в пучке ростков голоморфных функций, а тривиальность этой группы установим в два этапа: сначала докажем тривиальность такой же группы дифференциальных форм, а затем — изоморфность обеих групп.

Все необходимое для первого этапа доказательства содержится в следующей теореме Хёрмандера:

---

[1]) Вторая проблема Кузена формулируется здесь в более общем виде, чем в § 10: вместо голоморфных рассматриваются мероморфные функции.

Теорема II. *Пусть D — произвольная область голоморфности. Тогда для любой дифференциальной формы $\Omega \in C^\infty(D)$ бистепени $(0, q)$, $q>0$, для которой $\bar\partial\Omega = 0$, существует форма $\omega \in C^\infty(D)$ бистепени $(0, q-1)$ такая, что*

$$\bar\partial\omega = \Omega.$$

Иными словами, в области голоморфности всякая замкнутая (относительно $\bar\partial$) форма точна.

Под областью голоморфности здесь, как и всюду в этом параграфе, понимается произвольная область голоморфности над пространством $\mathbb{C}^n$ или, если угодно, произвольное многообразие Штейна (см. п. 29). В п. 32 эта теорема была доказана для случая, когда $D \subset \mathbb{C}^n$ и является произведением односвязных плоских областей. В общем случае доказательство будет изложено в п. 39.

Так как группа когомологий с коэффициентами в пучке $\mathscr{F}^{(0, q)}$ для покрытия по определению 2 п. 35 является факторгруппой группы форм, замкнутых в пересечениях множеств покрытия, по подгруппе точных форм, то справедливо

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие области D на комплексном многообразии, все множества U_α которого также являются областями голоморфности. Тогда p-я группа когомологий для этого покрытия с коэффициентами в пучке $\mathscr{F}^q = \mathscr{F}^{(0, q)}$ ростков дифференциальных форм бистепени $(0, q)$ тривиальна для всех $p = 1, 2, \ldots$ и всех $q \geqslant 0$:*

$$H^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}^q) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

(Мы воспользовались еще тем, что пересечение областей голоморфности является такой же областью.) Если мы учтем, что любую область можно покрыть сколь угодно мелкими областями голоморфности, то по замечанию в конце п. 35 получим

Следствие 2. *Для любой области D группы когомологий с коэффициентами в пучке ростков дифференциальных форм тривиальны для всех целых $p>0$:*

$$H^p(D, \mathscr{F}^q) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

В основе второго этапа доказательства лежит

Теорема 1 (Дольбо). *Для любой области D на комплексном многообразии*[1]) *и любого целого $p>0$ группа когомологий порядка p с коэффициентами в пучке ростков голоморфных функций изоморфна факторгруппе группы $\tilde Z^p$ всех*

[1]) Напомним, что многообразие в нашем определении является счетным объединением компактов.

форм бистепени $(0, p)$ *из класса* $C^\infty(D)$, *замкнутых в* D *относительно оператора* $\bar\partial$, *по подгруппе* $\tilde B^p$ *точных форм*:

$$H^p(D, \mathcal{O}) \approx \tilde Z^p/\tilde B^p. \tag{3}$$

◀ Обозначим через $\mathcal{Z}^q$ подпучок $\mathcal{F}^q$, состоящий из ростков замкнутых (относительно $\bar\partial$) форм. Последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{Z}^q \xrightarrow{i} \mathcal{F}^q \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{Z}^{q+1} \to 0, \tag{4}$$

где 0 — тривиальный пучок, а i — вложение, точна. В самом деле, $\operatorname{im} i = \ker \bar\partial$, так как $\bar\partial$ переводит замкнутые формы в 0, а $\operatorname{im}\bar\partial = \mathcal{Z}^{q+1}$, ибо по следствию 2 ростки замкнутых и точных форм совпадают.

По теореме о точных последовательностях точна и последовательность соответствующих групп когомологий

$$0 \to H^0(\mathcal{Z}^q) \to H^0(\mathcal{F}^q) \to H^0(\mathcal{Z}^{q+1}) \to H^1(\mathcal{Z}^q) \to H^1(\mathcal{F}^q) \to \dots \tag{5}$$

Но нулевые когомологии пучка совпадают с его глобальными сечениями, поэтому $H^0(\mathcal{F}^q) = \Gamma(D, \mathcal{F}^q)$ и $H^0(\mathcal{Z}^{q+1}) = \tilde Z^{q+1}$, а по следствию 2 имеем $H^1(\mathcal{F}^q) = 0$. Таким образом, мы заключаем из (5), что точна последовательность

$$\Gamma(D, \mathcal{F}^q) \xrightarrow{\bar\partial} \tilde Z^{q+1} \to H^1(\mathcal{Z}^q) \to 0.$$

Отсюда следует изоморфизм

$$H^1(\mathcal{Z}^q) \approx \tilde Z^{q+1}/\operatorname{im}\bar\partial = \tilde Z^{q+1}/\tilde B^{q+1} \tag{6}$$

(см. пример 3 на стр. 458; мы воспользовались еще тем, что оператор $\bar\partial$ переводит $(0, q)$-формы в точные $(0, q+1)$-формы и, значит, образ $\Gamma(D, \mathcal{F}^q)$ совпадает с $\tilde B^{q+1}$).

Теперь рассмотрим отрезок (5) между $H^p(\mathcal{F}^q)$ и $H^p(\mathcal{F}^{q+1})$ и снова воспользуемся тем, что при $p>0$ эти группы тривиальны:

$$0 \to H^p(\mathcal{Z}^{q+1}) \to H^{p+1}(\mathcal{Z}^q) \to 0.$$

Из точности этой последовательности вытекает изоморфизм

$$H^{p+1}(\mathcal{Z}^q) \approx H^p(\mathcal{Z}^{q+1}) \tag{7}$$

(см. пример 1 на той же стр.). Применяя (7) несколько раз, найдем

$$H^p(\mathcal{Z}^0) \approx H^{p-1}(\mathcal{Z}^1) \approx \dots \approx H^1(\mathcal{Z}^{p-1}).$$

Остается учесть, что замкнутые относительно $\bar{\partial}$ формы бистепени (0, 0) совпадают с голоморфными функциями, так что $\mathcal{Z}^0 = \mathcal{O}$, и воспользоваться изоморфизмом (6) ▶

Замечание 1. Если в покрытии $\mathcal{U}$ все элементы U_α являются областями голоморфности, то из теоремы II вытекает точность последовательности (5), но уже взятой для когомологий покрытия $\mathcal{U}$ (подробнее см. Хёрмандер [1]), стр. 237). Повторяя дословно доказательство, мы получаем, что

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \approx \tilde{Z}^p/\tilde{B}^p, \tag{3'}$$

откуда следует, что для таких покрытий $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \approx H^p(D, \mathcal{O})$ (сама D может и не быть областью голоморфности).

Замечание 2. Все рассуждения в доказательстве теоремы Дольбо проходят совершенно аналогично и в том случае, когда вместо $\bar{\partial}$ рассматривается оператор d дифференцирования по всем переменным z_ν и $\bar{z}_\nu$. Так как в этом случае пучок $\mathcal{Z}^0$ форм f нулевой степени, для которых $df = 0$, совпадает с пучком постоянных $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$, если рассматриваются формы с действительными коэффициентами), то справедлива следующая

Теорема (де Рам). *Для любого многообразия M класса C^∞ и любого целого $p > 0$ группа когомологий $H^p(M, \mathbb{C})$ изоморфна факторгруппе группы Z^p замкнутых на M относительно оператора d форм степени p по подгруппе B^p точных форм*:

$$H^p(M, \mathbb{C}) \approx Z^p/B^p. \tag{8}$$

Из теоремы Дольбо и теоремы II вытекает важное

Следствие. *Для любой области голоморфности D*

$$H^p(D, \mathcal{O}) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Теперь нетрудно доказать и основную теорему этого пункта:

Теорема 2 (А. Картан). *В произвольной области голоморфности D любая первая проблема Кузена разрешима* [2]).

◀ Последовательность пучков аддитивных групп

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{i} \mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}/\mathcal{O} \to 0, \tag{10}$$

где φ — естественный гомоморфизм, который ставит в соответствие каждому ростку $\mathbf{f} \in \mathcal{M}$ класс эквивалентности, его

[1]) Л. Хёрмандер, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, «Мир», М., 1968.

[2]) Для однолистных областей голоморфности в C^n теорема была доказана К. Ока.

содержащий, точна (см. пример 2 на стр. 458). По теореме 1 точна и последовательность

$$0 \to H^0(\mathcal{O}) \to H^0(\mathcal{M}) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(\mathcal{M}/\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}). \qquad (11)$$

Но $H^1(\mathcal{O}) = 0$ согласно следствию теоремы Дольбо, поэтому

$$\varphi^*: \quad \Gamma(D, \mathcal{M}) \to \Gamma(D, \mathcal{M}/\mathcal{O})$$

является гомоморфизмом на (мы опять воспользовались тем, что нулевые когомологии совпадают с глобальными сечениями).

При заданном покрытии $\mathcal{U}$ области D данные Кузена $\{f_\alpha\}$ определяют элемент из $\Gamma(D, \mathcal{M}/\mathcal{O})$. По только что доказанному существует элемент $f \in \Gamma(D, \mathcal{M})$, для которого $\varphi^*(f)$ совпадает с элементом, определяемым $\{f_\alpha\}$, а это означает, что $f - f_\alpha \in \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ в каждой окрестности $U_\alpha \in \mathcal{U}$ ▶

Оказывается, что в $\mathbb{C}^2$ класс областей, для которых разрешима первая проблема Кузена, и исчерпывается областями голоморфности: справедлива

Теорема 3 (А. Картан). *Если в (однолистной) области $D \subset \mathbb{C}^2$ разрешима любая первая проблема Кузена, то D является областью голоморфности.*

◀ Если D не является областью голоморфности, то найдется шар B с центром в граничной точке $\zeta \in \partial D$, в который аналитически продолжаются все функции $f \in H(D)$. Возьмем какую-либо точку $z \in D \cap B$ и на отрезке $z\zeta$ выберем точку $\zeta^0 \in \partial D$, ближайшую к z. Без ограничения общности можно считать, что $\zeta^0 = 0$ и что плоскость $\{z_2 = 0\}$ содержит отрезок $z\zeta^0 \subset D \cap B$. Пользуясь тем, что в D разрешима проблема Кузена, мы сейчас построим функцию $g \in H(D)$, не продолжаемую аналитически в шар B, и тем самым придем к противоречию.

Построение функции g делается, как в примере из п. 31. Выберем какую-либо функцию $\varphi(z_2) \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ с особенностью в точке $z_1 = 0$ и зададим в указанных там окрестностях точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ главные части f_α следующим образом:

$$f_\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(z_1)}{z_2}, & \text{если} \quad \alpha_1 \neq 0 \quad \alpha_2 = 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

Эти данные Кузена, очевидно, согласованы. Пусть f — мероморфная в D функция, решающая поставленную проблему Кузена. Тогда функция $g(z) = z_2 f(z)$ голоморфна в D, а $g(z_1, 0) = \varphi(z_1)$. Отсюда видно, что g имеет особенность в точке $0 \in \partial D$ и, значит, не продолжаема аналитически в шар B ▶

На пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 3$, теорема не распространяется.

Пример. Рассмотрим область $D \subset \mathbb{C}^3$, которая получается из единичного поликруга U после удаления множества $\left\{z: |z_1| \leqslant \frac{1}{2}, |z_2| \leqslant \frac{1}{2}, |z_3| \geqslant \frac{1}{2}\right\}$; иными словами, D — поликруг, у которого грань $|z_3| = 1$ продавлена внутрь, как на рис. 114. Покроем D тремя областями голоморфности:

$$U_1 = \left\{z: \frac{1}{2} < |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_3| < 1\right\},$$
$$U_2 = \left\{z: |z_1| < 1, \frac{1}{2} < |z_2| < 1, |z_3| < 1\right\}, \qquad (12)$$
$$U_3 = \left\{z: |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_3| < \frac{1}{2}\right\}$$

и рассмотрим соответствующий голоморфный коцикл $\{h_{\alpha\beta}\}$. Разложим $h_{\alpha\beta}$ в ряд Лорана в области U_{123}. Так как это разложение сходится в $U_{\alpha\beta}$, то мы получаем, что главные части разложений h_{23} и h_{31} совпадают соответственно с главными частями разложений этих функций в ряды Лорана по z_2 и по z_1. Таким образом, из равенства

$$h_{12} + h_{23} + h_{31} = 0 \qquad (13)$$

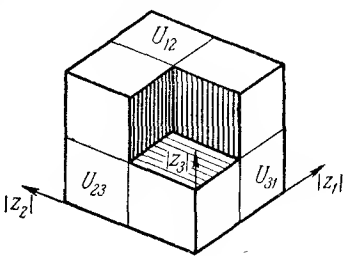


Рис. 114.

в U_{123} мы получаем, что главная часть ряда Лорана функции h_{12} распадается на две части, одна из которых голоморфна по z_1 и потому продолжается в U_1, другая голоморфна по z_2 и продолжается в U_2. Но из равенства (13) следует тогда, что главные части разложений Лорана для функций h_{23} и h_{31} соответственно продолжаются в U_2 и U_1. Аналогично получаем, что и правильные части этих функций продолжаются в соответствующие области. Обозначим через h_1 продолжение h_{31} в U_1, через h_2 продолжение h_{32} в U_2 и положим $h_3 = 0$ в U_3. Тогда

$$h_2 - h_1 = h_{32} - h_{31} = h_{12} \text{ в } U_{12},$$

и потому $\{h_{\alpha\beta}\}$ является когранicей коцепи $\{h_\alpha\}$, т. е. первая проблема Кузена для покрытия (12) всегда разрешима, откуда следует, что $H^1(\mathscr{U}, \mathcal{O}) = 0$ для этого покрытия. Согласно замечанию 1 после теоремы Дольбо, из этого следует, что $H^1(D, \mathcal{O}) = 0$, т. е. любая первая проблема Кузена в области D разрешима. Остается заметить, что сама D не является областью

голоморфности, так как она является не логарифмически выпуклой областью Рейнхарта.

38. Решение второй проблемы Кузена. Из рассуждений, проведенных в п. 33, видно, что разрешимость второй проблемы Кузена зависит также от некоторых топологических свойств рассматриваемой области. Мы приведем теорему, в которой эти свойства выражаются как условие тривиальности второй группы когомологий с коэффициентами в пучке целых чисел:

Теорема 1 (Серр). *В области голоморфности D любая вторая проблема Кузена разрешима, если*

$$H^2(X, \mathbb{Z}) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbb{Z}$ — (постоянный) пучок аддитивных групп целых чисел.

◀ Рассмотрим точную последовательность пучков мультипликативных групп

$$0 \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{i} \mathcal{M}^* \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \to 0, \tag{2}$$

где 0 — тривиальный пучок, все ростки которого принадлежат нейтральному элементу (единице) этих групп. Ей отвечает точная последовательность

$$\Gamma(D, \mathcal{M}^*) \to \Gamma(D, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to H^1(D, \mathcal{O}^*). \tag{3}$$

Условие разрешимости рассматриваемой проблемы состоит в том, что для любого заданного элемента группы $\Gamma(D, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$, т. е. некоторых согласованных данных второй проблемы Кузена, найдется элемент $f \in \Gamma(D, \mathcal{M})$, соответствующий заданному при отображении

$$\Gamma(D, \mathcal{M}^*) \to \Gamma(D, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*). \tag{4}$$

Иными словами, условие разрешимости состоит в том, что (4) является отображением на. Так как последовательность (3) точна, то это условие сводится к тому, что

$$H^1(D, \mathcal{O}^*) = 0. \tag{5}$$

Придадим этому условию другую форму. Для этого рассмотрим еще одну точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \to 0, \tag{6}$$

где $\mathbb{Z}$ — пучок аддитивных групп целых чисел, i — гомоморфизм вложения, а e: $\mathbf{f} \to e^{2\pi i \mathbf{f}}$ — гомоморфизм пучка $\mathcal{O}$ аддитивных

групп в пучок $\mathcal{O}^*$ мультипликативных групп [1]). Соответствующая ей последовательность

$$H^1(D, \mathcal{O}) \to H^1(D, \mathcal{O}^*) \to H^2(D, \mathbb{Z}) \to H^2(D, \mathcal{O})$$

также точна, а так как D — область голоморфности, то здесь крайние группы тривиальны. Отсюда следует, что средние группы изоморфны, и в силу условия (1) равенство (5) действительно имеет место ▶

Замечание. Из доказательства видно, что для разрешимости конкретной второй проблемы, соответствующей некоторому сечению из $\Gamma(D, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$, необходимо и достаточно, чтобы образ этого сечения при отображении

$$\sigma: \quad \Gamma(D, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to H^1(D, \mathcal{O}^*) \tag{7}$$

был нулем группы $H^1(D, \mathcal{O}^*)$. Серр доказал также, что для областей голоморфности σ всегда является отображением на (более того, для любого элемента $g \in H^1(D, \mathcal{O}^*)$ найдется соответствующий ему элемент $f \in \Gamma(D, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$, состоящий только из ростков голоморфных функций). Таким образом, если группа $H^1(D, \mathcal{O}^*) \neq 0$, то найдется сечение из $\Gamma(D, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$, для которого проблема неразрешима, т. е. для областей голоморфности условие (1) и необходимо для разрешимости любой второй проблемы.

Заметим еще, что существуют многообразия, которые не являются областями голоморфности, хотя вторая проблема Кузена на них разрешима. Примером служит область $D = \{0 < |z_1| < 1;\ |z_2| < 1\} \cup \{z_1 = 0,\ |z_2| < 1/2\}$ пространства $\mathbb{C}^2$ — она не является областью голоморфности, но можно доказать, что в ней любая вторая проблема Кузена разрешима. Из теоремы 3 предыдущего пункта видно, что D служит также примером области, в которой разрешима вторая, но неразрешима первая проблема Кузена. В области $D \subset \mathbb{C}^3$ из примера предыдущего пункта разрешимы и первая и вторая проблемы Кузена, хотя сама D не является областью голоморфности. Разрешимость второй проблемы следует из того, что $H^1(D, \mathcal{O}) = 0$, а $H^2(D, \mathbb{Z}) = 0$, так как D гомеоморфна шару.

Простым следствием теоремы Серра является

Теорема 2 (Ока). *Если $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ — поликруговая область из $\mathbb{C}^n$, для которой все области D_ν, кроме, быть*

[1]) Точность последовательности (6) ясна из того, что функции, тождественно равные целым числам, при отображении e переходят в 1 и что каждая функция $f \neq 0$ локально представляется в виде $e^{2\pi i g}$ ($e: \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ является отображением на). Заметим еще, что в (6) нуль слева — аддитивный, а справа — мультипликативный (единица).

может, одной, односвязны, то в D разрешима любая вторая проблема Кузена.

◀ Прежде всего, D, очевидно, является областью голоморфности. Пусть $D_2, \ldots, D_n$ — односвязные области, тогда $H^2(D, \mathbb{Z}) = H^2(D_1, \mathbb{Z})$, ибо группы когомологий с целыми коэффициентами не меняются при (декартовом) умножении на односвязную плоскую область (мы не останавливаемся на доказательстве этого топологического факта). Но для любой плоской области группа $H^2(\mathbb{Z})$ тривиальна (это следует хотя бы из теоремы Вейерштрасса из п. 43 ч. I); поэтому $H^2(D, \mathbb{Z}) = 0$ ▶

Замечание. Из теоремы 2 следует, в частности, что вторая проблема Кузена разрешима в любой односвязной поликруговой области. Но для произвольных областей голоморфности односвязность еще не гарантирует разрешимости этой проблемы, вот соответствующий пример (Серр). Область

$$D = \{z \in \mathbb{C}^3: \ |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1| < 1\}$$

является областью голоморфности, ибо в каждой точке $\zeta \in \partial D$ существует барьер: функция $f_\zeta(z) = \{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\}^{-1} \in \mathscr{H}(D)$ не ограничена при $z \to \zeta$. Область односвязна, ибо она гомеоморфна произведению поверхности $S = \{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1 = 0\}$ на единичный круг. Тем не менее в D разрешима не всякая вторая проблема Кузена, например, можно доказать, что не существует голоморфной в D функции, которая обращается в нуль на одной из двух компонент пересечения D с аналитической плоскостью $\{z_2 = iz_1\}$ и только на этой компоненте [1]).

Приведем еще одну формулировку второй проблемы Кузена. Назовем *дивизором* Δ на n-мерном аналитическом многообразии M любую целочисленную линейную комбинацию $(n-1)$-мерных подмногообразий из M. Если все коэффициенты в этой комбинации положительны, то дивизор называется положительным. Для любой функции f, мероморфной на M и не равной тождественно нулю, т. е. принадлежащей $\Gamma(M, \mathscr{M}^*)$, можно определить ее дивизор, который обозначается через (f) и представляет собой комбинацию многообразий нулей f с положительными коэффициентами (порядками) и ее полярных множеств с отрицательными коэффициентами (равными порядкам [2])

[1]) Неразрешимость хотя бы одной проблемы следует также из того, что $H^2(D, \mathbb{Z}) = H^2(S, \mathbb{Z}) \neq 0$. Убедиться в последнем можно, заметив, что S стягивается в множество своих действительных точек, т. е. двумерную сферу $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, а для нее $H^2(\mathbb{Z}) \neq 0$.

[2]) Порядки нулевых и полярных множеств мероморфной функции будут определены в следующей главе.

со знаком минус). Дивизоры голоморфных функций положительны.

Если две функции f_1, $f_2 \in \Gamma(U, \mathscr{M}^*)$, где $U \subset M$, имеют одинаковый дивизор, то их частное $f_1 f_2^{-1}$ является голоморфной функцией в U, отличной от нуля; верно и обратное. Поэтому элементы факторпучка $\mathscr{D} = \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ можно отождествить с *ростками дивизоров*. Вторая проблема Кузена теперь формулируется так: на многообразии M задан произвольный дивизор $\Delta \in \mathscr{D}$; найти функцию $f \in \Gamma(M, \mathscr{M}^*)$, дивизор которой $(f) = \Delta$.

В этой формулировке особенно отчетливо видно, что вторая проблема Кузена обобщает задачу о построении мероморфной функции с заданными нулями и полюсами.

Как и в случае одного переменного, доказывается, что на любом многообразии M, на котором разрешима вторая проблема Кузена, каждая мероморфная функция представляется как отношение голоморфных функций. Пользуясь результатом Серра, который сформулирован в замечании после теоремы 1, можно доказать, что это верно и для любой области голоморфности: справедлива

Теорема 3. *Каждая функция f, мероморфная в области голоморфности D, представляется в D как отношение голоморфных функций.*

◀ Представим дивизор (f) функции f в виде разности $\Delta' - \Delta''$ двух положительных дивизоров из $\Gamma(D, \mathscr{D})$, возьмем элемент $\sigma(\Delta'') \in H^1(D, \mathscr{O}^*)$ и, пользуясь цитированным результатом Серра, найдем положительный дивизор Δ''' такой, что $\sigma(\Delta''') = -\sigma(\Delta'')$. Так как σ — гомоморфизм, то $\sigma(\Delta'' + \Delta''') = 0$, следовательно (по замечанию после теоремы 1), соответствующая проблема Кузена разрешима и существует функция $\psi \in \Gamma(D, \mathscr{M}^*)$, дивизор которой $(\psi) = \Delta'' + \Delta'''$. Но этот дивизор положителен, следовательно, функция ψ голоморфна. Рассмотрим, наконец, дивизор произведения $(f\psi) = (\Delta' - \Delta'') + (\Delta'' + \Delta''') = \Delta' + \Delta'''$; он тоже положителен, следовательно, и функция $\varphi = f\psi$ голоморфна на M. Данная функция $f = \varphi/\psi$ ▶

39. Решение $\bar{\partial}$-проблемы и проблемы Леви. В начале этого параграфа мы сформулировали теорему II, которая решает для областей голоморфности так называемую $\bar{\partial}$-проблему. В общем случае постановка этой проблемы такова:

$\bar{\partial}$-проблема. Пусть D — область на комплексном многообразии и f — дифференциальная форма бистепени $(p, q+1)$ класса C^∞, для которой

$$\bar{\partial} f = 0. \tag{1}$$

Требуется найти форму g бистепени (p, q) класса C^∞ такую, что

$$\bar{\partial} g = f. \tag{2}$$

Так как $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$, то условие (1) является необходимым для разрешимости проблемы.

Мы будем решать эту проблему для областей $D \subset \mathbb{C}^n$ в два шага: сначала решим ее для форм с коэффициентами из пространства L^2, затем сгладим полученные решения. Для простоты ограничимся наиболее важным для приложений случаем $p = 0$, в общем случае доказательство аналогично [1]).

Для первого шага нам понадобятся некоторые обозначения. Через $L^2_q(\psi, D)$, где D — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $\psi \in C^2(D)$, $\psi \geqslant 0$, мы обозначаем пространство всех дифференциальных форм $f = \sum_I{}' f_I\, d\bar{z}_I$ бистепени $(0, q)$ с коэффициентами из пространства L^2 по мере $\psi\, dV$ в D, где dV — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Скалярное произведение

$$(f, h) = \sum_I{}' \int_D f_I \bar{h}_I \psi\, dV$$

превращает L^2_q в гильбертово пространство с нормой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

1. Сведéние к оценкам. Оператор $\bar{\partial}$, заданный на гладких формах, определяет оператор $T: L^2_q \to L^2_{q+1}$ с плотной областью определения D_T; по определению h принадлежит D_T, если все $\frac{\partial h_I}{\partial \bar{z}_\nu} \in L^2_0(\psi, D)$. Аналогичный оператор $L^2_{q+1} \to L^2_{q+2}$ обозначим через S. Так как $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$, то $ST = 0$. Это значит, что множество значений R_T оператора T содержится в пространстве нулей N_S оператора S, и $\bar{\partial}$-проблема сводится к установлению равенства $R_T = N_S$.

Обозначим через T^* оператор $L^2_{q+1} \to L^2_q$, сопряженный T:

$$(Tg, h) = (g, T^*h), \quad g \in D_T, \quad h \in D_{T^*}. \tag{3}$$

Из этого равенства видно, что R_{T^*} ортогонально N_T; его замыкание $\bar{R}_{T^*}$ будет ортогональным дополнением к N_T, если D_{T^*} плотно в L^2_{q+1}. В этом случае отыскание формы g из равенства (2) сводится к отысканию формы $g \in \bar{R}_{T^*}$ такой, что

$$(g, T^*h) = (f, h), \quad h \in D_{T^*}. \tag{4}$$

---

[1]) Все необходимые сведения из функционального анализа, которые мы используем при доказательстве, можно найти в книге: К. Иосида, Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.

Так как $R_T \subset N_S$ и $f \in N_S$, то в этом равенстве можно ограничиться формами $h \in D_{T^*} \cap N_S$. Если мы докажем оценку

$$\|h\| \leqslant c \|T^* h\|, \quad h \in D_{T^*} \cap N_S, \tag{5}$$

где c — константа, не зависящая от h, то из неравенства

$$|(f, h)| \leqslant c \|f\| \cdot \|T^* h\|, \quad h \in D_{T^*} \cap N_S,$$

будет следовать ограниченность линейного функционала $T^* h \to \overline{(f, h)}$, определенного на R_{T^*}. Из общего вида ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве вытекает существование формы $g \in \overline{R}_{T^*}$, удовлетворяющей (4). Эта форма будет решением $\bar{\partial}$-проблемы и будет удовлетворять дополнительному требованию $\|g\| \leqslant c \|f\|$, если $D_{T^*} \cap R_T$ плотно в R_T, ибо

$$\|Tg\| = \sup_{\substack{h \in R_T \\ \|h\|=1}} |(Tg, h)| \geqslant \sup_{\substack{\omega \in R_{T^*} \\ \|\omega\|=1/c}} |(g, \omega)| = \frac{1}{c} \|g\|.$$

Итог наших рассуждений подводит

Лемма 1. *Если множество D_{T^*} плотно в L^2_{q+1}, а $D_{T^*} \cap R_T$ плотно в R_T и выполняется оценка* (5), *то для любой формы $f \in N_S$ найдется единственная форма $g \in R_{T^*}$ такая, что $\bar{\partial} g = f$. Оператор $f \to g$ линеен и непрерывен; имеет место оценка*

$$\|g\| \leqslant c \|f\| \tag{6}$$

с той же постоянной c, что и в (5).

◀ Ввиду (5) пространство R_{T^*} замкнуто; согласно доказанному выше существует $g \in R_{T^*}$, удовлетворяющая (2) и (6). Единственность g следует из того, что R_{T^*} при выполнении условия леммы является ортогональным дополнением к N_T. Линейность оператора $f \to g$, обратного к T, следует из линейности T; его непрерывность вытекает из (6) ▶

I′. Мы докажем сейчас, что при некоторых ограничениях на функцию ψ условие плотности $D_{T^*} \cap R_T$ в R_T выполняется. Сначала найдем явное выражение оператора T^* для форм $h \in C^\infty(D)$, равных нулю вне какого-нибудь компакта из D [1]). Так как

$$\bar{\partial} g = \sum_I{}' \sum_\nu \frac{\partial g_I}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu \wedge d\bar{z}_I,$$

[1]) Этот класс форм мы обозначаем символом $C_0^\infty(D)$.

то

$$(\bar\partial g,\ h)=\sum_I{}'\sum_\nu\int_D\frac{\partial g_I}{\partial\bar z_\nu}\bar h_{\nu I}\psi\,dV=-\sum_I{}'\sum_\nu\int_D g_I\overline{\delta_\nu h_{\nu I}}\psi\,dV,$$

где

$$\delta_\nu w=\psi^{-1}\frac{\partial\psi w}{\partial z_\nu}=\frac{\partial w}{\partial z_\nu}-\frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}w \tag{7}$$

и $\varphi=-\ln\psi$. Таким образом,

$$T^*h=-\sum_I{}'\sum_\nu\delta_\nu h_{\nu I}\,d\bar z_I,\qquad h\in C_0^\infty(D), \tag{8}$$

и D_{T^*} содержит все формы класса $C_0^\infty(D)$. Следовательно D_{T^*} плотно в L^2_{q+1}, а для доказательства того, что $D_{T^*}\cap R_T$ плотно в R_T, нам достаточно любую форму $g\in D_T$ приблизить формами класса $C_0^\infty(D)$ по норме $g\to\|g\|+\|Tg\|$. Возможность такого приближения устанавливается в следующей лемме.

Обозначим $D_\nu=\left\{z\in D\colon |z|<\nu,\ \rho(z,\partial D)>\frac{1}{\nu}\right\}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots$, и потребуем, чтобы ψ была положительной в D и так быстро убывала на ∂D, что

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^\alpha\int_{\Delta_\nu}\psi\,dV=0,\qquad \alpha=1,\ 2,\ \ldots, \tag{9}$$

где $\Delta_\nu=D\setminus D_\nu$.

Лемма 2. *Если ψ удовлетворяет условию* (9), *то формы класса $C_0^\infty(D)$ плотны в $L^2_q(\psi,\ D)$, $0\leqslant q\leqslant n$; если $g\in L^2_q$ имеет какие-нибудь частные производные, принадлежащие L^2_q, то найдется последовательность $g_\nu\in C_0^\infty(D)$, которая сходится к g в L^2_q вместе с этими производными.*

◀ Обозначим через χ_ν характеристическую функцию множества D_ν. Усредним ее с помощью ядра $K(|\zeta|)$ — неотрицательной $\not\equiv 0$ функции из $C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$, равной нулю вне единичного шара; именно положим

$$\lambda_\nu(z)=\int\chi_{2\nu}(\zeta)K(4\nu|\zeta-z|)\,dV\left(\int K(4\nu|\zeta|)\,dV\right)^{-1}. \tag{10}$$

Функция $\lambda_\nu\in C_0^\infty(D)$, она равна 1 на D_ν и 0 вне $D_{4\nu}$; любая производная от λ_ν порядка α не превосходит по модулю $c_\alpha\nu^\alpha$, где постоянная c_α не зависит от ν. Формы

$$g_\nu(z)=\int g(\zeta)\lambda_\nu(\zeta)K(5\nu|\zeta-z|)\,dV\left(\int K(5\nu|\zeta|)\,dV\right)^{-1} \tag{10'}$$

принадлежат $C_0^\infty(D)$ и сходятся в L_q^2 к g. Так как

$$\int w(\zeta) K(5\nu|\zeta - z|)\, dV = \int w(\zeta + z) K(5\nu|\zeta|)\, dV,$$

то

$$D^\alpha g_\nu(z) = (D^\alpha g)_\nu(z) + \ldots + \\ + \int g(\zeta) D\lambda_\nu(\zeta) K(5\nu|\zeta - z|)\, dV \left(\int K(5\nu|\zeta|)\, dV\right)^{-1},$$

где $D\lambda_\nu$ получилось в результате дифференцирования произведения $g\lambda_\nu$ по правилу Лейбница; $D\lambda_\nu$ является линейной комбинацией производных от λ_ν порядка $\leqslant \alpha$. Так как $|D\lambda_\nu| \leqslant c'_\alpha \nu^\alpha$, где постоянная c'_α не зависит от ν, то мы получаем ввиду (9), что $D^\alpha g_\nu \to D^\alpha g$ в L_q^2 ▶

Так как операторы $\bar\partial$ и T^* линейно выражаются через первые производные, то мы получаем

Следствие. *Если* ψ *удовлетворяет* (9), *то формы класса* $C_0^\infty(D)$ *плотны в пространстве* $D_{T^*} \cap D_S$ *по норме* $h \to \|h\| + \|T^*h\| + \|Sh\|$ *и плотны в* D_T *по норме* $g \to \|g\| + \|Tg\|$. *Из последнего следует, что* $D_{T^*} \cap R_T$ *плотно в* R_T.

Таким образом, оценку (5) достаточно получить для форм из $C_0^\infty(D)$.

II. Оценки в псевдовыпуклых областях. Для оценки нормы оператора T^* воспользуемся легко проверяемым коммутационным соотношением

$$\left(\delta_\mu \frac{\partial}{\partial \bar z_\nu} - \frac{\partial}{\partial \bar z_\nu}\delta_\mu\right) w = w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar z_\nu\, \partial z_\mu}, \tag{11}$$

где $\varphi = -\ln\psi$, а δ_ν определены в (7). Интегрируя по частям выражение

$$\|T^*h\|^2 = \sum_I{}' \sum_{\mu,\nu} \int \delta_\nu h_{\nu I} \overline{\delta_\mu h_{\mu I}} \psi\, dV, \qquad h \in C_0^\infty(D),$$

и пользуясь (11), мы получаем

$$\int \delta_\nu h_{\nu I} \overline{\delta_\mu h_{\mu I}} \psi\, dV = -\int h_{\nu I} \overline{\frac{\partial}{\partial \bar z_\nu}\delta_\mu h_{\mu I}} \psi\, dV = \\ = \int h_{\nu I} \overline{h}_{\mu I} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu\, \partial \bar z_\mu} \psi\, dV - \int h_{\nu I} \overline{\delta_\mu \frac{\partial}{\partial \bar z_\nu} h_{\mu I}} \psi\, dV.$$

Перебрасывая в последнем интеграле $\frac{\partial}{\partial \bar z_\mu}$ на $h_{\nu I}$, мы находим, что

$$\|T^*h\|^2 = \sum_I{}' \int H(\varphi, h_I)\psi\, dV + \int \sum_I{}' \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial h_{\mu I}}{\partial \bar z_\nu} \overline{\frac{\partial h_{\nu I}}{\partial \bar z_\mu}} \psi\, dV,$$

где h_I — вектор $(h_{1I}, \ldots, h_{nI})$. Под знаком второго интеграла стоит выражение, равное $\sum_I{}' \sum_\nu \left|\frac{\partial h_I}{\partial \bar z_\nu}\right|^2 - |\bar\partial h|^2$, где $|\bar\partial h|$ — модуль вектора из коэффициентов формы $\bar\partial h$ и h_I — коэффициент h при $d\bar z_I$[1]); через $H(\varphi, \omega)$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, мы обозначаем форму Леви $\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\nu \partial \bar z_\mu}\omega_\nu\bar\omega_\mu$. Поэтому

$$\|T^*h\|^2 + \|\bar\partial h\|^2 = \sum_I{}' \int H(\varphi, h_I)\psi\, dV + \sum_I{}' \int \sum_{\mu,\nu}\left|\frac{\partial h_{\mu I}}{\partial \bar z_\nu}\right|^2 \psi\, dV, \quad (12)$$

и мы теперь можем доказать следующую теорему существования:

Теорема 1 (Хёрмандер). *Пусть D — псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и $\varphi \in C^2(D)$ такова, что $H(\varphi, \omega) \geqslant a|\omega|^2$ в D, где a — положительная константа, $\omega \in \mathbb{C}^n$. Тогда для любой $f \in L^2_{q+1}(e^{-\varphi}, D)$ такой, что $\bar\partial f = 0$, найдется $g \in L^2_q(e^{-\varphi}, D)$ такая, что $\bar\partial g = f$ и*

$$\int_D |g|^2 e^{-\varphi}\, dV \leqslant a^{-1}\int_D |f|^2 e^{-\varphi}\, dV. \quad (13)$$

Если область D ограничена и $f \in L^2_{q+1}(1, D)$, то найдется решение $g \in L^2_q(1, D)$, удовлетворяющее условию

$$\|g\|_{L^2(D)} \leqslant 2Д\|f\|_{L^2(D)}, \quad (14)$$

где $Д$ — диаметр области D. (Здесь $|h|^2 = \sum_I{}' |h_I|^2$, $\|h\|^2_{L^2(D)} = \int_D |h|^2 dV$.)

◀ Обозначим через λ функцию класса $C^2(D)$, плюрисубгармоническую в D и стремящуюся к $+\infty$ на ∂D (см. курс Хёрмандера, стр. 74); если ∂D достаточно гладкая, то в качестве λ можно взять $-\ln \rho(z, \partial D)$; если $D = \mathbb{C}^n$ — функцию $|z|^2$. Заменяя λ на e^λ, мы можем считать, что $\lambda > 0$; добавляя $|z|^2$,

[1]) Проверим это для $q = 1$. Имеем

$$|\bar\partial h|^2 = \sum_{\mu<\nu}\left|\frac{\partial h_\mu}{\partial \bar z_\nu} - \frac{\partial h_\nu}{\partial \bar z_\mu}\right|^2 = \sum_{\mu\neq\nu}\left|\frac{\partial h_\mu}{\partial \bar z_\nu}\right|^2 - \sum_{\mu\neq\nu}\frac{\partial h_\mu}{\partial \bar z_\nu}\frac{\overline{\partial h_\nu}}{\partial \bar z_\mu} =$$

$$= \sum_{\mu,\nu}\left|\frac{\partial h_\mu}{\partial \bar z_\nu}\right|^2 - \sum_{\mu,\nu}\frac{\partial h_\mu}{\partial \bar z_\nu}\frac{\overline{\partial h_\nu}}{\partial \bar z_\mu}.$$

получаем, что $\lambda(z)\to\infty$ при $|z|\to\infty$. Заменяя теперь λ функцией $u\circ\lambda$, где u — выпуклая достаточно быстро растущая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$, мы можем считать, что условие (9) выполнено для любой функции $\psi_\varepsilon = e^{\varepsilon\lambda-\varphi}$, $\varepsilon>0$; плюрисубгармоничность λ от этих замен не нарушается. Скалярное произведение в $L^2(\psi_{1/\nu})$ мы будем обозначать символом $(\ )_\nu$, норму в этом пространстве — символом $\|\ \|_\nu$; в $L^2(e^{-\varphi})$ соответствующие обозначения $(\ )$ и $\|\ \|$.

Из равенства (12), где вместо φ надо писать $\varphi+\frac{\lambda}{\nu}$, мы получаем, что $\|h\|_\nu^2\leqslant a^{-1}\|T^*h\|_\nu^2$, $h\in N_S$; по лемме 1 существует $g_\nu\in L^2_q(\psi_{1/\nu})$ такая, что $\bar\partial g_\nu = f$ и $\|g_\nu\|_\nu^2\leqslant a^{-1}\|f\|_\nu^2\leqslant a^{-1}\|f\|^2$. Таким образом, последовательность g_k, $k\geqslant\nu$, ограничена в $L^2_q(\varphi_{1/\nu})$, так как $\|g_k\|_\nu\leqslant\|g_k\|_k$. Из нее можно выделить подпоследовательность g'_k, слабо сходящуюся в этом пространстве (см. Иосида, стр. 180); это значит, что для любого $v\in L^2_q(\psi_{1/\nu})$ предел $l(v)=\lim\limits_{k\to\infty}(\overline{g'_k,\ v})_\nu$ существует. Линейный функционал $v\to l(v)$ ограничен и потому представим некоторым элементом $g\in L^2_q(\psi_{1/\nu})$, т. е. $l(v)=\overline{(g,\ v)}_\nu$. Так как $\bar\partial g_k = f$ и $(g,\ T^*h)_\nu=\lim\limits_{k\to\infty}(g_k,\ T^*h)_\nu = (f,\ h)_\nu$, то $\bar\partial g = f$, а так как $L^2_q(\psi_{1/\mu})\subset L^2_q(\psi_{1/\nu})$, если $\mu>\nu$, то $g\in\bigcap\limits_\nu L^2_q(\psi_{1/\nu})$. Наконец, из того, что $\|g\|_\nu=\sup\limits_{\|v\|=1}|(g,\ v)_\nu|\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}\|f\|$, мы получаем

$$\|g\|^2=\lim_{k\to\infty}\lim_{\nu\to\infty}\int\limits_{D_k}|g|^2e^{-\varphi-\frac{\lambda}{\nu}}\,dV\leqslant\lim_{\nu\to\infty}\|g\|_\nu^2\leqslant a^{-1}\|f\|^2,$$

т. е. $g\in L^2_q(e^{-\varphi},\ D)$, и первая часть теоремы доказана.

Если область D ограничена, то мы можем считать, что $0\in D$, и в качестве φ взять $a|z|^2$. Для найденного выше g получаем

$$e^{-aД^2}\int\limits_D|g|^2\,dV\leqslant\int\limits_D|g|^2e^{-\varphi}\,dV\leqslant a^{-1}\int\limits_D|f|^2\,dV.$$

Функция $a^{-1}e^{aД^2}$ достигает минимума по a при $a=Д^{-2}$, и мы получаем оптимальную оценку $\|g\|_{L^2(D)}\leqslant\sqrt{e}\,Д\,\|f\|_{L^2(D)}$ ▶

Замечание. Последовательность $g'_ke^{-\lambda/k}$ элементов $L^2_q(e^{-\varphi})$ ортогональна к N_T в этом пространстве и тоже слабо сходится к g. Поэтому g принадлежит ортогональному дополнению к N_T,

и этим условием форма g определена однозначно. Как и в лемме 1, линейный оператор $f \to g$, обратный к $\bar\partial$ и решающий $\bar\partial$-проблему, ограничен; его норма не превосходит $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Наконец, если $e^{-\varphi} = \psi$ удовлетворяет условию (9), то $g \in R_{T^*}$, т. е. $g = T^*h$ для некоторой формы $h \in L^2_{q+1}(\psi, D)$.

III. Гладкость решения. Пусть правая часть (2) принадлежит $C^\infty(D)$; мы хотим найти решение g, тоже принадлежащее $C^\infty(D)$. Сначала мы индукцией по α будем доказывать существование у специально подобранного решения всех производных D^α порядка α, которые принадлежат L^2 на компактных подмножествах D; это свойство мы будем записывать так:

$$D^\alpha g \in L^2_q(D, \text{loc}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Лемма 3. *Если функция $w \in L^2(\mathbb{C}^n)$ имеет компактный носитель*[1]) *и если $\bar\partial w \in L^2_1(\mathbb{C}^n)$, то $\frac{\partial w}{\partial z_k}$, $k = 1, \ldots, n$, тоже принадлежат $L^2(\mathbb{C}^n)$.*

◀ Пусть область D содержит носитель w и w_ν — последовательность усреднений (10′). Так как

$$\left\| \frac{\partial w_\nu}{\partial z_k} \right\|^2_{L^2(\mathbb{C}^n)} = \int \frac{\partial w_\nu}{\partial z_k} \overline{\frac{\partial w_\nu}{\partial z_k}}\, dV = -\int \frac{\partial^2 w_\nu}{\partial \bar z_k \partial z_k} \bar w_\nu\, dV = \left\| \frac{\partial w_\nu}{\partial \bar z_k} \right\|^2_{L^2(\mathbb{C}^n)} \tag{16}$$

и $\frac{\partial w_\nu}{\partial \bar z_k} = \left(\frac{\partial w}{\partial \bar z_k}\right)_\nu$, если носитель w содержится в D_ν, то последовательность $\frac{\partial w_\nu}{\partial z_k}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, сходится в $L^2(\mathbb{C}^n)$. В самом деле,

$$\left\| \frac{\partial (w_\nu - w_\mu)}{\partial z_k} \right\|_{L^2(\mathbb{C}^n)} = \left\| \left(\frac{\partial w}{\partial \bar z_k}\right)_\nu - \left(\frac{\partial w}{\partial \bar z_k}\right)_\mu \right\|_{L^2(\mathbb{C}^n)} \to 0,$$

так как $\left(\frac{\partial w}{\partial \bar z_k}\right)_\nu \to \frac{\partial w}{\partial \bar z_k}$ в $L^2(\mathbb{C}^n)$ при $\nu \to \infty$ ▶

Случай $q = 0$. Подберем функцию $\varphi \in C^2(D)$ так, чтобы $H(\varphi, \omega) \geqslant a|\omega|^2$, $\omega \in \mathbb{C}^n$, для некоторой константы $a > 0$, и воспользуемся теоремой 1. Если λ — произвольная функция из $C^\infty_{0,j}(D)$, то $\bar\partial \lambda g = \lambda f + g \bar\partial \lambda \in L^2(\mathbb{C}^n)$, поэтому согласно лемме 3 все $D^1 \lambda g \in L^2(\mathbb{C}^n)$. Так как в $L^2(\mathbb{C}^n)$ порядок дифференцирования не влияет на результат, то это рассуждение можно применить к $D^\alpha \lambda g$ и получить, что $D^{\alpha+1} \lambda g \in L^2(\mathbb{C}^n)$ и т. д. Значит, для

[1]) Носителем функции или формы называется наименьшее замкнутое множество, вне которого она равна нулю.

любого α функция D_g^α суммируема с квадратом на каждом компакте, где $\lambda \neq 0$. Ввиду произвольности λ это и есть свойство (15).

Случай $q>0$. Воспользуемся тем, что в равенстве (12) форма $h \in C_0^\infty(D)$ и потому ψ можно взять равной 1 на носителе h. Равенство принимает вид

$$\sum_I{}' \|\bar\partial\omega_I\|^2 = \|\vartheta\omega\|^2 + \|\bar\partial\omega\|^2, \qquad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n), \tag{12'}$$

где норма берется в $L^2(\mathbb{C}^n)$ и $\vartheta\omega = -\sum_J{}' \sum_k \frac{\partial\omega_{kJ}}{\partial z_k}\, d\bar z_J$. Заменяя ω на $D^\alpha\omega$, мы получаем, что

$$\sum_I{}' \|\bar\partial D^\alpha\omega_I\|^2 = \|D^\alpha\vartheta\omega\|^2 + \|D^\alpha\bar\partial\omega\|^2. \tag{17}$$

Это равенство справедливо для любой формы ω, у которой $D^\alpha\vartheta\omega$ и $D^\alpha\bar\partial\omega \in L^2(\mathbb{C}^n)$; для таких форм существование $\bar\partial D^\alpha\omega_I$ вытекает из (17).

Подберем $\varphi \in C^\infty(D)$ так, чтобы для нее выполнялось условие теоремы 1, а для $\psi = e^{-\varphi}$ — условие (9). Решение уравнения (2) возьмем в пространстве R_{T^*}; это значит, что $g = T^*h$ для некоторой $h \in L^2_{q+1}(\psi)$. Так как $q \geqslant 1$, то можно определить оператор H^*, сопряженный оператору $\bar\partial$: $L^2_{q-1} \to L^2_q$; его явный вид задается формулой (8). Так как $H^*T^* = 0$ (ввиду равенств $h_{kI} = -h_{Ik}$) и $g = T^*h$, то $g \in D_{H^*}$ и $H^*g = 0$. Поэтому для $\vartheta(\lambda g)$, где $\lambda \in C_0^\infty(D)$, мы получаем следующее выражение:

$$\vartheta(\lambda g) = H^*(\lambda g) - \sum_I{}' \sum_\nu \lambda g_{\nu I} \frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\, d\bar z_I = \\ = -\sum_I{}' \sum_\nu g_{\nu I}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z_\nu} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\right) d\bar z_I.$$

Таким образом, если $g \in L^2(D, \mathrm{loc})$, то $\vartheta(\lambda g) \in L^2(\mathbb{C}^n)$. Так как $\bar\partial(\lambda g) = \bar\partial\lambda \wedge g + \lambda f$ и $\lambda f \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$, то из $D^\alpha g \in L^2(D, \mathrm{loc})$ следует, что $D^\alpha\bar\partial(\lambda g) \in L^2(\mathbb{C}^n)$, а тогда ввиду (17) $\bar\partial D^\alpha\lambda g_I \in L^2(\mathbb{C}^n)$ для всех I. Согласно лемме 3 все $D^{\alpha+1}(\lambda g_I) \in L^2(\mathbb{C}^n)$. Так как $\lambda g \in L^2(\mathbb{C}^n)$, то мы доказали по индукции, что $D^\alpha g_I$ для любых I суммируемы с квадратом на каждом компакте, где $\lambda \neq 0$. Ввиду произвольности $\lambda \in C_0^\infty(D)$ это и есть свойство (15).

Согласно лемме Соболева о вложении[1]) всякая форма, удовлетворяющая (15), совпадает в L^2 с некоторой формой класса C^∞. Таким образом, доказав (15) для специально подобранных решений g, мы доказали следующую теорему, которая и решает $\bar\partial$-проблему:

Теорема 2 (Хёрмандер). *Если область D псевдовыпукла, то уравнение $\bar\partial g = f$ имеет решение $g \in C^\infty(D)$ бистепени $(0, q)$ для всякой формы $f \in C^\infty(D)$ бистепени $(0, q+1)$ такой, что $\bar\partial f = 0$. Для $q = 0$ всякое решение обладает этим свойством.*

Эта теорема справедлива и для областей на многообразиях Штейна, причем для форм любой бистепени (p, q); доказательство можно найти в книге Хёрмандера, цит. на стр. 463.

Замечание 1. Как видно из доказательства, мы брали $g \in R_{T^*}$. Согласно лемме 1 этим условием форма g определена однозначно и она линейно зависит от f. Используя более сильную лемму Соболева о непрерывности вложения, мы получаем, что оператор $f \to g$, обратный $\bar\partial$, непрерывен в следующем смысле:

Для любого компакта $K \subset D$ и любого $\alpha \geqslant 0$ найдутся $\beta \geqslant \alpha$, постоянная $c_\alpha(K)$ и компакт $K' \subset D$ такие, что

$$\max_K |D^\alpha g| \leqslant c_\alpha(K) \max_{K'} \sum_{s \leqslant \beta} |D^s f|,$$

где $|\omega|^2 = \sum' |\omega_J|^2$.

Замечание 2. Так как всякая область голоморфности является псевдовыпуклой (п. 26), то теорема II, сформулированная в начале параграфа, является следствием теоремы 2.

В заключение приведем решение проблемы Леви, которая связывает локальные и глобальные свойства областей голоморфности (см. п. 24).

Как мы убедились в п. 26, для решения этой проблемы нужно доказать, что любая псевдовыпуклая область является областью голоморфности; на основании теоремы 2 это вытекает из следующей теоремы:

Теорема 3 (Хёрмандер). *Пусть D – область в $\mathbb{C}^n$ такая, что уравнение $\bar\partial\omega = \Omega$ имеет решение $\omega \in C^\infty(D)$ бистепени $(0, q)$ для всякой формы $\Omega \in C^\infty(D)$ бистепени $(0, q+1)$ такой, что $\bar\partial\Omega = 0$. Тогда D является областью голоморфности.*

◀ Мы будем доказывать это индукцией по n. При $n = 1$ утверждение тривиально, ибо любая плоская область является

[1]) См., например, К. Иосида, цит. выше, стр. 242.

областью голоморфности; предположим, что оно справедливо для областей из $\mathbb{C}^{n-1}$.

Нам нужно доказать, что для любого шара $B \subset D$, граница которого содержит хотя бы одну точку $\zeta \in \partial D$, найдется функция $F \in H(D)$, не продолжаемая голоморфно в точку ζ. Без ограничения общности можно считать, что $\zeta = 0$ и что $b = B \cap \{z_n = 0\}$ непусто. Тогда непусто и открытое множество $d = D \cap \{z_n = 0\}$, которое мы рассматриваем в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ точек $'z = \{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$, а $'0$ является его граничной точкой. Мы обозначим через π: $z \to 'z$ проекцию $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^{n-1}$ и через i: $'z \to ('z, 0)$ вложение множества d в D, так что $i(d)$ мы рассматриваем как подмножество D. Пусть $\mathscr{F}^q(D)$ — совокупность $(0, q)$-форм класса $C^\infty(D)$. Для любой формы $\omega \in \mathscr{F}^q(d)$ от переменной $'z$ мы обозначим через $\pi^*\omega$ ту же ω, рассматриваемую как форму от z на множестве $d \times \mathbb{C}$. Символом $i^*\Omega$ будем обозначать форму от $'z$, которая получится из формы $\Omega \in \mathscr{F}^q(D)$, если положить в последней $z_n = 0$; таким образом, $i^*\Omega \in \mathscr{F}^q(d)$.

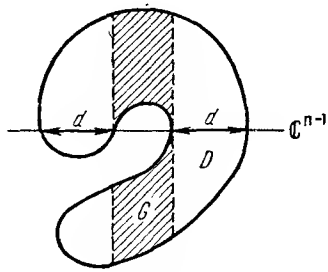


Рис. 115.

Прежде всего докажем, что система

$$\bar\partial\sigma = \omega \qquad (18)$$

разрешима в классе $\mathscr{F}^{q-1}(d)$ для любой замкнутой формы $\omega \in \mathscr{F}^q(d)$. Для этого рассмотрим множество $G = \{z \in D: \pi(z) \notin d\}$, заштрихованное на схематическом рис. 115. Так как оно не пересекается с $i(d)$ и оба этих множества относительно замкнуты в D, то можно построить функцию $\varphi \in C^\infty(D)$, равную 1 на $i(d)$ и 0 на G. С ее помощью мы преобразуем ω в форму $\Omega_0 = \varphi\pi^*\omega$ (которая полагается равной 0 на G, хотя $\pi^*\omega$ там и не определена); очевидно, $\Omega_0 \in \mathscr{F}^q(D)$ и $i^*\Omega_0 = \omega$. Далее полагаем $\Omega = \Omega_0 - z_n\Sigma_0$, где $\Sigma_0 \in \mathscr{F}^q(D)$ подбирается так, чтобы было $\bar\partial\Omega = 0$. Этот подбор осуществим, ибо последнее равенство переписывается в виде системы $\bar\partial\Sigma_0 = \frac{1}{z_n}\bar\partial\Omega_0$, в правой части которой стоит форма $\frac{1}{z_n}\bar\partial\varphi \wedge \pi^*\omega \in \mathscr{F}^{q+1}(D)$, замкнутая в силу замкнутости $\pi^*\omega$, а такая система разрешима в классе $\mathscr{F}^q(D)$ по условию. Очевидно, мы имеем $i^*\Omega = i^*\Omega_0 = \omega$. Так как $\bar\partial\Omega = 0$, то по условию существует форма $\Sigma \in \mathscr{F}^{q-1}(D)$ такая, что $\bar\partial\Sigma = \Omega$. Полагая $\sigma = i^*\Sigma$, мы найдем, что $\sigma \in \mathscr{F}^{q-1}(d)$ и $\bar\partial\sigma =$

$= i^* \bar{\partial}\Sigma = i^*\Omega = \omega$, т. е. что σ является искомым решением системы (18).

Так как d — открытое множество в $\mathbb{C}^{n-1}$, то по индуктивному предположению из доказанной разрешимости системы (18) следует, что d состоит из областей голоморфности. Поэтому существует функция $f \in H(d)$, не продолжаемая голоморфно в окрестность замкнутого шара $\bar{b}$. Рассматривая f как замкнутую форму из $\mathscr{F}^0(d)$, мы, как и в предыдущем абзаце, найдем форму $F \in \mathscr{F}^0(D)$ такую, что $\bar{\partial}F = 0$ и $i^*F = f$. Построенная F является голоморфной функцией в D, а так как сужение $F|_d = f$, то F не продолжаема голоморфно в окрестность замкнутого шара $\bar{B}$ ▶

Таким образом, доказана

Теорема (Ока). *Любая псевдовыпуклая область $D \subset \mathbb{C}^n$ является областью голоморфности.*

Как показывает теорема 3, условие псевдовыпуклости области $D \subset \mathbb{C}^n$ является не только достаточным, но и необходимым условием для разрешимости $\bar{\partial}$-проблемы для форм любой бистепени $(0, q)$.

Мы закончим этот параграф доказательством еще одного критерия для областей голоморфности.

Теорема 4. *Область $D \subset \mathbb{C}^n$ является областью голоморфности тогда и только тогда, когда $H^p(D, \mathcal{O}) = 0$, $p = 1, 2, \ldots, n$.*

◀ Согласно теореме 1 п. 37 $H^p(D, \mathcal{O}) = \tilde{Z}^p/\tilde{B}^p$. Поэтому из тривиальности всех этих групп когомологий следует разрешимость $\bar{\partial}$-проблемы в области D для форм любой бистепени $(0, p)$. По теореме 3 D является областью голоморфности. Обратное утверждение составляет содержание следствия п. 37 ▶

ЗАДАЧИ

1. (У. Рудин). Если функция $f = \dfrac{P}{Q}$, где P и Q — взаимно простые полиномы, голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$, то в этой области $Q \neq 0$.

2. Если функция f голоморфна в бикруге $\{|z| < 1, |w| < 1\}$ и не продолжается голоморфно в точку $(z_0, e^{i\theta_0})$, где $|z_0| < 1$, то она не продолжается и во все точки $(z, e^{i\theta_0})$, где $|z| < 1$.

3. Убедиться в том, что функция $\dfrac{z}{1 - w^2}$, голоморфная в шаре $B = \{|z|^2 + |w|^2 < 1\}$, непрерывная в $\bar{B}$ и равная нулю на плоскости $z = 0$, не представима в виде $z\varphi(z, w)$, где φ голоморфна в B и непрерывна в $\bar{B}$.

4. Пусть $D = \left\{\dfrac{3}{4} < |z| < \dfrac{5}{4},\ \dfrac{3}{4} < |w| < \dfrac{5}{4}\right\}$ — область в $\mathbb{C}^2$; множество $M = \{(z, w) \in D: w = z + 1\}$ состоит из двух компонент: $M_1 = \{(z, w)\} \in M$: $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w > 0\}$ и $M_2 = M \setminus M_1$, отстоящих на положительном расстоянии друг от друга. Доказать, что вторая проблема Кузена: $f_1 = 1$ в $D \setminus M_1$, $f_2 = w - z - 1$

в $D \setminus M_2$ (данные согласованы) — неразрешима. [Указание: в случае разрешимости мы получили бы функцию $f \in H(D)$ такую, что $f \neq 0$ в $D \setminus M_1$ и $g = f/(z - w - 1) \neq 0$ в $D \setminus M_2$; сравнивая приращения аргументов Δ_f' и Δ_f'' функции f на окружностях $\{|z| = 1,\ w = \pm 1\}$ и соответствующие приращения аргументов Δ_g' и Δ_g'' функции g, мы получим, что $\Delta_f' = \Delta_f'' = \Delta_g''$ и $\Delta_g' = \Delta_g''$, хотя очевидно, что $|\Delta_f' - \Delta_g'| = 2\pi$.]

5. Пусть D — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$ и $\{z \in D:\ z_1 = 0\} = M_1 \cup M_2$, где M_1 и M_2 — открытые непересекающиеся множества на плоскости $z_1 = 0$; тогда существует функция $f \in H(D)$ такая, что $f = 1$ на M_1 и функция f/z_1 голоморфна в окрестности M_2. [Указание: воспользоваться разрешимостью $\bar{\partial}$-проблемы.]

6. (Х. Росси). Пусть K — полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$, точка $z^0 \in K$ и функция f, голоморфная в окрестности $\mathcal{U}_{z^0}$ этой точки, такова, что $f(z^0) = 0$ и $\operatorname{Re} f < 0$ на $\mathcal{U}_{z^0} \cap K \setminus z^0$. Тогда существует функция g, голоморфная в окрестности K и такая, что $g(z^0) = 1$, а $|g(z)| < 1$, если $z \in K \setminus z^0$.

7. Пучок $\mathcal{F}$ на многообразии M называется *тонким*, если для любого локально конечного покрытия U_α, $\alpha \in I$, на $\mathcal{F}$ можно определить разбиение единицы, т. е. семейство гомоморфизмов φ_α, $\alpha \in I$, пучка $\mathcal{F}$ в себя такое, что: 1) $\sum_\alpha \varphi_\alpha$ — тождественное отображение и 2) для каждого $\alpha \in I$ найдется замкнутое подмножество $V_\alpha \subset U_\alpha$ такое, что $\varphi_\alpha(\mathcal{F}_x) = 0$ для всякого $x \notin V_\alpha$. Доказать, что для тонкого пучка $\mathcal{F}$

$$H^q(M, \mathcal{F}) = 0, \quad \text{если} \quad q \geqslant 1.$$

Убедиться, что пучок $\mathcal{F}^{(p,\,q)}$ ростков дифференциальных форм бистепени (p, q) с коэффициентами класса C^∞ на комплексном многообразии M является тонким.

8. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на многообразии M, K — замкнутое подмножество M и $\{G_\alpha\}$ — некоторая фундаментальная система окрестностей K. Предположим, что $H^p(G_\alpha, \mathcal{F}) = 0$ для всех α (p фиксировано); доказать, что $H^p(K, \mathcal{F}) = 0$.

9. Пусть X — компакт, $C(X)$ — кольцо всех непрерывных комплексных функций на X, G — группа (по умножению) всех функций из $C(X)$, нигде на X не равных нулю, и E — подгруппа G, состоящая из функций вида e^f, $f \in C(X)$. Доказать, что

$$G/E \approx H^1(X, Z).$$

Это равенство справедливо и в случае, когда X является счетным объединением компактов. [Указание: воспользоваться точностью последовательности $0 \to Z \to \mathcal{C} \xrightarrow{e} \mathcal{G} \to 0$, где $\mathcal{C}$ и $\mathcal{G}$ — пучки ростков элементов $C(X)$ и G и e — отображение $f \to e^{2\pi i f}$.]

10. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}^n$, $P(K)$ — подкольцо $C(K)$, состоящее из функций, которые равномерно на K приближаются полиномами от z, $G_P = G \cap P(K)$ и $E_P = E \cap P(K)$, где G и E определены в задаче 9. Доказать, что

$$G_P/E_P \approx H^1(K, Z),$$

если множество K полиномиально выпукло; привести пример компакта $K \subset \mathbb{C}^n$, для которого этот изоморфизм не имеет места. Доказать, что в общем случае

$$G_P/E_P \approx H^1(\hat{K}_R, Z),$$

где $\hat{K}_R$ — рациональная оболочка компакта K.

11. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}^n$ и функция f голоморфна в окрестности K. Предположим, что $H^1(K, Z) = 0$ и $0 \notin f(K)$; тогда существует голоморфная на K функция g такая, что $e^g = f$ (голоморфный логарифм f).

12. Пусть X — компакт, функция $f \in C(X)$ и $N_f = \{x \in X: f(x) = 0\}$. Предположим, что $H^1(X \setminus N_f, Z) = 0$; тогда для всякого целого $k > 0$ в $C(X)$ существует функция $f^{1/k}$.

13. Пусть $\mathcal{O}^p$ — пучок ростков дифференциальных форм бистепени $(p, 0)$ с голоморфными коэффициентами на комплексном многообразии M, $\tilde{Z}^{p,q}$ — группа замкнутых и $\tilde{B}^{p,q}$ — группа точных форм бистепени (p, q) с коэффициентами класса C^∞ относительно оператора $\bar{\partial}$. Доказать теорему Дольбо:

$$H^q(M, \mathcal{O}^p) \approx \tilde{Z}^{p,q}/\tilde{B}^{p,q}.$$

[Указание: воспользоваться точностью последовательности $0 \to \mathcal{O}^p \to \mathcal{F}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \to \mathcal{F}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \ldots$, которая следует из локальной разрешимости $\bar{\partial}$-проблемы, и задачей 7.]

14. Пусть D — область на комплексном многообразии M (комплексной) размерности n, $\tilde{Z}_0^q$ и $\tilde{B}_0^q$ — соответственно замкнутые и точные относительно $\bar{\partial}$ формы бистепени $(0, q)$ с коэффициентами класса $C_0^\infty(D)$ и $\tilde{B}^q = \tilde{B}^{0,q}$, где последняя определена в задаче 13. Доказать, что

$$H^q(D, \mathcal{O}) \approx \tilde{Z}_0^q/\tilde{B}^q, \qquad q > 0,$$

а если $n > 1$, то

$$H^q(D, \mathcal{O}) \approx \tilde{Z}_0^q/\tilde{B}_0^q.$$

Для $n = 1$ привести пример, когда последнее соотношение неверно.

15. Если D — произвольная область в $\mathbb{C}^n$, то $H^n(D, \mathcal{O}) = 0$. [Указание: воспользоваться задачей 14.]

16. Пусть D — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$ и форма f класса $C^\infty(D)$, такова, что df голоморфна в D (т. е. df — форма бистепени $(p, 0)$ с голоморфными коэффициентами); тогда существует форма g степени $p-1$ класса $C^\infty(D)$ такая, что форма $f - dg$ голоморфна.

17. (Серр). Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область голоморфности, $\check{Z}^p$ и $\check{B}^p$ — группы замкнутых и точных голоморфных форм бистепени $(p, 0)$ относительно оператора $\partial = d - \bar{\partial}$. Доказать, что

$$H^p(D, \mathbb{C}) \approx \check{Z}^p/\check{B}^p.$$

[Указание: воспользоваться теоремой де Рама и задачей 16.]

18. Пусть D — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$ и $\mathcal{J}_k(z^0)$ — пучок ростков голоморфных в D функций, равных 0 вместе с производными порядка $\leqslant k$ в фиксированной точке $z^0 \in D$. Доказать, что

$$H^q(D, \mathcal{J}_k(z^0)) = 0, \quad \text{если} \quad q \geqslant 1.$$

[Указание: предварительно установить изоморфизм с подходящей факторгруппой форм бистепени $(0, q)$ относительно $\bar{\partial}$.]

19. Пусть $a^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ — дискретное множество точек в области голоморфности $D \subset \mathbb{C}^n$ и p_ν — многочлен по z степени k_ν. Доказать существование функции $f \in H(D)$, у которой начальный отрезок разложения Тейлора степени $\leqslant k_\nu$ в каждой точке $a^{(\nu)}$ совпадает с p_ν. [Указание: сначала доказать, что $H^1(D, \mathcal{J}) = 0$, где $\mathcal{J}$ — пучок ростков голоморфных в D

функций, равных нулю вместе с производными порядка $\leqslant k_\nu$ в точках $a^{(\nu)}$, затем применить теорему I п. 36 к точной последовательности $0 \to \mathscr{I} \to \mathcal{O} \to \to \mathcal{O}/\mathscr{I} \to 0$.]

20. Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, для которой $H^1(D, \mathcal{O}) = 0$, и p: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2$ — проекция на первые две координаты. Предположим, что: 1) в D имеется аналитическая поверхность, которая на $p(D)$ проектируется взаимно однозначно, и 2) для каждого $a \in p(D)$ множество $p^{-1}(a) \cap D$ связно и односвязно (т. е. на нем всякий замкнутый путь гомотопен нулю); тогда $p(D)$ — область голоморфности в $\mathbb{C}^2$. [Указание: см. теорему 3 п. 37.]

21. (Гладкая зависимость от параметра решения I проблемы Кузена). Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, для которой $H^1(D, \mathcal{O}) = 0$, и $\{U_\alpha(t)\}$ — покрытие, в котором каждый элемент непрерывно зависит от параметра t, изменяющегося на некотором многообразии Δ. Пусть $f_\alpha(z, t)$ — функция класса C^k, мероморфная по z в $U_\alpha(t)$ (гладкость — вне объединения полярных множеств). Предположим, что $f_\alpha(z, t) - f_\beta(z, t) \in H(U_\alpha(t) \cap U_\beta(t))$ для любых α, β и t. Тогда найдется функция $f(z, t)$ в $D \times \Delta$, мероморфная по z и класса C^k вне объединения полярных множеств, такая, что $f(z, t) - f_\alpha(z, t) \in \in H(U_\alpha(t))$ для любых α и t. [Указание: воспользоваться существованием ограниченного линейного оператора, обратного к $\bar{\partial}$; см. замечание 1 после теоремы 2 п. 39.]

22. (Г. М. Хенкин). Пусть D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$ с границей класса C^3. Доказать существование гладкой функции $f(z, \zeta)$ в $G \times \partial D$, где G — некоторая окрестность $\overline{D}$, голоморфной по z и такой, что

$$\{z \in G: \quad f(z, \zeta) = 0\} \cap \overline{D} = \{\zeta\}.$$

[Указание: воспользоваться задачей 21 и доказательством теоремы Леви — Кшоски из п. 24.]

ГЛАВА V

ОСОБЕННОСТИ И ВЫЧЕТЫ

Основная тема этой главы — особенности голоморфных функций нескольких переменных. Как мы видели, такие функции не могут иметь изолированных особых точек: место последних занимают особые множества. Их изучением мы займемся несколько позже, а сначала рассмотрим теорию вычетов мероморфных функций, которая связана с особенностями простейшего типа — полярными множествами.

§ 13. Многомерные вычеты

Напомним ситуацию, в которой появляются вычеты в плоском случае. Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ задана функция f, голоморфная всюду, кроме конечного числа особых точек a_ν ($\nu = 1, \ldots, N$). Обозначим через γ_ν: $z = a_\nu + r_\nu e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, окружность достаточно малого радиуса r_ν. Интегралы от f по таким окружностям, деленные на $2\pi i$, называются *вычетами* f в ее особых точках:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\nu} f\, dz = R_\nu.$$

Окружности $\{\gamma_\nu\}$ составляют базу одномерных гомологий области $D' = D \setminus \bigcup \{a_\nu\}$. Это означает, что каждый одномерный цикл (замкнутый путь) $\gamma \subset D'$ гомологичен некоторой линейной комбинации циклов γ_ν с целыми коэффициентами:

$$\gamma \sim \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu \gamma_\nu.$$

Если это разложение известно и известны вычеты R_ν, то по свойствам интегралов

$$\int\limits_{\gamma} f\, dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu R_\nu$$

(теорема о вычетах).

Аналогичная ситуация имеет место и в пространстве. Однако при переходе к пространственному случаю практическое вы-

численение интегралов наталкивается на ряд трудностей, главным образом топологического характера.

40. Теория Мартинелли. Для изложения этой теории понадобятся некоторые топологические понятия.

Пусть на ориентируемом многообразии M^r действительной размерности r заданы два симплекса $S^p=(P, P_1, \ldots, P_p)$ и $T^q=(P, Q_1, \ldots, Q_q)$ дополнительной размерности (это означает, что $p+q=r$). Пусть еще эти симплексы трансверсальны, т. е., кроме P, не имеют других общих точек (рис. 116). Мы скажем, что *индекс пересечения* этих симплексов в точке P равен $+1$, если ориентация r-мерного симплекса $(P, P_1, \ldots, P_q, Q_1, \ldots, Q_q)$ совпадает с ориентацией M^r, и равен -1 в противоположном случае. (На рис. 116, *а* индекс пересечения симплексов S^2 и T^1 в $\mathbb{R}^3$ равен $+1$, а на рис. 116, *б* равен -1.)

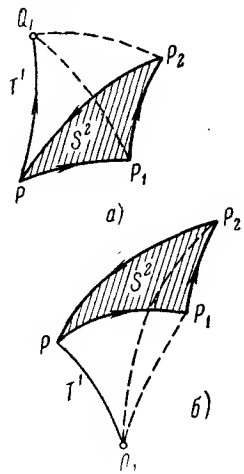


Рис. 116.

Пусть теперь в M^r заданы две цепи $\sigma^p=\sum \alpha_\nu S^p_\nu$ и $\tau^q=\sum \beta_\nu T^q_\nu$ дополнительной размерности $(p+q=r)$, пересекающиеся друг с другом трансверсально в конечном числе точек, которые мы будем считать общими вершинами симплексов, составляющих эти цепи. В каждой точке пересечения мы умножаем индекс пересечения симплексов, принадлежащих этим цепям, на произведение коэффициентов, с которыми симплексы входят в цепи. Сумму таких произведений по всем точкам пересечения цепей σ^p и τ^q мы назовем *индексом пересечения* этих цепей и обозначим символом $i(\sigma^p, \tau^q)$. (На рис. 117 индекс пересечения цепей σ^1 и τ^2 в $\mathbb{R}^3$ равен $i(\sigma^1, \tau^2)=2\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot(-1)=0$.)

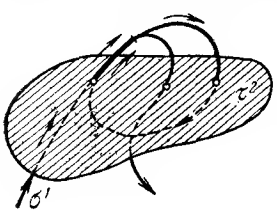


Рис. 117.

Отметим следующие простые свойства индекса пересечения:

1) ориентируемость:

$$i(\sigma^p, \tau^q)=-i(-\sigma^p, \tau^q)=-i(\sigma^p, -\tau^q);$$

2) коммутативность (или антикоммутативность):

$$i(\sigma^p, \tau^q)=(-1)^{pq}\, i(\tau^q, \sigma^p);$$

3) дистрибутивность

$$i(\sigma^p, \tau^q_1+\tau^q_2)=i(\sigma^p, \tau^q_1)+i(\sigma^p, \tau^q_2).$$

Отметим еще одно, геометрически очевидное свойство: если обе цепи σ^p и τ^q являются циклами (т. е. их границы $\partial\sigma^p$ и $\partial\tau^q$ равны нулю) и хотя бы одна из них является циклом, гомологичным нулю на M^r (т. е. границей некоторой цепи, принадлежащей M^r), то

$$i(\sigma^p, \tau^q) = 0.$$

Далее, рассмотрим на ориентируемом многообразии M^r два гомологичных нулю цикла σ^p и τ^{q-1} (пусть по-прежнему $p+q=r$); предположим, что они не пересекаются. Существует цепь $T^q \subset M^r$ такая, что $\tau^{q-1} = \partial T^q$, и если $T_1^q \subset M^r$ — еще какая-либо цепь с границей τ^{q-1}, то по отмеченным свойствам индекса пересечения

$$i(\sigma^p, T^q) - i(\sigma^p, T_1^q) = i(\sigma^p, T^q - T_1^q) = 0,$$

ибо $T^q - T_1^q$ — цикл [1]) на M^r, а σ^p — цикл, гомологичный нулю. Таким образом, в наших условиях индекс пересечения цикла σ^p с любой цепью $T^q \subset M^r$, граница которой $\partial T^q = \tau^{q-1}$, не зависит от выбора этой цепи и определяется (при заданных M^r и σ^p) лишь циклом τ^{q-1}. Мы назовем этот индекс *коэффициентом зацепления* циклов σ^p и τ^{q-1} и обозначим символом $c(\sigma^p, \tau^{q-1})$; итак, по определению

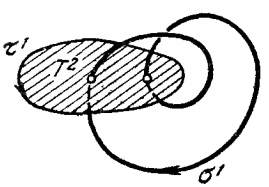


Рис. 118.

$$c(\sigma^p, \tau^{q-1}) = i(\sigma^p, T^q). \qquad (1)$$

(На рис. 118 коэффициент зацепления двух одномерных гомологичных нулю в $\mathbb{R}^3$ циклов τ^1 и σ^1 равен 2.)

Отметим следующие простые свойства коэффициента зацепления:

1) ориентируемость:

$$c(\sigma^p, \tau^{q-1}) = -c(-\sigma^p, \tau^{q-1}) = -c(\sigma^p, -\tau^{q-1});$$

2) коммутативность (или антикоммутативность):

$$c(\sigma^p, \tau^{q-1}) = (-1)^{p(q-1)} c(\tau^{q-1}, \sigma^p);$$

3) дистрибутивность:

$$c(\sigma^p, \tau_1^{q-1} + \tau_2^{q-1}) = c(\sigma^p, \tau_1^{q-1}) + c(\sigma^p, \tau_2^{q-1}).$$

Отметим еще одно свойство: если два цикла σ_1^p и σ_2^p, гомологичные нулю на M^r, гомологичны друг другу на $M^r \setminus \tau^{q-1}$

[1]) Граница $\partial(T^q - T_1^q) = \tau^{q-1} - \tau^{q-1} = 0$.

(где τ^{q-1} — цикл, гомологичный нулю на M^r), то

$$c(\sigma_1^p, \tau^{q-1}) = c(\sigma_2^p, \tau^{q-1}). \tag{2}$$

Пусть, наконец, на многообразии M^r задан какой-либо комплекс K (см. п. 12). Мы назовем *базой p-мерных гомологий* K систему p-мерных циклов σ_ν^p ($\nu = 1, \ldots, \rho$) такую, что: 1) циклы σ_ν^p гомологически независимы, т. е. из того, что некоторая цепь $\sigma = \sum_{\nu=1}^{\rho} \alpha_\nu \sigma_\nu^p$ гомологична нулю в K, вытекает равенство нулю всех коэффициентов α_ν, и 2) любой p-мерный цикл $\sigma^p \subset K$ гомологичен некоторой линейной комбинации [1]) циклов σ_ν^p: $\sigma^p \sim \sim \sum_{\nu=1}^{\rho} k_\nu \sigma_\nu^p$.

В заключение сформулируем без доказательства

Принцип двойственности (Дж. Александер, Л. С. Понтрягин) [2]). Пусть S^r — сфера действительной размерности r и $K \subset S^r$ — некоторый полиэдр. Тогда для базы p-мерных гомологий

$$\sigma_1^p, \ldots, \sigma_\rho^p \tag{3}$$

комплекса $S^r \setminus K$ существует такая база $(q-1)$-мерных гомологий

$$\tau_1^{q-1}, \ldots, \tau_\rho^{q-1} \tag{4}$$

полиэдра K (при этом $p+q=r$), что для всех $\mu, \nu = 1, \ldots, \rho$

$$c(\sigma_\mu^p, \tau_\nu^{q-1}) = \delta_{\mu\nu},$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера (равный 1 при $\mu = \nu$ и 0 при $\mu \neq \nu$).

Базу (4) мы будем называть *двойственной* к базе (3).

Перейдем к задачам вычисления интегралов. Пусть в области $D \subset \mathbb{C}^n$ задана мероморфная функция f с полярным множеством $\mathscr{P}$ и требуется вычислить интеграл от формы $\omega = f\,dz = f(z)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ по некоторому n-мерному циклу $\sigma \subset D \setminus \mathscr{P}$. Если σ гомологичен нулю в $D \setminus \mathscr{P}$, то по теореме Коши — Пуанкаре

$$\int_\sigma f\,dz = 0.$$

---

[1]) Здесь, как и всюду в этой книге, мы рассматриваем цепи с целочисленными коэффициентами.

[2]) См., например, книгу П. С. Александрова, цит. на стр. 316.

По той же теореме и по свойствам интегралов, если цикл σ' гомологичен σ в $D \setminus \mathscr{P}$, то

$$\int_{\sigma'} f\,dz = \int_{\sigma} f\,dz. \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что если известна база n-мерных гомологий $\sigma_1, \ldots, \sigma_\rho$ множества $D \setminus \mathscr{P}$ и разложение

$$\sigma \sim \sum_{\nu=1}^{\rho} k_\nu \sigma_\nu \tag{6}$$

по этой базе, то вычисление интеграла от f по σ сводится к вычислению интегралов по базисным циклам:

$$\int_{\sigma} f\,dz = \sum_{\nu=1}^{\rho} k_\nu \int_{\sigma_\nu} f\,dz. \tag{7}$$

По аналогии с одномерным случаем назовем *вычетом* функции f относительно базисного цикла σ_ν величину

$$R_\nu = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\sigma_\nu} f\,dz. \tag{8}$$

Тогда будет иметь место

Теорема 1 (о вычетах). *Если функция f мероморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и $\mathscr{P}$ — полярное множество этой функции, то для любого n-мерного цикла $\sigma \subset D \setminus \mathscr{P}$*

$$\int_{\sigma} f\,dz = (2\pi i)^n \sum_{\nu=1}^{\rho} k_\nu R_\nu, \tag{9}$$

где k_ν — коэффициенты разложения σ по базе n-мерных гомологий $D \setminus \mathscr{P}$, а R_ν — вычеты f относительно циклов этой базы.

В пространственном случае, в отличие от плоского, отыскание базы $\{\sigma_\nu\}$ и разложения (6) по этой базе является далеко не простой задачей. Э. Мартинелли заметил, что в ряде случаев задача существенно упрощается, если воспользоваться описанным выше принципом двойственности [1]). Для возможности применения этого принципа предположим, что область D гомеоморфна $2n$-мерному шару. Отождествим все точки границы D в одну точку и дополним D этой точкой — мы получим

[1]) Вычисления ряда интегралов по этому методу провел А. П. Южаков (см., например, его работу: К теории вычетов функции двух комплексных переменных, Ученые записки Моск. обл. пед. ин-та, т. CX, Матем., вып. 7, (1962)).

$2n$-мерную сферу $\overline{D}$. Точно так же отождествим все точки пересечения полярного множества $\mathscr{P}$ функции f с границей ∂D в одну точку и дополненное этой точкой множество $\mathscr{P}$ обозначим через $\overline{\mathscr{P}}$. Описанный процесс, очевидно, не нарушит базы n-мерных гомологий $\{\sigma_\mu\}$ и разложения (6) по этой базе. Иными словами, $\{\sigma_\mu\}$ останется базой n-мерных гомологий $\overline{D} \setminus \overline{\mathscr{P}}$ и (6) — разложением цикла σ по ней.

На основании принципа двойственности мы можем вместо базы n-мерных гомологий $\{\sigma_\mu\}$ множества $\overline{D} \setminus \overline{\mathscr{P}}$ искать базу $(n-1)$-мерных гомологий $\tau_1, \ldots, \tau_\rho$ самого полярного множества $\overline{\mathscr{P}}$, связанную с первой базой соотношениями

$$c(\sigma_\mu, \tau_\nu) = \delta_{\mu\nu}. \tag{10}$$

Циклы τ_ν мы будем называть коротко *особыми циклами*.

Заметим, что коэффициенты k_ν разложения цикла σ по базе $\{\sigma_\mu\}$ совпадают с коэффициентами зацепления этого цикла с циклами двойственной базы $\{\tau_\nu\}$. В самом деле, так как σ гомологичен $\sum_{\mu=1}^{\rho} k_\mu \sigma_\mu$ в $\overline{D} \setminus \overline{\mathscr{P}}$, то по отмеченному выше свойству коэффициентов зацепления имеем

$$c(\sigma, \tau_\nu) = c\left(\sum_{\mu=1}^{\rho} k_\mu \sigma_\mu, \tau_\nu\right),$$

а отсюда, пользуясь распределительным законом и соотношениями (10), находим

$$c(\sigma, \tau_\nu) = k_\nu. \tag{11}$$

Это замечание позволяет находить k_ν, не зная самой базы $\{\sigma_\nu\}$. Интегралы по базисным циклам σ_ν (вычеты функции f) также можно вычислять, не находя самих этих циклов. В самом деле, пусть нам удалось найти в $\overline{D} \setminus \overline{\mathscr{P}}$ какие-либо ρ гомологически независимых n-мерных циклов γ_μ, по которым мы можем вычислить интегралы

$$\int_{\gamma_\mu} f\,dz = I(\gamma_\mu), \qquad \mu = 1, \ldots, \rho.$$

Пусть еще известны коэффициенты зацепления $c(\gamma_\mu, \tau_\nu) = a_{\mu\nu}$ этих циклов с циклами двойственной базы $\{\tau_\nu\}$. По сделанному выше замечанию $a_{\mu\nu}$ являются коэффициентами разложения γ_μ

по базе $\{\sigma_\nu\}$, поэтому по теореме о вычетах для любого $\mu = 1, \ldots, \rho$

$$I(\gamma_\mu) = (2\pi i)^n \sum_{\nu=1}^{\rho} a_{\mu\nu} R_\nu, \tag{12}$$

где R_ν — вычет f относительно цикла σ_ν.

Систему (12) можно рассматривать как линейную относительно неизвестных вычетов R_ν, причем ее определитель пропорционален $\mathrm{Det}(a_{\mu\nu})$, который отличен от нуля в силу гомологической независимости циклов γ_μ. Поэтому из этой системы вычеты легко находятся.

Учитывая отмеченную выше двойственность, условимся называть интеграл f по n-мерному циклу σ_ν, деленный на $(2\pi i)^n$, *вычетом относительно особого цикла* τ_ν (двойственного $(n-1)$-мерного цикла на $\overline{\mathscr{P}}$). Заметим, что это определение подчеркивает аналогию пространственного случая с плоским, где интеграл по одномерному циклу γ_ν, деленный на $2\pi i$, называется вычетом f относительно особой точки a_ν (нульмерного цикла). Теорему о вычетах теперь можно сформулировать так:

Теорема 2. *Пусть функция f мероморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$, гомеоморфной $2n$-мерному шару, и $\overline{\mathscr{P}}$ — полярное множество f, которое получается добавлением к $\mathscr{P} \cap D$ множества $\mathscr{P} \cap \partial D$, отождествленного в точку. Пусть τ_ν, $\nu = 1, \ldots, \rho$, — база $(n-1)$-мерных гомологий множества $\overline{\mathscr{P}}$ и R_ν — вычет f относительно особого цикла τ_ν. Тогда для любого n-мерного цикла $\sigma \subset D \setminus \mathscr{P}$*

$$\int_\sigma f\, dz = (2\pi i)^n \sum_{\nu=1}^{\rho} k_\nu R_\nu, \tag{13}$$

где $k_\nu = c(\sigma, \tau_\nu)$ — коэффициент зацепления σ с особым циклом τ_ν

Примеры:

1. Если f — целая функция n комплексных переменных, $n > 1$, а $l(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z_\nu + \beta$ — линейная функция, то для любого n-мерного цикла $\sigma \subset \mathbb{C}^n \setminus \{l(z) = 0\}$ и для любого целого числа m

$$\int_\sigma \frac{f(z)\, dz}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu z_\nu + \beta\right)^m} = 0.$$

В самом деле, границей области $\mathbb{C}^n$ являются бесконечные точки, которые нужно отождествить в одну. Полярное множество $\mathscr{P} = \{l(z) = 0\}$ после пополнения отождествленными бесконечными точками станет $(2n-2)$-мерной сферой $\overline{\mathscr{P}}$. При $n > 1$

любой $(n-1)$-мерный цикл на $\overline{\mathscr{P}}$ гомологичен нулю ($\rho=0$), база (τ_ν) тривиальна и, значит, рассматриваемый интеграл равен нулю.

По тем же причинам равен нулю при $n>1$ интеграл

$$\int_\sigma \frac{f(z)\,dz}{\prod\limits_{\mu=1}^{p}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu z_\nu+\beta_\mu\right)^{m_\mu}},$$

где f — целая функция, а полярное множество $\mathscr{P}$ представляет собой набор p параллельных плоскостей. (Здесь $\overline{\mathscr{P}}$ — «букет» $(2n-2)$-мерных сфер, касающихся друг друга в отождествленных бесконечных точках.)

2. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_\sigma \frac{e^{zw}\,dz\wedge dw}{(z-2w)(w-2z)},$$

где σ — произвольный двумерный цикл из $\mathbb{C}^2$, не пересекающийся с полярным множеством $\mathscr{P}=\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2$, где $\mathscr{P}_1=\{z=2w\}$ и $\mathscr{P}_2=\{w=2z\}$.

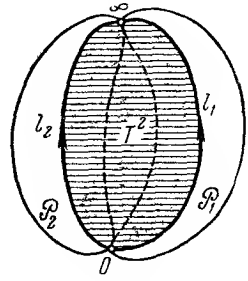


Рис. 119.

Пополненное полярное множество $\overline{\mathscr{P}}$ состоит из двух двумерных сфер $\overline{\mathscr{P}}_1$ и $\overline{\mathscr{P}}_2$, пересекающихся в двух точках: $\{z=0, w=0\}$ и отождествленной бесконечности. Нам нужно найти базу одномерных гомологий $\overline{\mathscr{P}}$. Очевидно, всякий одномерный цикл, лежащий полностью на одной из сфер, гомологичен нулю. Поэтому не гомологичный нулю цикл должен проходить от точки (0, 0) по одной сфере до ∞ и затем возвращаться по другой сфере в ту же точку. Все такие циклы гомологичны несколько раз проходимому циклу τ, который состоит из какого-либо луча $l_1\subset\overline{\mathscr{P}}_1$, идущего из (0, 0) в бесконечность, и какого-либо луча $l_2\subset\overline{\mathscr{P}}_2$, идущего из бесконечности в (0, 0) (см. схематический рис. 119). Пусть, например, l_1 проходит через точку (2, 1), а l_2 — через точку (1, 2), тогда параметрические уравнения этих лучей будут иметь вид

$$l_1:\ \left.\begin{matrix}z=2t_1,\\ w=t_1\end{matrix}\right\}\ 0\leqslant t_1\leqslant\infty;\qquad l_2:\ \left.\begin{matrix}z=t_2,\\ w=2t_2\end{matrix}\right\}\ 0\leqslant t_2\leqslant\infty.$$

У нас $\rho=1$, следовательно, достаточно вычислить интеграл от f по какому-либо одному не гомологичному нулю в $\mathbb{C}^2\setminus\mathscr{P}$

двумерному циклу γ. Выберем в качестве γ тор $\{e^{i\varphi}, e^{i\psi}\}$, где $0 \leqslant \varphi, \psi \leqslant 2\pi$, тогда

$$\int_{\gamma} f\,dz \wedge dw = \int_{\{|w|=1\}} \int_{\{|z|=1\}} \frac{e^{zw}\,dz \wedge dw}{(z-2w)(w-2z)}.$$

Так как у нас $|w|=1$, то при вычислении внутреннего интеграла нужно учитывать лишь вычет в точке $z=\frac{w}{2}$, и, значит, этот интеграл равен $\frac{2\pi i}{3w} e^{\frac{w^2}{2}}$, а весь интеграл равен $-\frac{4}{3}\pi^2$ (из того, что интеграл отличен от 0, и вытекает, что γ не гомологичен нулю).

Найдем коэффициент зацепления $c(\gamma, \tau) = a$; по определению он равен индексу пересечения γ с двумерной пленкой T^2, натянутой на τ. Параметрическими уравнениями T^2 служат

$$\left.\begin{aligned} z &= 2t_1 + t_2, \\ w &= t_1 + 2t_2 \end{aligned}\right\} \quad 0 < t_1,\ t_2 < \infty,$$

а с тором γ эта пленка пересекается лишь в одной точке (1, 1), которая соответствует значениям параметров $t_1 = t_2 = \frac{1}{3}$, $\varphi = \psi = 0$. В этой точке $\frac{\partial(x, y, u, v)}{\partial(t_1, t_2, \varphi, \psi)} > 0$ (мы положили $z = x + iy$, $w = u + iv$), откуда видно, что индекс пересечения $i(\gamma, T^2) = c(\gamma, \tau) = 1$. По формуле (12) находим, что вычет f относительно особого цикла τ равен

$$R = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} f\,dz \wedge dw = \frac{1}{3},$$

и тогда по теореме 2 получаем значение искомого интеграла:

$$I = -\frac{4\pi^2}{3} c(\sigma, \tau),$$

где $c(\sigma, \tau)$ — коэффициент зацепления (двумерного) цикла интегрирования σ с особым (одномерным) циклом τ.

41. Теория Лере. Здесь мы рассмотрим другой метод вычисления интегралов, принадлежащий Ж. Лере. В ряде случаев этот метод позволяет свести вычисление интеграла от формы ω степени p по p-мерному циклу σ к вычислению интеграла от формы $\operatorname{res}\omega$ степени $p-1$, называемой формой-вычетом, по некоторому $(p-1)$-мерному циклу, лежащему на многообразии особенностей формы ω. Метод Лере также можно рассматривать как обобщение классического метода вычетов, ко-

торый соответствует случаю $p=1$ и сводит вычисление интегралов от форм $\omega=f\,dz$ по замкнутым кривым к вычислению значений вычетов $\operatorname{res} f$ в особых точках f (т. е. нульмерных интегралов от $\operatorname{res} f$ по этим точкам). Мы изложим этот метод в его простейшем варианте [1]).

Пусть на n-мерном комплексном многообразии M задано $(n-1)$-мерное комплексное подмногообразие $\mathscr{P}$, которое в окрестности $U_{z^0}\subset M$ каждой своей точки z^0 задается как множество нулей голоморфной в этой окрестности функции ψ_{z_0} такой, что $\operatorname{grad}\psi_{z^0}\neq 0$ в U_{z_0}:

$$\mathscr{P}\cap U_{z^0}=\{z\in U_{z^0}:\quad \psi_{z^0}(z)=0\}. \tag{1}$$

Пусть на $M\setminus\mathscr{P}$ задана дифференциальная форма ω степени p, $0<p\leqslant 2n$, класса C^∞, имеющая на $\mathscr{P}$ *полярную особенность первого порядка*. Последнее условие означает, что в каждой U_{z^0}, $z^0\in\mathscr{P}$, произведение $\psi_{z^0}\omega$ продолжается до C^∞-формы на U_{z^0}.

Лемма. *Форма $\alpha\in C^\infty(M)$ тогда и только тогда представима в окрестности U точки $z^0\in\mathscr{P}$ в виде* [2])

$$\alpha=d\psi\wedge\beta, \tag{2}$$

где $\beta\in C^\infty(U)$, когда в этой окрестности

$$d\psi\wedge\alpha=0. \tag{3}$$

◀ Примем ψ за одну из локальных координат, определяющих $\mathscr{P}$ в окрестности U, скажем за переменную z_1 (это возможно в силу условий, наложенных выше на ψ). Выражение для α в этих координатах можно разбить на два слагаемых:

$$\alpha=\sum\alpha_{i_1\dots i_p}dZ_{i_1}\wedge\dots\wedge dZ_{i_p}=dz_1\wedge\beta+\alpha',$$

где α' не содержит dz_1 (как всегда, мы полагаем $Z_\nu=z_\nu$, $Z_{n+\nu}=\bar z_\nu$, $\nu=1,\dots,n$). Таким образом, если α представима в виде (2) при $\psi=z_1$, то $\alpha'=0$, а значит, и $dz_1\wedge\alpha=0$, т. е. (3) выполняется. Обратно, если $dz_1\wedge\alpha=0$, то и $dz_1\wedge\alpha'=0$, а так как α' не содержит dz_1, то это может быть лишь при $\alpha'=0$ ▶

Теорема 1. *Если форма $\omega\in C^\infty(M\setminus\mathscr{P})$, имеющая на $\mathscr{P}$ полярную особенность первого порядка, замкнута в $M\setminus\mathscr{P}$, то*

---

[1]) Полное изложение см. в книге: Ж. Лере, Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, ИЛ, М, 1961.

[2]) Для простоты письма мы опускаем индекс z^0 в обозначениях U, ψ и β.

в окрестности U произвольной точки $z^0 \in \mathscr{P}$ вне $\mathscr{P}$ она представима в виде

$$\omega = \frac{d\psi}{\psi} \wedge r + \omega_1, \tag{4}$$

где формы r, $\omega_1 \in C^\infty(U)$. При этом сужение $r|_{\mathscr{P}}$ не зависит от выбора функции ψ и является замкнутой формой.

◀ Так как у нас $\psi\omega \in C^\infty(U)$, то $d(\psi\omega) = d\psi \wedge \omega + \psi \wedge d\omega$; но на $M \setminus \mathscr{P}$ имеем $d\omega = 0$ (ибо ω замкнута), значит, по непрерывности $d(\psi\omega) = d\psi \wedge \omega$ всюду в U. Таким образом, $d\psi \wedge \omega$ продолжается на $\mathscr{P}$ до формы $\alpha \in C^\infty(U)$, и по лемме найдется форма $\beta = \omega_1 \in C^\infty(U)$ такая, что

$$d\psi \wedge \omega = d\psi \wedge \omega_1.$$

Умножив это равенство на ψ, найдем $d\psi \wedge (\psi\omega - \psi\omega_1) = 0$, где $\psi\omega - \psi\omega_1 \in C^\infty(U)$; значит, по той же лемме существует форма $r \in C^\infty(U)$ такая, что $\psi\omega - \psi\omega_1 = d\psi \wedge r$. Это равенство вне $\mathscr{P}$ равносильно (4).

Покажем, что сужение $r|_{\mathscr{P}}$ однозначно определяется формой ω. Предположим сначала, что функция ψ, определяющая полярное множество $\mathscr{P}$, задана, и докажем, что из равенства

$$0 = \frac{d\psi}{\psi} \wedge r + \omega_1 \tag{5}$$

следует равенство $r|_{\mathscr{P}} = 0$. Но из (5) мы получаем $d\psi \wedge r + \psi\omega_1 = 0$, откуда $d\psi \wedge \psi\omega_1 = 0$, а так как ψ — функция, отличная от нуля в $U \setminus \mathscr{P}$, то там $d\psi \wedge \omega_1 = 0$; в силу того, что $d\psi \wedge \omega_1 \in C^\infty(U)$, последнее равенство справедливо и всюду в U. Мы можем применить лемму, по которой найдется форма ω_2 такая, что $\omega_1 = d\psi \wedge \omega_2$. Подставляя это в (5), находим $d\psi \wedge (r + \psi\omega_2) = 0$; по той же лемме $r + \psi\omega_2 = d\psi \wedge \omega_3$, где $\omega_3 \in C^\infty(U)$. Отсюда и видно, что сужение $r|_{\mathscr{P}} = 0$, ибо на $\mathscr{P}$ у нас $\psi = d\psi = 0$.

Теперь докажем независимость $r|_{\mathscr{P}}$ и от выбора функции ψ, определяющей полярное множество. Пусть это множество (в пределах окрестности U) определяется еще функцией $\tilde{\psi}$; тогда частное $\tilde{\psi}/\psi = \chi$ голоморфно и отлично от нуля в U (см. п. 33). Пусть мы имеем

$$\omega = \frac{d\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}} \wedge \tilde{r} + \tilde{\omega}_1,$$

где $\tilde{r}$, $\tilde{\omega}_1 \in C^\infty(U)$. Подставляя сюда $\tilde{\psi} = \psi\chi$, найдем

$$\omega = \frac{d\psi}{\psi} \wedge \tilde{r} + \frac{d\chi}{\chi} \wedge \tilde{r} + \tilde{\omega}_1 = \frac{d\psi}{\psi} \wedge \tilde{r} + \omega_1;$$

здесь $\omega_1 = \frac{d\chi}{\chi} \wedge \tilde{r} + \tilde{\omega}_1 \in C^\infty(U)$, и по доказанному выше $\tilde{r}|_{\mathscr{P}} = r|_{\mathscr{P}}$.

Остается доказать замкнутость формы $r|_{\mathscr{P}}$. Но вне $\mathscr{P}$ в силу замкнутости ω мы имеем $d\omega = -\frac{d\psi}{\psi} \wedge dr + d\omega_1 = 0$, причем в силу непрерывности это равенство справедливо всюду в $\mathscr{P}$. В силу доказанной выше единственности заключаем, что $dr|_{\mathscr{P}} = 0$ ▶

Определение 1. *Формой-вычетом* замкнутой формы $\omega \in C^\infty(M \setminus \mathscr{P})$, имеющей на $\mathscr{P}$ полярную особенность первого порядка, называется замкнутая форма, которая в окрестности каждой точки $z^0 \in \mathscr{P}$ равна сужению на $\mathscr{P}$ формы r в разложении (4):

$$\operatorname{res} \omega = r|_{\mathscr{P}}. \tag{6}$$

Таким образом, оператор res преобразует группу $Z^p(M \setminus \mathscr{P})$ замкнутых C^∞-форм степени p в группу $Z^{p-1}(\mathscr{P})$ замкнутых C^∞-форм степени $p-1$:

$$\operatorname{res}: \quad Z^p(M \setminus \mathscr{P}) \to Z^{p-1}(\mathscr{P}). \tag{7}$$

Замечание. Если форма ω голоморфна [1]) на $M \setminus \mathscr{P}$, то и $\operatorname{res}\omega$ голоморфна на $\mathscr{P}$. Это следует из того, что в случае голоморфности ω формы r и ω_1 при доказательстве теоремы 1 также можно выбрать голоморфными.

Пример. Пусть p равно (комплексной) размерности n многообразия M, а форма ω голоморфна на $M \setminus \mathscr{P}$ и в локальных координатах $z = (z_1, \ldots, z_n)$, действующих в окрестности U точки $z^0 \in \mathscr{P}$, она представляется в виде

$$\omega = \frac{\varphi}{\psi} dz = \frac{\varphi}{\psi} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n, \tag{8}$$

где $\varphi, \psi \in H(U)$, а $\psi|_{\mathscr{P}} = 0$, $\left.\frac{\partial\psi}{\partial z_\nu}\right|_{\mathscr{P}} \neq 0$. Тогда можно написать

$$\omega = \frac{\varphi}{\frac{\partial\psi}{\partial z_\nu}} (-1)^{\nu-1} \frac{\frac{\partial\psi}{\partial z_\nu} dz_\nu}{\psi} \wedge dz_1 \wedge \ldots \overset{\nu}{\wedge} \ldots dz_n =$$

$$= (-1)^{\nu-1} \frac{\varphi}{\frac{\partial\psi}{\partial z_\nu}} \frac{d\psi}{\psi} \wedge \ldots \overset{\nu}{\wedge} \ldots \wedge dz_n,$$

[1]) Определение голоморфной формы см. в п. 14.

откуда видно, что

$$\operatorname{res}\omega=(-1)^{\nu-1}\frac{\varphi}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z_\nu}}\Bigg|_{\mathscr{P}} dz_1\wedge\ldots\overset{\vee}{\ldots}\ldots dz_n. \tag{9}$$

При $n=1$ мы получаем обычную формулу для вычета в полюсе первого порядка: $\operatorname{res}\limits_a \frac{\varphi}{\psi}dz=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

Перейдем к описанию так называемого *кограничного оператора* Лере δ, который каждой точке $z^0\in\mathscr{P}$ сопоставляет гомеоморф окружности $\delta z^0\in M\setminus\mathscr{P}$ (и таким образом увеличивает действительную размерность на 1). Этот оператор должен обладать следующими свойствами:

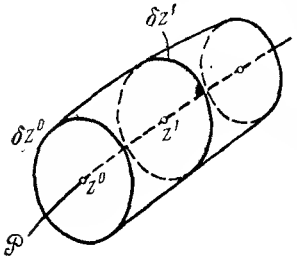


Рис. 120.

1. В некоторой окрестности U_{z^0} существуют локальные координаты $(z_1, \ldots, z_n)=z$ с началом z^0, в которых $\mathscr{P}\cap U_{z^0}$ определяется уравнением $z_n=0$, а $\delta z^0\subset U_{z^0}$ и определяется уравнением $|z_n|=1$.

2. Совокупность $\bigcup\limits_{z\in\mathscr{P}}\delta z$ образует в $M\setminus\mathscr{P}$ непрерывную поверхность.

3. При $z'\neq z''$ линии $\delta z'$ и $\delta z''$ не имеют общих точек.

Таким образом, совокупность $\bigcup\limits_{z\in\mathscr{P}}\delta z$ составляет границу трубчатой окрестности многообразия $\mathscr{P}$ (см. схематический рис. 120, где $\mathscr{P}$ изображено линией, а M — трехмерным пространством). В принятых выше условиях построение такого оператора δ всегда возможно, ибо действительные размерности $\mathscr{P}$ и M отличаются на две единицы.

Пусть теперь σ — цикл на $\mathscr{P}$ действительной размерности $p-1$; мы предположим, что носитель этого цикла (т. е. соответствующий ему полиэдр) компактно[1]) принадлежит $\mathscr{P}$. Обозначим

$$\delta\sigma=\bigcup_{z\in\sigma}\delta z;$$

мы можем рассматривать $\delta\sigma$ как p-мерную цепь на $M\setminus\mathscr{P}$, если введем в ней естественную ориентацию, соответствующую ориентации σ. Для этого достаточно ввести ориентацию на каждой линии δz, например так: будем считать, что ориентация в окрестности U_z задается порядком следования локальных

[1]) Это предположение нужно для того, чтобы избежать рассмотрения несобственных интегралов (см. п. 11).

координат $z_1, \ldots, z_n$, а на многообразии $U_z \cap \mathscr{P}$ — порядком $z_1, \ldots, z_{n-1}$; тогда положительный обход на δz будет соответствовать возрастанию t_n в представлении $z_n = e^{it_n}$ окружности δz (см. свойство 1 оператора δ).

Легко видеть, что оператор δ коммутирует с оператором ∂ взятия границ ($\delta\partial = \partial\delta$), поэтому он переводит циклы снова в циклы и циклы, гомологичные нулю, в такие же. Таким образом, δ устанавливает гомоморфизм групп гомологий

$$\delta\colon\ H_{p-1}^{(c)}(\mathscr{P}) \to H_p^{(c)}(M \setminus \mathscr{P}) \tag{10}$$

(см. п. 12; значок (c) в обозначении групп указывает на то, что рассматриваются компактные гомологии, т. е. принимаются во внимание лишь цепи с компактными носителями).

Следующая теорема является обобщением теоремы Коши о вычетах из ч. I.

Теорема 2. *Пусть $(p-1)$-мерный цикл $\sigma \in \mathscr{P}$ и $\omega \in C^\infty(M \setminus \mathscr{P})$ — замкнутая форма степени p, имеющая $\mathscr{P}$ своим полярным множеством первого порядка; тогда*

$$\int_{\delta\sigma} \omega = 2\pi i \int_{\sigma} \operatorname{res} \omega, \tag{11}$$

где δ — кограничный оператор Лере.

◀ Обозначим через δ_ε, $0<\varepsilon<1$, оператор, который обладает свойствами 1—3 оператора δ, с той лишь разницей, что в 1 уравнение $|z_n| = 1$ заменено уравнением $|z_n| = \varepsilon$ и при $\varepsilon \to 0$ трубчатая окрестность $\sigma^{(\varepsilon)}$, ограниченная поверхностью $\delta_\varepsilon\sigma = \bigcup_{z \in \sigma} \delta_\varepsilon z$, стягивается в σ. По формуле Стокса (п. 14) для любых ε_1 и ε_2, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1$, имеем

$$\int_{\delta_{\varepsilon_2}\sigma} \omega - \int_{\delta_{\varepsilon_1}\sigma} \omega = \int_{\sigma^{(\varepsilon_2)} \setminus \sigma^{(\varepsilon_1)}} d\omega = 0$$

в силу замкнутости формы, так что интеграл от ω по $\delta_\varepsilon\sigma$ не зависит от ε.

Теперь покроем $\sigma^{(1)}$ конечной системой окрестностей $\{U_j\}_{j\in J}$, в каждой из которых действует теорема 1 и, как выше, можно принять $\psi(z) = z_n$. Построим для этого покрытия разбиение единицы $\{e_j\}$ (см. п. 11) и применим в каждой U_j теорему 1, в которой положено $\psi = z_n$; мы получим

$$\int_{\delta_\varepsilon\sigma} \omega = \sum_{j\in J} \int_{\delta_\varepsilon\sigma} e_j\omega = \sum_{j\in J} \int_{\delta_\varepsilon\sigma} e_j \frac{dz_n}{z_n} \wedge r + \sum_{j\in J} \int_{\delta_\varepsilon\sigma} e_j\omega_1. \tag{12}$$

Здесь

$$\int\limits_{\delta_\varepsilon\sigma} e_j \frac{dz_n}{z_n} \wedge r = \int\limits_{\{|z_n|=\varepsilon\}} \frac{dz_n}{z_n} \int\limits_{\{'z \in \sigma,\ |z_n|=\varepsilon\}} e_j r('z, z_n) \to 2\pi i \int\limits_{\sigma} e_j \operatorname{res} \omega$$

при $\varepsilon \to 0$, левая часть (12) не зависит от ε и равна интегралу по $\delta\sigma$, а вторая сумма в правой части стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому, переходя в (12) к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы будем иметь

$$\int\limits_{\delta\sigma} \omega = 2\pi i \sum_{j \in J} \int\limits_{\sigma} e_j \operatorname{res} \omega = 2\pi i \int\limits_{\sigma} \operatorname{res} \omega \blacktriangleright$$

Заметим, что если заменить σ другим циклом σ', принадлежащим тому же классу $h \in H^{(c)}_{p-1}(\mathscr{P})$ компактных гомологий на $\mathscr{P}$ (это означает, что $\sigma' - \sigma$ ограничивает некоторую p-мерную цепь, компактно принадлежащую $\mathscr{P}$), то в силу замкнутости формы $\operatorname{res} \omega$ интегралы от нее по σ и σ' по формуле Стокса совпадают. Учитывая еще, что согласно (10) оператор δ сохраняет гомологии, мы можем заменить в (11) циклы σ и $\delta\sigma$ любыми представителями соответствующих классов $h \in H^{(c)}_{p-1}(\mathscr{P})$ и $\delta h \in H^{(c)}_{p}(M \setminus \mathscr{P})$. Поэтому формулу (11) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\delta h} \omega = 2\pi i \int\limits_{h} \operatorname{res} \omega. \tag{13}$$

Ясно, далее, что если к ω добавить точную в $M \setminus \mathscr{P}$ форму (т. е. являющуюся дифференциалом некоторой формы степени $p-1$), то интегралы в (13) не изменятся. Класс форм, отличающихся от ω на точные формы, является классом когомологий, содержащим ω, а совокупность таких классов для всех замкнутых форм ω степени $p+1$ из $C^\infty(M \setminus \mathscr{P})$ — группой когомологий $H^p(M \setminus \mathscr{P})$ (см. п. 13). Мы видим, что класс когомологий из $H^{p-1}(\mathscr{P})$, содержащий $\operatorname{res} \omega$, зависит только от класса когомологий из $H^p(M \setminus \mathscr{P})$, содержащего форму ω.

Определение 2. Пусть ω — некоторая замкнутая форма, представляющая класс $\omega^* \in H^p(M \setminus \mathscr{P})$; класс когомологий из $H^{p-1}(\mathscr{P})$, содержащий форму $\operatorname{res} \omega$, называется *классом-вычетом* и обозначается символом $\operatorname{Res} \omega = \operatorname{Res} \omega^*$.

Формулу (13) теперь можно переписать в виде

$$\int\limits_{\partial h} \omega^* = 2\pi i \int\limits_{h} \operatorname{Res} \omega^*. \tag{14}$$

Можно убедиться в том, что оператор Res устанавливает гомоморфизм соответствующих групп когомологий:

$$\text{Res:}\quad H^p(M \setminus \mathscr{P}) \to H^{p-1}(\mathscr{P}). \tag{15}$$

Опишем в общих чертах случай полярных особенностей выше первого порядка. Пусть опять на n-мерном комплексном многообразии M задается многообразие $\mathscr{P}$, локально описываемое как множество нулей голоморфной функции ψ, для которой $\operatorname{grad}\psi \neq 0$. Будем говорить, что форма $\omega \in C^\infty(M \setminus \mathscr{P})$ имеет на $\mathscr{P}$ *полярную особенность порядка* q, если произведение $\psi^q\omega$ продолжается до C^∞-формы на M, а $\psi^{q'}\omega$, где $q' < q$, не продолжается.

Приведем без доказательства теорему, которая сводит вычисление интегралов от замкнутых форм, имеющих на $\mathscr{P}$ полярную особенность выше первого порядка, к уже рассмотренному случаю (см. книгу Лере, цит. на стр. 493):

Для любой замкнутой формы $\omega \in C^\infty(M \setminus \mathscr{P})$, *имеющей на* $\mathscr{P}$ *полярную особенность, найдется когомологичная ей форма* ω_0, *которая имеет на* $\mathscr{P}$ *особенность первого порядка.*

Класс когомологий из $H^{p-1}(\mathscr{P})$, содержащий $\operatorname{res}\omega_0$, т. е. класс $\operatorname{Res}\omega_0$, называется *классом-вычетом* формы ω; он определяется лишь классом когомологий из $H^p(M \setminus \mathscr{P})$, содержащим ω.

В плоском случае переход от формы $\omega = f\,dz$ к $\omega_0 = f_0\,dz$ состоит в замене $f(z) = \frac{c_{-a}}{(z-a)^q} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a}$ функцией $f_0 = \frac{c_{-1}}{z-a}$, имеющей в точке a полюс первого порядка и тот же вычет, что и f. Отметим, что в пространственном случае для голоморфной ω форма ω_0 не обязана быть голоморфной и вообще класс-вычет $\operatorname{Res}\omega$ голоморфной формы ω может не содержать голоморфных форм [1]). Этим и объясняется необходимость рассматривать в теории Лере не только голоморфные, но и формы класса C^∞.

Для практики важен также случай, когда форма ω имеет несколько полярных многообразий $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_m$ порядков соответственно $q_1, \ldots, q_m$. Предполагается, что $\mathscr{P}_\nu$ находятся в общем положении, т. е. что во всех точках их пересечений матрицы, составленные из производных функций, определяющих эти многообразия, по локальным координатам имеют наивысший возможный ранг. Мы обозначим $\mathscr{P}^j = (\mathscr{P}_1 \cap \ldots$

[1]) Из замечания вслед за теоремой 1 видно, что это обстоятельство может возникнуть лишь при рассмотренных форм с полярной особенностью выше первого порядка.

$\ldots \cap \mathscr{P}_j) \setminus (\mathscr{P}_{j+1} \cup \ldots \cup \mathscr{P}_m)$, $j = 1, \ldots, m-1$, $\mathscr{P}^m = \mathscr{P}_1 \cap \ldots$ $\ldots \cap \mathscr{P}_m$, $\mathscr{P}^0 = M \setminus (\mathscr{P}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{P}_m)$ и рассмотрим последовательность гомоморфизмов δ^j, которые ставят в соответствие циклам σ, принадлежащим классам компактных гомологий из $H^{(c)}(\mathscr{P}^j)$, циклы $\delta^j\sigma$, принадлежащие классам из $H^{(c)}(\mathscr{P}^{j-1})$:

$$\delta_m\colon\quad H^{(c)}(\mathscr{P}^m) \xrightarrow{\delta^m} H^{(c)}(\mathscr{P}^{m-1}) \to \ldots \to H^{(c)}(\mathscr{P}^1) \xrightarrow{\delta} H^{(c)}(\mathscr{P}^0). \quad (16)$$

Циклы $\delta^j\sigma$ расслаиваются на гомеоморфы окружностей, обходящие $\mathscr{P}^j$ и принадлежащие $\mathscr{P}^{j-1}$. Как и выше, этой последовательности двойственна последовательность гомоморфизмов групп когомологий, которая определяет *сложный класс-вычет*:

$$\mathrm{Res}^m\colon\quad H(\mathscr{P}^0) \to H(\mathscr{P}^1) \to \ldots \to H(\mathscr{P}^{m-1}) \to H(\mathscr{P}^m). \quad (17)$$

Последовательным применением формулы (14) получается следующее утверждение:

Для любого $(p-m)$-мерного цикла σ из класса гомологий $h \in H^{(c)}_{p-m}(\mathscr{P}^m)$ и любой замкнутой C^∞-формы ω степени p из класса когомологий $\omega^* \in H^p(\mathscr{P}^0)$ имеет место формула вычета

$$\int\limits_{\delta_m h} \omega^* = (2\pi i)^m \int\limits_h \mathrm{Res}^m \omega^*. \quad (18)$$

В заключение отметим, что если форма ω обращается в нуль на некотором $(n-1)$-мерном комплексном многообразии $Q \subset M$, то интегралы от нее и от $\mathrm{res}\,\omega$ по пересечениям $\sigma \cap Q$ и $\delta\sigma \cap Q$ исчезают. Это дает возможность рассматривать вместо групп гомологий и когомологий группы относительных гомологий и когомологий. Поясним эти понятия на примере группы относительных гомологий. Будем рассматривать подмногообразие Q некоторого многообразия M как его подкомплекс [1]); через $C_p(M)$ и $C_p(Q)$ обозначим группы p-мерных цепей на этих комплексах (как всегда, с целыми коэффициентами). Цепь $\sigma \in C_p(M)$ будем называть *циклом относительно Q*, если ее граница $\partial\sigma \subset Q$ (в частности, равна нулю). Группа $C_p(Q)$ является подгруппой $C_p(M)$; факторгруппу

$$C_p(M, Q) = C_p(M)/C_p(Q)$$

будем называть группой *относительных цепей*. Цепь $\sigma_p \in C_p(M)$ называется *относительной границей*, если существует цепь

[1]) Это означает, что каждый симплекс из Q в то же время является симплексом из M.

$\sigma_{p+1} \in C_{p+1}(M)$ такая, что $\sigma_p - \partial\sigma_{p+1} \subset C_p(Q)$. Относительные границы образуют подгруппу $B_p(M, Q)$ группы $Z_p(M, Q)$ всех относительных циклов; факторгруппа

$$H_p(M, Q) = Z_p(M, Q)/B_p(M, Q)$$

называется группой *относительных гомологий*.

При рассмотрении форм ω, имеющих полярную особенность первого порядка на многообразии $\mathscr{P}$ и обращающихся в нуль на многообразии Q (они предполагаются находящимися в общем положении), можно несколько уточнить описанную выше конструкцию. Именно, к свойствам 1—3 кограничного оператора Лере можно добавить еще свойство:

4. Если $z \in \mathscr{P} \cap Q$, то $\delta z \subset Q$.

Тогда этот оператор каждый относительный цикл $\sigma \in Z_{p-1}(\mathscr{P}, Q)$ [1]) преобразует в относительный цикл $\delta\sigma \in Z_p(M \setminus \mathscr{P}, Q)$. Легко убедиться в том, что он устанавливает гомоморфизм соответствующих групп относительных гомологий:

$$\delta\colon\ H_{p-1}(\mathscr{P}, Q) \to H_p(M \setminus \mathscr{P}, Q). \tag{19}$$

Формула вычета (13) для классов относительных гомологий $h \in H_{p-1}(\mathscr{P}, Q)$ и $\delta h \in H_p(M \setminus \mathscr{P}, Q)$ сохраняется.

Примеры применения метода Лере для вычисления интегралов, имеющих важное значение в теоретической физике, можно найти в книге: Р. Хуа и В. Теплиц, Гомология и фейнмановские интегралы, «Мир», М., 1969.

42. Логарифмический вычет. Как и в плоском случае, он оказывается связанным с понятием индекса. Рассмотрим сначала действительный случай. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан гладкий $(n-1)$-мерный цикл σ: $x = x(t)$, $t \in I^{n-1}$, т. е. замкнутая поверхность класса C^1 (здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ и I^{n-1} — $(n-1)$-мерный куб). Предположим, что σ не содержит точку $x = 0$, и назовем *индексом* этой поверхности (в смысле А. Пуанкаре) относительно $x = 0$ величину

$$i_0(\sigma) = \frac{1}{\Sigma_n} \int\limits_{I^{n-1}} \frac{1}{|x|^n} \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_{n-1}, \tag{1}$$

[1]) Под $Z(\mathscr{P}, Q)$ понимается $Z(\mathscr{P}, \mathscr{P} \cap Q)$; аналогичное соглашение принимается и в дальнейших формулах.

где $\Sigma_n = \dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ — площадь n-мерной сферы $\{|x|=1\}$. Индекс в смысле Пуанкаре является прямым n-мерным аналогом индекса на плоскости: полагая в (1) $n=2$ и $x_1=x$, $x_2=y$, получим

$$i_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_I \frac{1}{x^2+y^2}(xy'-yx')\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_I d\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Форма под интегралом (1)

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{x_\nu}{|x|^n}\frac{\partial\left(x_1, \ldots, \overset{\nu}{\wedge}, \ldots, x_n\right)}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}\,dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{x_\nu}{|x|^n}\,dx_1 \ldots \overset{\nu}{\wedge} \ldots dx_n$$

имеет особенность в точке $x=0$ и замкнута в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ибо при $x \neq 0$

$$d\omega = \left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{x_\nu}{|x|^n}\right)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \operatorname{div}\frac{x}{|x|^n}\,dx = 0.$$

Отсюда по формуле Стокса мы заключаем, что если два цикла σ_1 и σ_2 гомологичны друг другу в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (т. е. разность $\sigma_1 - \sigma_2$ ограничивает некоторую цепь из $\mathbb{R}^n$, не содержащую точку $x=0$), то интегралы от ω по этим циклам равны. Так как базой $(n-1)$-мерных гомологий в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ служит единичная сфера $\{|x|=1\}$, то любой рассматриваемый цикл σ гомологичен этой сфере с некоторым целочисленным коэффициентом k. По только что сделанному замечанию

$$i_0(\sigma) = \frac{1}{\Sigma_n}\int_\sigma \omega = \frac{k}{\Sigma_n}\int_{\{|x|=1\}}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}x_\nu\,dx_1 \ldots \overset{\nu}{\wedge} \ldots dx_n,$$

откуда снова по формуле Стокса

$$i_0(\sigma) = \frac{k}{\Sigma_n}\int_{\{|x|<1\}} n\,dx = \frac{kn}{\Sigma_n}\Omega_n,$$

где $\Omega_n = \dfrac{1}{n}\Sigma_n$ — объем n-мерного шара $\{|x|<1\}$. Таким образом,

$$i_0(\sigma) = k.$$

Переходя к комплексной структуре, мы рассмотрим четномерное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ и введем в нем координаты $z_\nu = x_\nu +$

$+ ix_{n+\nu}$, $\bar{z}_\nu = x_\nu - ix_{n+\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Индекс $(2n-1)$-мерного цикла σ, не содержащего точку $z = 0$, записывается формулой

$$i_0(\sigma) = \frac{1}{(4i)^n \Sigma_{2n}} \int\limits_{I^{2n-1}} \frac{1}{|z|^{2n}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & \ldots & z_n + \bar{z}_n & z_1 - \bar{z}_1 & \ldots & z_n - \bar{z}_n \\ \dfrac{\partial}{\partial t_1}(z_1 + \bar{z}_1) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial t_1}(z_n - \bar{z}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial}{\partial t_{2n-1}}(z_1 + \bar{z}_1) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial t_{2n-1}}(z_n - \bar{z}_n) \end{vmatrix} \times$$

$$\times\, dt_1 \ldots dt_{2n-1},$$

которая после простых преобразований определителя переписывается так:

$$i_0(\sigma) = \frac{1}{\Sigma_{2n}} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{I^{2n-1}} \frac{1}{|z|^{2n}} \begin{vmatrix} z_1 & \ldots & z_n & \bar{z}_1 & \ldots & \bar{z}_n \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial t_1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial t_{2n-1}} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial \bar{z}_n}{\partial t_{2n-1}} \end{vmatrix} \times$$

$$\times\, dt_1 \ldots dt_{2n-1}. \quad (2)$$

Форму под интегралом (2) можно записать в виде

$$\Omega = \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu-1} \frac{Z_\nu}{|z|^{2n}} \frac{\partial (Z_1, \ldots, \overset{\nu}{\wedge}, \ldots, Z_{2n})}{\partial (t_1, \ldots, t_{2n-1})}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{2n-1} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu-1} \frac{Z_\nu}{|z|^{2n}}\, dZ_1 \wedge \ldots \overset{\nu}{\wedge} \ldots dZ_{2n},$$

где как всегда $Z_\nu = z_\nu$, $Z_{n+\nu} = \bar{z}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Эта форма имеет особенность в точке $z = 0$ и замкнута в $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. По тем же соображениям, что и выше, σ гомологичен целочисленному кратному границы поликруга $U = \{|z_\nu| < 1\}$ и

$$i_0(\sigma) = \frac{1}{\Sigma_{2n}} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{k\,\partial U} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{Z_\nu}{|z|^{2n}}\, dZ_1 \wedge \ldots \overset{\nu}{\wedge} \ldots \wedge dZ_{2n} \quad (3)$$

(мы считаем, что ∂U берется с коэффициентом k, и потому не ставим множитель перед интегралом).

Оказывается, что подобно тому, как это делалось при выводе формулы Вейля в п. 18, повторным применением формулы Стокса можно понизить размерность множества интегрирования

до n и одновременно исключить неаналитичность подинтегральной формы. Мы получим тогда формулу для индекса в виде

$$i_0(\sigma) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{k\Gamma} \frac{dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{z_1 \ldots z_n}, \tag{4}$$

где $k\Gamma$ — целочисленное кратное остова поликруга $\Gamma = \{|z_\nu| = 1\}$. Эта формула вполне аналогична плоской формуле для индекса замкнутого пути относительно точки $z = 0$.

Для формальных упрощений проведем соответствующую выкладку в случае $n = 2$. Мы имеем $\Sigma_4 = 2\pi^2$, и формула (3) принимает вид

$$i_0(\sigma) = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{k\,\partial U} \frac{1}{|z|^4} (z_1\, dz_2\, d\bar{z}_1\, d\bar{z}_2 - z_2\, dz_1\, d\bar{z}_1\, d\bar{z}_2 + \\ + \bar{z}_1\, dz_1\, dz_2\, d\bar{z}_2 - \bar{z}_2\, dz_1\, dz_2\, d\bar{z}_1).$$

Границу бикруга разобьем на две части: $S_1 = \{|z_1| = 1, |z_2| \leqslant 1\}$ и $S_2 = \{|z_1| \leqslant 1, |z_2| = 1\}$. На S_1 имеем $z_1\bar{z}_1 = 1$, $z_1\, d\bar{z}_1 + \bar{z}_1\, dz_1 = 0$ и $dz_1\, d\bar{z}_1 = 0$, следовательно, соответствующая часть интеграла

$$i_0' = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{kS_1} \frac{1}{|z|^4} (z_1\, dz_2\, d\bar{z}_1\, d\bar{z}_2 + \bar{z}_1\, dz_1\, dz_2\, d\bar{z}_2) = \\ = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{kS_1} \frac{\bar{z}_1\, d\bar{z}_2}{|z|^4}\, dz_1\, dz_2.$$

Форма под интегралом точна, она является дифференциалом формы $\Omega' = \frac{\bar{z}_2}{z_1 |z|^2}\, dz_1\, dz_2$ (в самом деле, $d\Omega' = \frac{1}{z_1}\left(\frac{d\bar{z}_2}{|z|^2} - \frac{z_2\bar{z}_2\, d\bar{z}_2}{|z|^4}\right) \times$ $\times\, dz_1\, dz_2 = \frac{\bar{z}_1}{|z|^4}\, d\bar{z}_2\, dz_1\, dz_2$, если учесть, что $dz_1\, d\bar{z}_1 = 0$ на S_1), поэтому по формуле Стокса

$$i_0' = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{k\Gamma} \frac{\bar{z}_2}{z_1 |z|^2}\, dz_1\, dz_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{k\Gamma} \frac{|z_2|^2}{|z|^2} \frac{dz_1\, dz_2}{z_1 z_2}.$$

Аналогично интеграл по S_2 равен

$$i_0'' = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{k\Gamma} \frac{|z_1|^2}{|z|^2} \frac{dz_1\, dz_2}{z_1 z_2},$$

и, складывая полученные выражения, мы получим формулу (4) при $n = 2$.

Мы придем к пространственному аналогу логарифмического вычета, если будем рассматривать следующую задачу. Пусть в области $D \subset \mathbb{C}^n$ заданы n голоморфных функций

$$w_\nu = f_\nu(z), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

независимых в том смысле, что якобиан $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$ не равен тождественно нулю. Предположим еще, что общие нули этой системы функций, т. е. точки пересечения всех n аналитических поверхностей $F_\nu = \{z \in D: f_\nu(z) = 0\}$, образуют изолированное множество $\mathscr{E}$. Заметим, что это предположение не следует из предыдущего (пример: $w_1 = z_1$, $w_2 = z_1 z_2$ в $\mathbb{C}^2$; якобиан равен z_1, а общие нули системы заполняют плоскость $\{z_1 = 0\}$). В области D пусть дана область G с жордановой гладкой границей S, не содержащей точек из $\mathscr{E}$. Требуется определить общее число нулей системы (5) в G с учетом их порядков.

Эта задача решается точно так же, как плоская. Мы выбираем на S параметры $\tau_1, \ldots, \tau_{2n-1}$ и рассматриваем индекс относительно точки $w = 0$ цикла S^*, который соответствует S при отображении (5). По формуле (2) этот индекс равен

$$N = \frac{1}{\Sigma_{2n}} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_S \frac{1}{|f|^{2n}} \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_n & \bar{f}_1 & \ldots & \bar{f}_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial \tau_2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial \tau_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \tau_{2n-1}} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial \tau_{2n-1}} \end{vmatrix} d\tau_1 \ldots d\tau_{2n-1},$$

где $|f|^2 = \sum\limits_{\nu=1}^{n} |f_\nu|^2$. Так как под знаком интеграла здесь стоит форма неособая и замкнутая в $\bar{G} \setminus \mathscr{E}$, то по формуле Стокса этот интеграл можно представить как сумму интегралов по замкнутым жордановым поверхностям S_μ, каждая из которых содержит внутри одну и только одну точку $a_\mu \in \mathscr{E}$. В качестве таких S_μ можно взять, например, границы компонент множества Вейля $\mathscr{T}^\varepsilon = \{z \in G: |f_\nu(z)| < \varepsilon, \nu = 1, \ldots, n\}$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$, и мы получим по формуле (3)

$$N = \frac{1}{\Sigma_{2n}} \left(\frac{i}{2}\right)^n \int\limits_{\mathscr{T}^\varepsilon} \frac{1}{|f|^{2n}} \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu-1} F_\nu \, dF_1 \wedge \ldots \overset{\vee}{} \ldots \wedge dF_{2n}, \quad (6)$$

где $F_\nu = f_\nu$, $F_{n+\nu} = \bar{f}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Если в (6) сделать переход к интегрированию по n-мерному остову $\Gamma^\varepsilon = \{z \in G: |f_\nu(z)| = \varepsilon, \nu = 1, \ldots, n\}$ множества $\mathscr{T}^\varepsilon$ такой же, как переход от формулы (3) к (4), мы получим

$$N = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma^\varepsilon} \frac{df_1 \wedge \ldots \wedge df_n}{f_1 \ldots f_n}, \quad (7)$$

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ каждая компонента множества $\mathscr{F}^{\varepsilon}$ содержит внутри одну и только одну точку $a_\mu \in \mathscr{E}$; интеграл (6) по этой компоненте или равный ему интеграл (7) по остову этой компоненты естественно назвать *локальным индексом* отображения (5) в точке a_μ или иначе *порядком общего нуля* a_μ системы (5). Мы получаем тогда следующий пространственный аналог принципа аргумента:

Теорема 1 (о логарифмическом вычете). *Пусть в области $D \subset \mathbb{C}^n$ задана система голоморфных функций $f = (f_1, \ldots, f_n)$ с изолированным множеством $\mathscr{E}$ общих нулей, пусть еще $G \Subset D$ — область с жордановой границей S, не содержащей точек $\mathscr{E}$. Тогда общее число нулей f внутри G с учетом их порядка равно индексу относительно точки $f = 0$ образа $S^* = f(S)$ границы S при отображении f, который можно вычислить по формуле (6) или (7) при достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Пример. Система функций

$$w_1 = z_1^2 - z_2^2, \quad w_2 = 2z_1 z_2$$

с якобианом, равным $4(z_1^2 + z_2^2)$, имеет в шаре $B = \{|z| < 1\}$ из $\mathbb{C}^2$ один нуль в точке $(0, 0)$. Порядок этого нуля по формуле (7) равен

$$N = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{dw_1 \wedge dw_2}{w_1 w_2} = \frac{2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{(z_1^2 + z_2^2)\, dz_1 \wedge dz_2}{(z_1^2 - z_2^2)\, z_1 z_2},$$

где Γ — остов области Вейля $\{|z_1^2 - z_2^2| < 1,\ 2|z_1 z_2| < 1\}$. Пользуясь методом Мартинелли, можно доказать, что искомый порядок $N = 4$.

Из принципа аргумента, как и в плоском случае, получается

Теорема 2 (Руше). *Пусть в области $D \subset \mathbb{C}^n$ заданы две системы функций $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и $g = (g_1, \ldots, g_n)$ с изолированными множествами нулей; пусть еще $G \Subset D$ — область с жордановой границей S и всюду на S*

$$|f| > |g|, \tag{8}$$

где $|f| = \sqrt{\sum |f_\nu|^2}$, $|g| = \sqrt{\sum |g_\nu|^2}$. Тогда система $f + g = (f_1 + g_1, \ldots, f_n + g_n)$ имеет в G столько же нулей, сколько имеет их там система f (с учетом порядка нулей).

◀ Обозначим через S_0^* и S_1^* соответственно $(2n-1)$-мерные циклы, которые получаются из S при отображениях $z \to f$ и $z \to f + g$. Через S_t^*, $0 \leqslant t \leqslant 1$, мы обозначим образ S при отображении $z \to f + tg$. Очевидно, семейство $\{S_t^*\}$ определяет гомотопию циклов S_0^* и S_1^*, причем так как по условию на S имеем $|f + tg| \geqslant |f| - t|g| > 0$ для всех $t \in [0, 1]$, то это гомотопия

в $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Отсюда следует, что циклы S_0^* и S_1^* гомологичны друг другу в $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ (их разность ограничивает открытое множество из $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, которое заметают циклы S_t^* при изменении t от 0 до 1). Но тогда циклы S_0^* и S_1^* имеют одинаковый индекс относительно точки $w = 0$, и утверждение следует из теоремы 1 ▶

Замечание. Если на границе S известен n-мерный цикл Γ, интегрирование по которому по формуле (7) приводит к индексу образа S при отображении $z \to f$, то требование теоремы 2 можно ослабить. Именно, достаточно требовать, чтобы неравенство (8) выполнялось не на всей $(2n-1)$-мерной поверхности S, а лишь на таком n-мерном цикле Γ.

§ 14. Аналитические множества

В этом параграфе мы несколько подробнее рассмотрим понятие аналитического множества, с которым неоднократно встречались на предыдущих страницах. Такие множества задаются системами уравнений $f_\nu(z) = 0$, $\nu = 1, \ldots, N$, где f_ν — голоморфные функции, поэтому исследование аналитических множеств сводится к изучению неявно заданных функций. Частным случаем этой задачи является задача об обращении голоморфных отображений, и мы рассмотрим ее здесь же.

Основную роль в этих исследованиях играет подготовительная теорема Вейерштрасса (см. п. 6), которая позволяет заменять голоморфные функции в левых частях уравнений полиномами относительно одного из переменных и тем самым алгебраизировать задачу.

43. Понятие аналитического множества. Определение 1. Назовем $M \subset \mathbb{C}^n$ *аналитическим множеством в точке* $a \in M$, если в некоторой окрестности U этой точки его можно представить как множество общих нулей конечного числа голоморфных в U функций f_ν:

$$M = \{z \in U: \quad f_1(z) = 0, \ldots, f_N(z) = 0\}. \tag{1}$$

Мы будем называть M *аналитическим множеством*, если оно является аналитическим в каждой своей точке.

Понятие аналитического множества не совпадает с понятием аналитического многообразия: например, множество $\{z_1 z_2 = 0\}$ в $\mathbb{C}^2$ в окрестности точки (0, 0) не гомеоморфно шару. В этом примере множество распадается на два отдельных аналитических множества $\{z_1 = 0\}$ и $\{z_2 = 0\}$, которые уже являются многообразиями. В ряде вопросов важно исключить подобные распадения. Для этого вводится

Определение 2. Аналитическое в точке a множество M называется *неприводимым* в этой точке, если ни в какой окрест-

ности a его нельзя представить в виде объединения $M_1 \cup M_2$, где M_1 и M_2 — непустые и отличные от M аналитические в точке a множества. Множество M называется *локально неприводимым* в точке a, если оно неприводимо в каждой своей точке из некоторой окрестности a.

Примеры. Аналитическое множество $\{z_1^2 - z_2^2 z_3^2 = 0\}$ приводимо в начале координат $\mathbb{C}^3$, ибо оно разбивается на два аналитических множества $\{z_1 - z_2 z_3 = 0\}$ и $\{z_1 + z_2 z_3 = 0\}$. Множество $\{z_1^2 - z_2^2 z_3 = 0\}$ неприводимо в начале, но не является локально неприводимым в этой точке, ибо оно приводимо в точках $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$ (оно представляется в виде объединения множеств $\{z_1 \pm z_2 \sqrt{z_3} = 0\}$, где $\sqrt{z_3}$ обозначает одну из двух голоморфных в точке $(0, 0, a_3)$ ветвей корня). Множество $\{z_1^2 - z_2 z_3 = 0\}$ локально неприводимо в начале (и в других точках, конечно).

Понятие неприводимости аналитических множеств связано с понятием неприводимости функций. Голоморфная в точке $a \in \mathbb{C}^n$ функция f называется *неприводимой* в точке a, если ее нельзя представить в виде произведения двух функций, голоморфных в a, каждая из которых равна нулю в этой точке[1]).

Отметим простую теорему, относящуюся к разложению функций на неприводимые множители.

Теорема 1. *Любую функцию f, голоморфную в точке a и равную там нулю, можно разложить в произведение неприводимых голоморфных в a функций, причем такое разложение единственно с точностью до множителей, отличных от нуля в точке a.*

◀ Подготовительная теорема Вейерштрасса (п. 6) сводит задачу к разложению многочленов (по одному из переменных), а любой многочлен, как известно из алгебры, можно единственным способом (с точностью до делителя единицы) представить в виде произведения неприводимых многочленов. Для этого достаточно воспользоваться алгоритмом Евклида нахождения наибольшего общего делителя ▶

Следствие. *Любое аналитическое в точке a множество M можно представить как конечное объединение неприводимых в этой точке аналитических множеств.*

Объединяя одинаковые множители в разложении голоморфной в точке a функции f согласно теореме 1, мы получаем

---

[1]) Напомним, что в алгебре элемент кольца называется приводимым, если его можно представить в виде произведения двух множителей, не являющихся делителями единицы. В кольце функций, голоморфных в точке a, делителями единицы являются, очевидно, функции, отличные от нуля в этой точке.

однозначно определяемое (с точностью до множителей, отличных от нуля в a) представление

$$f = f_1^{n_1} \dots f_m^{n_m}, \tag{2}$$

где f_ν голоморфны и неприводимы в точке a, $f_\mu \not\equiv f_\nu$ при $\mu \neq \nu$ и n_ν — положительные целые числа. Каждое множество M_ν, которое в окрестности a задается уравнением $f_\nu = 0$, неприводимо в точке a, и f_ν является для него определяющей функцией (см. п. 33).

Мы воспользуемся разложением (2), чтобы сформулировать

Определение 3. Пусть f — голоморфная в точке a функция и $f(a) = 0$. Число n_ν ($\nu = 1, \dots, m$) в разложении (2) называется *порядком нулевого множества* $\{f_\nu = 0\}$ функции f в точке a. Если f мероморфна в точке a, то в окрестности этой точки $f = \frac{\varphi}{\psi}$, где φ и ψ голоморфны в a, не имеют общих множителей, голоморфных и равных нулю в a, и $\psi(a) = 0$; числа p_ν, аналогичным образом определяемые для функции ψ, называются *порядками полярных множеств* $\{\psi_\nu = 0\}$ функции f в точке a.

Это определение мы и имели в виду в п. 38, когда говорили о дивизорах мероморфных функций.

Перейдем к описанию простейших аналитических множеств комплексной размерности $n-1$, которые задаются в области $D \subset \mathbb{C}^n$ при помощи одной голоморфной функции

$$M = \{z \in D\colon f(z) = 0\}; \tag{3}$$

предполагается, что $f \not\equiv 0$ и что градиент

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \tag{4}$$

не равен тождественно нулю на каждой неприводимой компоненте множества M.

Будем различать два типа точек таких множеств.

а) Обыкновенные точки. Точка a аналитического множества (3) называется *обыкновенной*, если в ней

$$\operatorname{grad} f \neq 0, \tag{5}$$

т. е. отлична от нуля хотя бы одна из частных производных $\frac{\partial f}{\partial z_\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$).

Пусть для определенности $\left.\frac{\partial f}{\partial z_n}\right|_a \neq 0$. По теореме существования неявных функций (см. п. 13) уравнение M, которое записывается в виде $f(z, z_n) = 0$, в достаточно малой

окрестности $'U$ точки $'a \in \mathbb{C}^{n-1}$ можно переписать в виде, разрешенном относительно z_n:

$$z_n = g('z), \tag{6}$$

где g — голоморфная в $'U$ функция. Отсюда видно, что *в окрестности обыкновенной точки a множество M является аналитическим многообразием комплексной размерности $n-1$*: за локальный параметр можно принять переменное $t = 'z$, а за область его изменения — окрестность $'U$ (отображение $'U \to M$, определяемое (6), голоморфно, и различным точкам $'U$ соответствуют точки $('z, z_n) \in M$, различные просто потому, что их проекции $'z$ различны).

Аналитическое множество локально неприводимо в каждой своей обыкновенной точке — это видно из представимости уравнением (6).

В окрестности обыкновенной точки множество M мало отличается от $(n-1)$-мерной аналитической плоскости

$$\langle \operatorname{grad} f,\ z-a\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu}\Big|_a (z_\nu - a_\nu) = 0, \tag{7}$$

которая называется *касательной* аналитической плоскостью [1]).

б) Критические точки. Так называются точки аналитического множества M, в которых

$$\operatorname{grad} f = 0, \tag{8}$$

т. е. равны нулю все производные $\dfrac{\partial f}{\partial z_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Пусть a — критическая точка M; без ограничения общности можно считать, что $f('a, z_n) \not\equiv 0$ (этого можно добиться линейной заменой переменных). Подготовительная теорема Вейерштрасса позволяет записать уравнение M в окрестности a в виде

$$P(z_n) = (z_n - a_n)^k + c_1('z)(z_n - a_n)^{k-1} + \ldots + c_k('z) = 0, \tag{9}$$

где функции c_ν $(\nu = 1, \ldots, k)$ голоморфны в окрестности $'U$ точки $'a \in \mathbb{C}^{n-1}$ и $k \geqslant 2$, ибо при $k = 1$ точка a была бы, очевидно, обыкновенной.

---

[1]) Здесь и далее для векторов $a,\ b \in \mathbb{C}^n$ принято обозначение

$$\langle a, b\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu,$$

так что $\langle a, b\rangle = (a, \bar{b})$.

Уравнение (9) имеет k корней

$$z_n^{(\mu)} = g_\mu('z), \qquad \mu = 1, \ldots, k, \tag{10}$$

причем функции g_μ голоморфны в $'U$ всюду, кроме точек множества $'\Delta$, в которых это уравнение имеет хотя бы один кратный корень. Множество $'\Delta$ называется *дискриминантным* и, как известно из алгебры, определяется уравнением

$$R('z) = 0, \tag{11}$$

где R — результант многочленов $P(z_n)$ и его производной $P'(z_n)$ (по переменному z_n). Результант выражается при помощи определителя, элементами которого являются коэффициенты многочленов P и P' или нули[1]), и поэтому представляет собой функцию, голоморфную в $'U$ (и не равную тождественно нулю). Следовательно, дискриминантное множество $'\Delta$ является аналитическим множеством (комплексной размерности $n-2$) в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$.

Легко видеть, что дискриминантное множество содержит проекцию в пространство $\mathbb{C}^{n-1}('z)$ совокупности критических точек множества M[2]). В самом деле, в достаточно малой окрестности любой точки $'b \in {}'U \setminus {}'\Delta$ множество M задается

---

[1]) Результантом многочленов $P = c_0\zeta^k + c_1\zeta^{k-1} + \ldots + c_k$ и $Q = d_0\zeta^l + d_1\zeta^{l-1} + \ldots + d_l$ называется определитель $(k+l)$-го порядка

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & \ldots & c_k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & \ldots & \ldots & c_k & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & c_0 & c_1 & \ldots & \ldots & \ldots & c_k \\ d_0 & d_1 & \ldots & d_l & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & \ldots & d_l & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & d_0 & d_1 & \ldots & d_l \end{vmatrix},$$

где коэффициенты c_ν занимают l строк, а d_ν занимают k строк. Если $c_0 d_0 \neq 0$, то $R(P, Q) = 0$ в том и только том случае, если P и Q имеют хотя бы один общий корень.

[2]) Обратное, вообще говоря, неверно: например, для множества $\{z_2^2 - z_1 = 0\}$ в $\mathbb{C}^2$ начало координат является правильной точкой, хотя ее проекция $z_1 = 0$ принадлежит дискриминантному множеству (уравнение $z_2^2 = 0$ имеет кратный корень).

уравнениями (10), где g_μ — голоморфные в этой окрестности функции, поэтому каждая из k точек $b^{(\mu)} = ('b, g_\mu('b)) \in M$, проектирующихся в $'b$, является правильной точкой M.

Отсюда следует, что совокупность критических точек образует на M множество комплексной размерности не выше $n-2$, т. е. что действительная размерность этого множества по меньшей мере на 2 единицы ниже действительной размерности M (которая равна $2n-2$). В частности, можно показать, что совокупность критических точек множества M не разбивает этого множества (так что если M неприводимо, то после удаления критических точек оно останется связным).

Таким образом, критических точек на аналитическом множестве сравнительно мало, и основную массу его точек составляют правильные точки. В окрестности правильных точек аналитические множества устроены, как комплексно $(n-1)$-мерные плоскости, а в критических точках ветвится несколько таких плоскостей.

Переходя к описанию множеств, которые задаются при помощи нескольких функций, приведем

Определение 4. Пусть дано неприводимое множество

$$M = \{z \in D: \ f_1(z) = \ \dots \ = f_m(z) = 0\}, \tag{12}$$

где функции $f_1, \dots, f_m$ голоморфны в области $D \subset \mathbb{C}^n$. Будем говорить, что это множество имеет *комплексную размерность* r, если у матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix} \tag{13}$$

все миноры порядков выше $r' = n - r$ тождественно равны нулю на M, а хотя бы один минор порядка r' не равен тождественно нулю.

В случае одного уравнения (с функцией $f \not\equiv 0$) мы имеем $r' = 1$ и получаем рассмотренные выше множества комплексной размерности $n-1$. Как и в этом случае, мы будем различать два типа точек множества (12):

а) Обыкновенные точки. Так мы будем называть точки комплексно r-мерного аналитического множества, в которых ранг матрицы (13) равен $r' = n - r$ (при $r' = 1$ это определение, очевидно, совпадает с прежним).

Пусть $a \in M$ — обыкновенная точка и для определенности

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_{r'})}{\partial (z_{r+1}, \dots, z_n)}\Big|_a \neq 0$$

(в случае надобности мы можем переименовать переменные). По теореме существования неявных функций в некоторой окрестности точки a мы можем разрешить систему уравнений $f_1 = 0, \ldots, f_{r'} = 0$ относительно переменных $z_{r+1}, \ldots, z_n$:

$$z_{r+\mu} = g_\mu(z_1, \ldots, z_r), \qquad \mu = 1, \ldots, r', \tag{14}$$

причем функции g_μ голоморфны в некоторой окрестности U точки $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{C}^r$.

Отсюда видно, что *в окрестности обыкновенной точки а множество M является аналитическим многообразием комплексной размерности r*: за локальный параметр можно принять $(z_1, \ldots, z_r)$, а за область его изменения — окрестность U (отображение $U \to M$, определяемое (14), голоморфно и, очевидно, взаимно однозначно).

Из представимости уравнениями (14) видно также, что аналитическое множество локально неприводимо в каждой своей обыкновенной точке.

Отметим еще, что в каждой обыкновенной точке множество имеет комплексно r-мерную аналитическую *касательную плоскость*:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\Big|_a (z_\nu - a_\nu) = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, r'. \tag{15}$$

б) Критические точки. Так называются точки комплексно r-мерного неприводимого аналитического множества M, в которых ранг матрицы (13) ниже $r' = n - r$. Как и в случае $r' = 1$, можно доказать, что критические точки образуют аналитическое множество комплексной размерности не выше $r - 1$ и, следовательно, на множестве M их сравнительно мало (в частности, они не могут разбивать M).

Используя алгебраические методы, можно доказать следующее естественное обобщение теоремы 1:

Теорема 1′. *Любое аналитическое в точке $a \in \mathbb{C}^n$ множество можно единственным образом представить в виде конечного объединения неприводимых в этой точке множеств.*

В некоторых вопросах полезно локализовать понятие аналитического множества. Для этого вводится

Определение 4. Пусть в окрестностях U_a и V_a точки $a \in \mathbb{C}^n$ заданы два аналитических множества M и N. Будем говорить, что они эквивалентны, если существует окрестность $W_a \subset U_a \cap V_a$ такая, что $M \cap W_a = N \cap W_a$. Класс эквивалентности $\mathbf{M}_a$ по этому отношению называется *ростком аналитического множества* в точке a.

Естественным образом определяется понятие объединения ростков, а также неприводимого ростка как ростка, который нельзя представить в виде объединения отличных от него ростков аналитических множеств. Локальной теорией аналитических множеств мы здесь заниматься не будем [1]).

Приведем в заключение теорему, которую можно рассматривать как обобщение теоремы единственности для функций одного переменного.

Теорема 2. *Если аналитическое в области* $D \subset \mathbb{C}^n$ *множество*

$$M = \{z \in D: \ f_1(z) = \ \dots \ = f_n(z) = 0\} \tag{16}$$

дискретно, т. е. не имеет связных компонент, отличных от точки, то оно не может иметь предельных точек внутри D.

◀ Будем доказывать теорему индукцией по n. Для $n = 1$ она верна, ибо совпадает с теоремой единственности для функций одного переменного. Предположим, что она верна для функций $(n-1)$-го переменного, но неверна для функций n переменных. Тогда в $D \subset \mathbb{C}^n$ найдется множество M, удовлетворяющее условиям теоремы и имеющее предельную точку $a \in D$. Согласно подготовительной теореме Вейерштрасса (для ее применения, возможно, придется совершить линейное преобразование переменных z) в некоторой окрестности a множество M задается уравнениями

$$P_\mu(z_n) = 0, \qquad \mu = 1, \dots, n,$$

где P_μ — многочлены от z_n с коэффициентами, голоморфно зависящими от $'z$. Можно считать, что M содержит последовательность точек $('a^{(\nu)}, a_n^{(\nu)})$, где все $'a^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots$, различны.

Рассмотрим результанты многочленов P_μ и P_n:

$$g_\mu = R(P_\mu, P_n), \qquad \mu = 1, \dots, n-1,$$

— голоморфные функции $'z$ в окрестности проекции $'a$ точки a. Так как $R(P_\mu, P_n)$ обращается в нуль в тех и только тех точках $'z$, где P_μ и P_n имеют общий нуль z_n, а при $'z$, близких к $'a$, все нули P_μ лежат вблизи a_n, то в окрестности $'a$ множество

$$M' = \{'z \in {}'D: \ g_1('z) = \ \dots \ = g_{n-1}('z) = 0\}$$

совпадает с проекцией M на эту окрестность. Это множество удовлетворяет условиям теоремы и имеет $'a$ своей предельной точкой. Мы пришли к противоречию с индуктивным предположением ▶

---

[1]) С этой теорией можно ознакомиться по книге: М. Эрве. Функции многих комплексных переменных. Локальная теория, «Мир», М., 1965.

44. Локальное обращение голоморфных функций. Задача ставится так. Пусть в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{C}^n$ заданы n голоморфных функций f_ν, и пусть $b_\nu = f_\nu(a)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Требуется найти функции $z_\nu = g_\nu(w)$, для которых $g_\nu(b) = a_\nu$ и которые в какой-либо окрестности точки b удовлетворяют системе уравнений

$$f_\nu(z) = w_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Систему (1) мы будем записывать в виде

$$f(z) = w, \tag{2}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — векторная функция.

Если якобиан системы $J(z) = \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$ отличен от нуля в точке a (а значит, и в некоторой окрестности этой точки), то по теореме существования неявных функций (и. 13) система (2) допускает в окрестности точки $b = f(a)$ голоморфное решение $z = g(w)$. Это означает, что при $J(a) \neq 0$ отображение $z \to f(z)$ является гомеоморфным в некоторой окрестности точки a.

Покажем, что для голоморфных отображений верно и обратное утверждение[1]). Пусть векторная функция f осуществляет голоморфный гомеоморфизм окрестности U_a точки $a \in \mathbb{C}^n$ на окрестность V_b точки $b = f(a)$. Тогда якобиан $J(z)$ этого отображения не может быть тождественно равным нулю, ибо в этом случае оказался бы тождественно равным нулю и якобиан $\dfrac{\partial(u_1, \ldots, u_{2n})}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n})} = |J(z)|^2$ (мы положили $z_\nu = x_\nu + ix_{n+\nu}$, $w_\nu = u_\nu + iu_{n+\nu}$), а тогда по теореме из действительного анализа функции $u_1, \ldots, u_{2n}$ были бы зависимыми[2]) и f не могло бы быть гомеоморфизмом.

Таким образом, множество $M = \{z \in U_a\colon J(z) = 0\}$ не выше чем $(2n-2)$-мерно, и в силу гомеоморфизма таким же является его образ $M^* = f(M)$. Рассмотрим обратное к f отображение $g\colon V_b \to U_a$. Оно непрерывно всюду в V_b и по доказанному выше голоморфно всюду в $V_b \setminus M^*$ (в соответствующих точках z якобиан $J(z) \neq 0$). Так как M^* — аналитическое множество, то отображение g голоморфно продолжается в полную окрестность V_b (см. п. 19).

Теперь мы знаем, что всюду в V_b справедливо тождество $f \circ g(w) \equiv w$, где f и g — голоморфные функции. По правилам

[1]) Напомним, что для отображений класса C^∞ это обратное утверждение неверно: отображение $x_\nu \to x_\nu^3$ $(\nu = 1, \ldots, 2n)$ пространства $\mathbb{C}^n$ на себя гомеоморфно, а его якобиан обращается в нуль на плоскостях $\{x_\nu = 0\}$.

[2]) См. задачу 14.

дифференцирования отсюда получается тождество

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (z_1, \ldots, z_n)} \frac{\partial (g_1, \ldots, g_n)}{\partial (w_1, \ldots, w_n)} \equiv 1, \tag{3}$$

справедливое для всех точек $z \in U_a$ и соответствующих точек $w \in V_b$. Из него и следует, что $J(z) \neq 0$ в U_a.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для локальной гомеоморфности голоморфного отображения* $f\colon D \to \mathbb{C}^n$ *области* $D \subset \mathbb{C}^n$ *необходимо и достаточно, чтобы якобиан* $\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (z_1, \ldots, z_n)} \neq 0$ *в* D.

Перейдем теперь к изучению задачи локального обращения в случае, когда якобиан отображения f равен нулю в точке a, однако a является изолированной точкой[1]) множества $\{z\colon f(z) = b\}$. Для простоты мы проведем исследование для $n = 2$, причем без ограничения общности примем $a = b = 0$. Итак, мы рассматриваем систему двух уравнений

$$f_1(z_1, z_2) = w_1, \quad f_2(z_1, z_2) = w_2 \tag{4}$$

и хотим найти в окрестности точки $w = 0$ ее решения $z_1 = g_1(w_1, w_2)$, $z_2 = g_2(w_1, w_2)$ такие, что $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 0$.

Из нашего предположения следует, что f_1 и f_2 не равны тождественно нулю. Поэтому (сделав, если надо, дополнительное линейное преобразование пространства z) мы можем считать, что $f_\nu(z_1, 0) \not\equiv 0$ $(\nu = 1, 2)$. В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса (п. 6) систему (4) можно заменить равносильной ей системой

$$\begin{aligned} P_1(z, w) &= z_1^{k_1} + c_1(z_2, w) z_1^{k_1 - 1} + \ldots + c_{k_1}(z_2, w) = 0, \\ P_2(z, w) &= z_1^{k_2} + d_1(z_2, w) z_1^{k_2 - 1} + \ldots + d_{k_2}(z_2, w) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где c_ν и d_ν — голоморфные функции от z_2, w_1 и w_2, обращающиеся в нуль в начале. Исключение z_1 из (5) приводит к уравнению

$$R(z_2, w) = 0, \tag{6}$$

где R — результант многочленов P_1 и P_2 — голоморфная функция.

Если бы было $R(z_2, 0) \equiv 0$, то уравнения (5) при $w = 0$ имели бы общее решение $z_1 = \varphi(z_2)$, $\varphi(0) = 0$, но тогда $z = 0$ была предельной точкой множества $\{z\colon f(z) = 0\}$, вопреки пред-

[1]) Это условие заведомо не выполняется, если якобиан $J \equiv 0$ или если все функции $f_\nu(z) - b_\nu$ приводимы и имеют общий множитель, равный нулю в точке a (как для системы $w_1 = z_1$, $w_2 = z_1 z_2$ в точке $z = 0$).

положению. Поэтому к R можно снова применить подготовительную теорему и заменить (6) равносильным ему уравнением

$$P(z_2, w) = z_2^k + \alpha_1(w) z_2^{k-1} + \ldots + \alpha_k(w) = 0, \tag{7}$$

где α_ν — голоморфные функции в некоторой окрестности V точки $w = 0$, $\alpha_\nu(0) = 0$. Таким образом, отыскание функции $z_2 = g_2(w)$ свелось к решению алгебраического уравнения с голоморфными коэффициентами.

Рассмотрим *дискриминантное множество* $\Delta = \{w \in V: \Delta(w) = 0\}$, где Δ — результант многочлена $P(z_2, w)$ и его производной по z_2 (см. п. 43). Это множество аналитично, следовательно, оно самое большее двумерно и не разбивает окрестности V. В точках $V \setminus \Delta$ уравнение (7) имеет k различных голоморфных корней $z_2^{(\mu)} = g_2^{(\mu)}(w)$, в точках же Δ некоторые из этих корней совпадают и теряют голоморфность. Множество Δ, следовательно, является *множеством ветвления* аналитической функции $g_2(w)$.

Аналогично исследуется зависимость $z_1 = g_1(w)$. Заметим, что при известной функции $z_2 = g_2(w)$ функцию g_1 можно получить, подставляя $g_2^{(\mu)}$ в каждое из уравнений (5) и находя общий наибольший делитель $d_\mu(z_1, w)$ многочленов по z_1, полученных из левых частей (5) после этой подстановки: значение z_1, соответствующее значению $z_2^{(\mu)} = g_2^{(\mu)}(w)$, будет корнем многочлена d_μ. На этом пути можно доказать [1]), что для $w \in V \setminus \Delta$ каждому значению $g_2^{(\mu)}(w)$ (возможно, после некоторой линейной замены переменных) соответствует точно одно значение $z_1^{(\mu)} = g_1^{(\mu)}(w)$. Таким образом, $z_1 = g_1(w)$ оказывается не более чем k-значной аналитической функцией (уменьшение числа значений происходит, когда разным $z_2^{(\mu)}$ соответствуют одинаковые $z_1^{(\mu)}$).

В рассматриваемом случае точка $w = 0$, очевидно, принадлежит дискриминантному множеству Δ. Вообще, если $w^0 \in \Delta$ и z^0 — один из прообразов этой точки при отображении (4), то якобиан отображения $J(z^0) = 0$, ибо в противном случае по теореме 1 это отображение было бы взаимно однозначным в точке z^0 и w^0 не могла бы принадлежать Δ. Таким образом, множество Δ принадлежит образу множества $J = \{z \in U: J(z) = 0\}$ при рассматриваемом отображении.

Пример. Якобиан отображения

$$w_1 = z_1^2 - z_2^2, \quad w_2 = 2z_1 z_2, \tag{8}$$

[1]) Это — одно из утверждений теоремы Осгуда; см., например, Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, Гостехиздат М., 1948, стр. 384.

равный $J(z)=4\left(z_1^2+z_2^2\right)$, обращается в нуль на аналитических плоскостях $J=\{z_1=\pm iz_2\}$. Исключая z_1, мы придем к биквадратному уравнению $P\left(z_2, w\right)=z_2^4+w_1z_2^2-\frac{w_2^2}{4}=0$. Обращение (8) имеет вид

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{w_1^2+w_2^2}+w_1},\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{w_1^2+w_2^2}-w_1},$$

так что функции $g_\nu(w)$ четырехзначны и их ветви голоморфны вне дискриминантного множества $\Delta=\{w_1=\pm iw_2\}$. Это множество является образом множества J и состоит из двух аналитических плоскостей, на каждой из которых сливаются по два значения g_ν; в точке пересечения этих плоскостей сливаются все четыре значения g_ν.

Ситуация, аналогичная описанной, справедлива и при любом n; имеет место

Теорема (Осгуд)[1]) *Пусть $w=f(z)$ — система n функций, голоморфных в некоторой окрестности точки $a\in\mathbb{C}^n$, и a является изолированной точкой множества $\{f(z)=b\}$, где $b=f(a)$. Тогда (возможно, после некоторой линейной замены переменных) обращение $z=g(w)$, $g(b)=a$, этой системы можно получить следующим образом: $z_n=g_n(w)$ находится из уравнения*

$$P(z_n, w)=(z_n-a_n)^k+\alpha_1(w)(z_n-a_n)^{k-1}+\ \ldots\ +\alpha_k(w)=0^2) \quad (9)$$

с голоморфными в точке b коэффициентами α_μ, $\alpha_\mu(b)=0$, а остальные функции $z_\nu=g_\nu(w)$, $\nu=1, \ldots, n-1$, однозначно и голоморфно выражаются через $g_n(w)$ и w.

Заметим, что здесь $k=1$ в том и только том случае, когда $J(a)\neq 0$. Если же $J(a)=0$, то g_n непременно будет многозначной, точнее k-значной, аналитической функцией, а остальные g_ν — не более чем k-значными аналитическими функциями (некоторые из них могут оказаться и однозначными). Множеством ветвления Δ функции g_n будет служить образ множества $J=\{J(z)=0\}$, а множества ветвления остальных g_ν принадлежат Δ.

Таким образом, при отображении f окрестность точки $b=f(a)$ покрывается образом достаточно малой окрестности точки a точно k раз. Учитывая геометрический смысл введенного в п. 42 локального индекса, можно утверждать, что *в условиях теоремы Осгуда локальный индекс отображения f в точке a равен степени k многочлена* (9).

---

[1]) См. W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. 2, Parte 1 (Leipzig, 1929), S. 125. Современное изложение задачи об обращении см. в книге М. Эрве, цит. на стр. 514.

[2]) Это уравнение получается, как и для $n=2$ исключением $'z$ из системы уравнений $f(z)=w$.

Заметим, однако, что при $n > 1$ локальный индекс, вообще говоря, не выражается через порядки младших членов тейлеровских разложений f_ν в рассматриваемой точке. Так для отображения

$$w_1 = z_1^2, \quad w_3 = z_2^3 \tag{10}$$

локальный индекс в точке $z = 0$ равен 6 — произведению младших членов разложений f_1 и f_2. Для отображения же $w_1 = z_1^2$, $w_2 = z_1^2 + z_2^3$, которое отличается от (10) невырожденным линейным преобразованием и, следовательно, имеет тот же индекс, произведение таких порядков равно 4.

Подчеркнем, что степень k в (9) совпадает с локальным индексом лишь при таком выборе переменных, что функции g_ν ($\nu = 1, \ldots, n-1$) однозначно выражаются через g_n и w.

Следствие. *Если f — голоморфное отображение открытого множества $U \subset \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ и каждая $a \in U$ является изолированной точкой множества прообразов точки $b = f(a)$, то $f(U)$ — открытое множество.*

Когда условие теоремы Осгуда не выполняется, т. е. a является предельной точкой множества прообразов $b = f(a)$, но якобиан отображения не равен тождественно нулю, то существует содержащее точку a аналитическое множество комплексной размерности r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, которое f преобразует в точку b. В этом случае, вообще говоря, b является точкой неопределенности [1]) для хотя бы одной компоненты g_ν обращения рассматриваемой системы.

Пример. Рассмотрим систему

$$w_1 = z_2 z_3, \qquad w_2 = z_1 z_3, \qquad w_3 = z_1 z_2, \tag{11}$$

якобиан которой $J = 2z_1 z_2 z_3$ обращается в нуль на трех (комплексно) двумерных аналитических плоскостях $\{z_\mu = 0\}$, $\mu = 1, 2, 3$. Прообразом точки $w = 0$ является совокупность трех (комплексно) одномерных аналитических плоскостей $\{z_2 = z_3 = 0\}$, $\{z_1 = z_3 = 0\}$ и $\{z_2 = z_1 = 0\}$. Обращение (11)

$$z_1 = \sqrt{\frac{w_2 w_3}{w_1}}, \qquad z_2 = \sqrt{\frac{w_1 w_3}{w_2}}, \qquad z_3 = \sqrt{\frac{w_1 w_2}{w_3}}$$

имеет голоморфные ветви вне плоскостей $\{w_\mu = 0\}$, $\mu = 1, 2, 3$; точка $w = 0$ является точкой неопределенности для всех трех компонент g_μ.

§ 15. Аналитичность множества особенностей

Под особыми точками голоморфной функции понимаются граничные точки ее области голоморфности. Мы видели, что простейшие такие точки — особые точки мероморфных функций нескольких комплексных переменных — составляют аналитические множества. С другой стороны, легко построить

[1]) Термин «точка неопределенности» употребляется здесь в смысле несколько более общем, чем в п. 30, однако аналогичном (см. приводимый здесь пример).

примеры голоморфных функций, особые точки которых образуют $(2n-1)$-мерные множества, заведомо не являющиеся аналитическими (скажем, функции $\mu(z_1)$, $\mu(z_1 z_2)$ или $\mu(z_1)\mu(z_2)$ в $\mathbb{C}^2$, где μ — модулярная функция из п. 41 ч. I). Однако в предположении, что множество особых точек не слишком массивно, мы докажем здесь его аналитичность и в общем случае. Затем мы докажем аналитичность множества так называемых существенно особых точек.

45. Аналитичность множества особых точек. Условие не слишком большой массивности мы примем здесь в следующей форме: множество особых точек M пересекается с каждой аналитической прямой, параллельной некоторому направлению (скажем, оси z_n), не более чем в одной точке. Отсюда следует, что M не более чем $(2n-2)$-мерно.

Теорема 1 (Хартогс). *Пусть a — особая точка функции f и для каждой точки $'z$, $\rho('z, 'a)<\varepsilon$, в поликруге $U=\{\rho(z, a)<\varepsilon\}$ имеется не более одной точки $('z, z_n)$, особой для этой функции. Тогда найдется поликруг $'V=\{\rho('z, 'a)<\delta\}$ такой, что каждой $'z\in 'V$ соответствует точно одно число z_n, для которого $('z, z_n)$ является особой точкой f в U, причем функция $z_n=\varphi('z)$ голоморфна в $'V$.*

◀ а) Непрерывность функции φ. Без ограничения общности считаем $a=0$. Так как 0 — единственная особая точка f с проекцией $'0$, то окружность $\gamma_0=\{'z='0,\ |z_n|=\eta\}$, $0<\eta<\varepsilon$, принадлежит области голоморфности f. Семейство кругов $K_a=\{'z='a,\ |z_n|\leqslant\eta\}$ при $'a\to'0$ стремится к $K_0=\{'z='0,\ |z_n|\leqslant\eta\}$, причем $\partial K_a\to\partial K_0=\gamma_0$. Так как K_0 содержит особую точку 0, то по теореме Бенке — Зоммера (п. 23) найдется $\delta>0$ такое, что при $\rho('a, '0)<\delta$ в круге K_a есть хотя бы одна особая точка f. По условию больше одной такой точки быть не может, следовательно, функция $z_n=\varphi('z)$ однозначно определена в $'V=\{\rho('z, '0)<\delta\}$. Это же рассуждение доказывает непрерывность φ в точке $'0$: у нас $\varphi('0)=0$ и для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|\varphi('z)|<\varepsilon$ при $\rho('z, '0)<\delta$. Так как за $'0$ можно принять любую точку из $'V$, то φ непрерывна во всем $'V$.

б) Голоморфность функции φ. Число δ можно считать столь малым, что $|\varphi('z)|<\frac{\varepsilon}{3}$ при $'z\in'V$, и тогда f будет голоморфной в области $\left\{'z\in'V,\ \frac{1}{3}\varepsilon<|z_n|<\frac{2}{3}\varepsilon\right\}$. Выберем число ρ, $\frac{1}{3}\varepsilon<\rho<\frac{2}{3}\varepsilon$, и точку $z_n^0=\rho e^{i\theta}$, тогда f будет голоморфной в поликруге $\left\{'z\in'V,\ |z_n-z_n^0|<\rho-\frac{\varepsilon}{3}\right\}$. По нашему построению для любой $'z\in'V$ точка $('z, \varphi('z))$ — особая для f,

а все точки $('z, z_n)$, для которых $|z_n - z_n^0| < |\varphi('z) - z_n^0|$, — правильные, поэтому

$$R('z) = |\varphi('z) - z_n^0| \tag{1}$$

является радиусом Хартогса функции f (см. п. 26). По доказанному выше функция R непрерывна в $'V$, а так как у нас $|\varphi('z)| < \frac{\varepsilon}{3}$, а $|z_n^0| = \rho > \frac{\varepsilon}{3}$, то $R('z) \geqslant |z_n^0| - |\varphi('z)| > 0$, и, значит, $\ln R('z)$ непрерывен в $'V$.

Голоморфность φ мы выведем из доказанной в п. 26 плюрисубгармоничности функции $-\ln R('z)$. По основной теореме Хартогса достаточно доказать голоморфность φ по каждому переменному z_ν, $\nu = 1, \ldots, n-1$, в некотором круге $|z_\nu| < r$ при фиксированных $z_\mu = a_\mu$, $|a_\mu| < r$, $\mu \neq \nu$. Для простоты обозначений будем писать $R(z_\nu)$ вместо $R(a_1, \ldots, z_\nu, \ldots, a_{n-1})$ и аналогично $\varphi(z_\nu)$. Так как $-\ln R(z_\nu)$ субгармонична в круге $\{|z_\nu| < r\}$ и непрерывна в $\{|z_\nu| \leqslant r\}$, то

$$\ln R(0) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln R(re^{it})\, dt$$

или, согласно (1),

$$\ln |\varphi(0) - \rho e^{i\theta}| \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\varphi(re^{it}) - \rho e^{i\theta}|\, dt\ ^{1}). \tag{2}$$

Это неравенство справедливо для всех $\theta \in [0, 2\pi]$; интегрируя его по θ и меняя в правой части порядок интегрирования (что, очевидно, законно), будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \ln |\varphi(0) - \rho e^{i\theta}|\, d\theta \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} \ln |\varphi(re^{it}) - \rho e^{i\theta}|\, d\theta. \tag{3}$$

Известно, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \ln |\zeta - \rho e^{i\theta}|\, d\theta,$$

который представляет собой логарифмический потенциал с постоянной плотностью распределения на окружности $\{|\zeta| = \rho\}$, постоянен в круге $|\zeta| < \rho$ (см. задачу 7 к гл. V ч. I). Так как у нас $|\varphi('z)| < \rho$ при всех $'z \in 'V$, то мы можем, следовательно, заменить в правой части (3) $\varphi(re^{it})$ значением $\varphi(0)$. Но отсюда

---

[1]) В этой формуле $\varphi(0) = \varphi(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n)$ не обязательно равно 0.

видно, что (3), а значит и (2), для всех θ обращается в равенство, т. е. субгармоническая функция $-\ln|\varphi(z_\nu)-\rho e^{i\theta}|$ в точке $z_\nu=0$ совпадает со своей гармонической мажорантой. Отсюда следует (см. п. 46 ч. I), что функция $\ln|\varphi(z_\nu)-\rho e^{i\theta}|$ гармонична в круге $\{|z_\nu|<r\}$ при любом $\theta\in[0, 2\pi]$.

Из (1) мы имеем

$$R^2=(\varphi-\rho e^{i\theta})(\bar\varphi-\rho e^{-i\theta})=\varphi\bar\varphi-\rho(e^{-i\theta}\varphi+e^{i\theta}\bar\varphi)+\rho^2, \qquad (4)$$

причем в силу гармоничности $\ln R$ эта функция принадлежит классу C^∞ (по переменным z_ν и $\bar z_\nu$) при любом θ. Составляя разность значений (4) при $\theta=\theta_0$ и $\theta=\theta_0+\pi$, мы увидим, что $e^{-i\theta_0}\varphi+e^{i\theta_0}\bar\varphi\in C^\infty$, а полагая здесь $\theta_0=0$ и $\frac{\pi}{2}$, найдем, что $\varphi+\bar\varphi$, $\varphi-\bar\varphi\in C^\infty$, а значит, и $\varphi\in C^\infty$. Остается доказать, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_\nu}\equiv 0$.

Для этого воспользуемся тем, что вместе с $\ln R$ и $\ln R^2$ является гармонической функцией от z_n при любом $\rho\in\left(\frac{1}{3}\varepsilon, \frac{2}{3}\varepsilon\right)$ и любом $\theta\in[0, 2\pi]$. Уравнение Лапласа для $\ln R^2$ имеет вид

$$R^2\frac{\partial^2R^2}{\partial z_\nu\,\partial\bar z_\nu}-\frac{\partial R^2}{\partial z_\nu}\frac{\partial R^2}{\partial\bar z_\nu}=0,$$

и функция (4) должна удовлетворять ему при любых ρ и θ из указанных отрезков. Подставляя сюда выражение (4) и приравнивая нулю коэффициент при ρ^3, мы найдем, что

$$e^{-i\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\nu\,\partial\bar z_\nu}+e^{i\theta}\frac{\partial^2\bar\varphi}{\partial z_\nu\,\partial\bar z_\nu}=0$$

при любом θ, откуда $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\nu\,\partial\bar z_\nu}\equiv 0$ при $|z_\nu|<r$. Приравнивая (с учетом этого) нулю коэффициент при ρ^2, получим, что

$$e^{2i\theta}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\bar z_\nu}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial z_\nu}+e^{-2i\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_\nu}=0$$

при любом θ, следовательно, $\frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_\nu}\equiv 0$ при $|z_\nu|<r$.

Таким образом, в каждой точке круга $\{|z_\nu|<r\}$ либо $\frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}=0$, либо $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_\nu}=0$. Чтобы исключить первую возможность, заменим $f(z_\nu, z_n)$ функцией $f(z_\nu, z_n+z_\nu)$ (зависимость от других переменных z_μ, $\mu\neq\nu$, $\neq n$, мы не выписываем). Она удовлетворяет всем условиям теоремы, а уравнением особой поверхности для нее вместо $z_n=\varphi(z_\nu)$ будет $z_n=\varphi(z_\nu)-z_\nu$.

Поэтому, повторяя наши рассуждения, мы найдем, что для φ в окрестности $z_\nu = 0$ будет выполняться также одно из условий $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} - 1 = 0$. Учитывая полученный ранее вывод, найдем, что $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\nu} \equiv 0$ в окрестности $z_\nu = 0$ ▶

Справедлива и более общая

Теорема 2 (Хартогс). *Пусть $a \in \mathbb{C}^n$ — особая точка функции f и для каждой $'z$, $\rho('z, 'a) < \varepsilon$, в поликруге $\{\rho(z, a) < \varepsilon\}$ существует конечное число точек $(', z_n^{(\mu)})$, особых для этой функции. Тогда в некоторой окрестности a особые точки f составляют аналитическое множество с уравнением*

$$(z_n - a_n)^k + c_1('z)(z_n - a_n)^{k-1} + \ldots + c_k('z) = 0, \qquad (5)$$

где функции c_ν голоморфны в точке $'a$.

В п. 47 мы приведем еще один вариант теоремы об аналитичности множества особых точек.

46. Существенно особые точки. В ряде вопросов особенности, которые имеют мероморфные функции на своих полярных множествах (см. п. 30), можно рассматривать как несущественные. Существенно особыми точками в многомерной теории называют особые точки всех других типов.

Чтобы прийти к независимому определению существенно особых точек, можно ввести понятие *мероморфного продолжения*. Для этого рассматривают мероморфный элемент как пару, составленную из поликруга U и мероморфной в нем в смысле п. 30 функции f. Говорят, что два мероморфных элемента (U_1, f_1) и (U_2, f_2) являются непосредственным мероморфным продолжением друг друга, если пересечение $U_1 \cap U_2$ непусто и $f_1 = f_2$ во всех точках голоморфности обеих функций из этого пересечения. Далее, как обычно, вводится понятие мероморфного продолжения вдоль пути и под мероморфной в широком смысле слова функцией понимается совокупность элементов, которые получаются из какого-либо одного мероморфным продолжением вдоль всех путей, для которых такое продолжение возможно. Область, вообще говоря, многолистная, которая при этом определяется, называется *областью мероморфности* построенной функции. Граничные точки области мероморфности некоторой функции и называются ее *существенно особыми точками.*

Для доказательства аналитичности множества существенно особых точек нам понадобится

Лемма. *Пусть функция f голоморфна в произведении поликруга $'\bar{U} = \{\rho('z, 'a) \leqslant r\}$ на кольцо $\bar{K}_n = \{z_n\colon r_n \leqslant |z_n| \leqslant R_n\}$*

и представляется там рядом Хартогса — Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k('z)\,z_n^k \tag{1}$$

(k — скалярный индекс, g_k голоморфны в $'\bar{U}$). Для того чтобы f мероморфно продолжалась в поликруг $\bar{U}='\bar{U}\times\{|z_n|\leqslant R_n\}$, необходимо и достаточно существование конечного числа функций $\lambda_0, \ldots, \lambda_l$, голоморфных в $'\bar{U}$ и не всех тождественно равных нулю, таких, что

$$\lambda_0('z)\,g_{k-l}('z)+\ \ldots\ +\lambda_l('z)\,g_k('z)\equiv 0 \tag{2}$$

для всех $'z\in{}'\bar{U}$ и всех $k=-1, -2, \ldots$.

◀ Достаточность. Рассмотрим функцию

$$\psi(z)=\lambda_0('z)\,z_n^l+\ \ldots\ +\lambda_l('z),$$

голоморфную в $'\bar{U}\times\mathbb{C}$, и для $z\in{}'\bar{U}\times\bar{K}_n$ образуем произведение $f(z)\psi(z)=\varphi(z)$. Из (1) видно, что условия (2) влекут за собой равенство нулю коэффициентов при всех отрицательных степенях в разложении $\varphi=f\psi$. Значит, эта функция голоморфна, а функция $f=\frac{\varphi}{\psi}$ мероморфно продолжается в поликруг $\bar{U}$.

Необходимость. Если f мероморфно продолжается в $\bar{U}$, то для каждой $'z^0\in{}'U$ может существовать лишь конечное число точек z_n, $|z_n|\leqslant R_n$, таких, что $('z^0, z_n)$ являются особыми точками f. В самом деле, в противном случае существует точка $z^0=('z^0, z_n^0)\in\bar{U}$, предельная для особых, а так как f мероморфна в z^0, то в ее окрестности $f=\frac{\varphi}{\psi}$, где φ и ψ голоморфны. По теореме единственности теории функций одного переменного $\psi('z^0, z_n)\equiv 0$, а отсюда вытекает, что все точки пересечения $\{'z='z^0\}\cap U$ — особые для f (ибо открытое ядро множества точек этого пересечения, которые являются особыми для f, одновременно и замкнуто), а это противоречит голоморфности f в $'U\times K_n$.

Комплексная размерность множества точек неопределенности f не превосходит $n-2$ (см. п. 30), поэтому множество $'E$ точек $'z\in{}'U$, которые являются проекциями точек неопределенности f, не разбивает $'U$. Для $'z^0\notin{}'E$ обозначим через $l('z^0)$ сумму порядков всех полюсов $z_n^{(\mu)}$ функции $f('z^0, z_n)$ в круге $\{|z_n|\leqslant R_n\}$; так как функция l целочисленна и непрерывна на

связном множестве $'U \setminus 'E$, то она постоянна. Образуем многочлен

$$\psi(z) = z_n^l + c_1('z) z_n^{l-1} + \ldots + c_l('z),$$

имеющий нулями n-е координаты всех особых точек $('z, z_n)$ функции f в $\overline{U}$ с фиксированной проекцией $'z \notin 'E$ (все они будут, очевидно, полюсами, и мы берем ψ так, что порядок ее нуля совпадает с порядком полюса). Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы Вейерштрасса из п. 6, мы убедимся в том, что функции c_μ голоморфны в $'\overline{U}$. Так как по построению $f\psi$ является голоморфной функцией z_n в круге $\{|z_n| \leqslant R\}$, то в ее разложении по степеням z_n все коэффициенты при отрицательных степенях должны быть равными нулю. Учитывая, что f в $'\overline{U} \times \overline{K}_n$ представляется разложением (1), мы заключаем, что условия обращения в нуль этих коэффициентов имеют вид соотношений (2), где $\lambda_0 \equiv 1$, $\lambda_\mu \equiv c_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, l)$ ▶

Теперь мы можем доказать непрерывность расположения существенно особых точек (аналог части а) доказательства теоремы Хартогса из предыдущего пункта).

Теорема 1 (Э. Леви). *Пусть z^0 — граничная точка области D мероморфности функции f и при некотором $\varepsilon > 0$ окружность $\gamma_0 = \{'z = 'z^0, |z_n - z_n^0| = \varepsilon\} \subset D$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что при $\rho('a, 'z^0) < \delta$ в любом круге $K_a = \{'z = 'a, |z_n - z_n^0| \leqslant \varepsilon\}$ есть точки, не принадлежащие D.*

◀ Примем $z^0 = 0$ и выберем числа r, $r_n > 0$ и конечное число точек $\zeta_n^{(\mu)} = \varepsilon e^{i\theta_\mu}$ так, чтобы поликруги $U_\mu = \{\rho('z, '0) < r, |z_n - \zeta_n^{(\mu)}| < r_n\}$ принадлежали D и в совокупности покрывали γ_0. В тех U_μ, где f не голоморфна, мы можем считать, что $f = \dfrac{\varphi_\mu}{\psi_\mu}$, где $\varphi_\mu, \psi_\mu \in H(U_\mu)$, причем $\psi_\mu('0, \zeta_n^{(\mu)}) = 0$, но $\psi_\mu('0, z_n) \not\equiv 0$ при $0 < |z_n - \zeta_n^{(\mu)}| < r_n$ (для соблюдения этих условий, возможно, придется уменьшить величины r и r_n и сделать линейную замену переменных). Тогда функция $f('0, z_n)$ в любом достаточно узком кольце, окружающем $\{|z_n| = \varepsilon\}$, будет голоморфной всюду, за исключением конечного числа полюсов. Мы можем, следовательно, выбрать числа $\delta < r$ и ε', ε'' $(\varepsilon' < \varepsilon'' < \varepsilon)$ так, что f будет голоморфной в замкнутой области $\{\rho('z, '0) \leqslant \delta, \varepsilon' \leqslant |z_n| \leqslant \varepsilon''\}$.

Предположим, что теорема неверна и существует точка $'a$, $\rho('a, '0) < \delta$, такая, что f мероморфно продолжается в круг $K_a = \{'z = 'a, |z_n| \leqslant \varepsilon\}$. Тогда она будет мероморфно продолжаться и в некоторый поликруг $\{\rho('z, 'a) \leqslant \eta, |z_n| \leqslant \varepsilon\}$, причем

можно считать, что $'\overline{U} = \{\rho('z, 'a) \leqslant \eta\}$ принадлежит $\{\rho('z, 'a) \leqslant \delta\}$. На множестве $\{\rho('z, '0) \leqslant \delta,\ \varepsilon' \leqslant |z_n| \leqslant \varepsilon''\}$ функция f представляется рядом Хартогса — Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k('z)\, z_n^k, \tag{3}$$

где g_k голоморфны в $\{\rho('z, '0) \leqslant \delta\}$. Так как она мероморфно продолжается в поликруг $'\overline{U} \times \{|z_n| \leqslant \varepsilon\}$, то по доказанной выше лемме найдутся функции $\lambda_0, \ldots, \lambda_l \in H('U)$, не все тождественно равные нулю и такие, что для всех $k = -1, -2, \ldots$ и всех $'z \in {}'U$ имеем

$$\lambda_0('z)\, g_{k-l}('z) + \ldots + \lambda_l('z)\, g_k('z) \equiv 0. \tag{4}$$

Рассмотрим бесконечную линейную систему с $l+1$ неизвестной ξ_μ:

$$\xi_0 g_{k-l}('z) + \ldots + \xi_l g_k('z) = 0,\ k = -1, -2, \ldots \tag{5}$$

При $'z \in {}'\overline{U}$ она имеет нетривиальное голоморфное решение $\xi_\mu = \lambda_\mu('z)$, поэтому для таких $'z$ между $g_\nu('z)$ имеются аналитические зависимости, выражающие условие существования такого решения. Но так как g_ν голоморфны в большем поликруге $\{\rho('z, '0) \leqslant \delta\}$, то эти зависимости справедливы и во всем этом поликруге. Тогда, по той же лемме, функция f мероморфно продолжается в поликруг $\{\rho('z, '0) \leqslant \delta, |z_n| \leqslant \varepsilon\}$, а это противоречит тому, что $('0, 0)$ является граничной точкой D ▶

Дальнейшее доказательство аналитичности множества существенно особых точек (аналог части б) доказательства теоремы Хартогса) проходит так же, как в предыдущем пункте. По аналогии с радиусом голоморфности (радиусом Хартогса) вводят понятие *радиуса мероморфности* функции f в точке z^0 относительно переменного z_n как радиуса $R_M('z^0)$ максимального круга $\{'z = 'z^0,\ |z_n - z_n^0| < R\}$, в который f мероморфно продолжается.

Примерно так же, как в п. 26 (теорема 1), доказывается, что функция $-\ln R_M('z)$ является плюрисубгармонической в проекции $'D$ области мероморфности f (см. книгу Б. А. Фукса, цит. на стр. 517, стр. 221). После этого можно почти дословно повторить вторую часть доказательства теоремы Хартогса из предыдущего пункта. На этом пути получается

Теорема 2 (Э. Леви). *Пусть a — существенно особая точка функции f и для каждой точки $'z$, $\rho('z, 'a) < \varepsilon$, в поликруге $U = \{\rho(z, a) < \varepsilon\}$ имеется не более одной точки $('z, z_n)$, существенно особой для этой функции. Тогда найдется поли-*

круге $'V = \{\rho('z, 'a) < \delta\}$ *такой, что каждой* $'z \in 'V$ *соответствует точно одно* z_n, *для которого* $('z, z_n)$ *является существенно особой точкой* f *в* U, *причем функция* $z_n = \varphi('z)$ *голоморфна в* $'V$.

Справедлива и более общая теорема, в которой предполагается, что f имеет конечное число существенно особых точек с проекцией $'z$, и которая формулируется, как теорема 2 предыдущего пункта.

47. Теорема о вложенном ребре. В заключение мы приведем вариант теоремы об аналитичности множества особых точек, который основан на следующей полезной и в других приложениях теореме о вложенном ребре:

Теорема 1 (Кнезер). *Пусть две гиперповерхности* $\Sigma_j = \{\varphi_j(z) = 0\}$, $j = 1, 2$, *класса* C^2 *пересекаются по* $(2n-2)$-*мерному ребру* Γ *так, что во всех точках* Γ

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_n} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial \bar z_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial \bar z_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial \bar z_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial \bar z_n} \end{pmatrix} = 2 \tag{1}$$

(Σ_1 *и* Σ_2 *имеют вдоль* Γ *различные касательные плоскости*). *Тогда, если существует функция* f, *голоморфная в тех точках окрестности* Γ, *где* $\min(\varphi_1, \varphi_2) < 0$, *но не продолжаемая голоморфно ни в одну точку* Γ, *то* Γ — *аналитическая поверхность*.

◀ а) Предположим сначала, что в какой-либо точке $z^0 \in \Gamma$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_n} \end{pmatrix} = 2, \tag{2}$$

и примем $z^0 = 0$. Рассмотрим аналитическую поверхность

$$S_0 = \{z \in \mathbb{C}^n: \ z = a\zeta + b\zeta^2\},$$

где a, $b \in \mathbb{C}^n$, а $\zeta \in \mathbb{C}$ — параметр. Если для краткости обозначить $\nabla\varphi_j = \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial\varphi_j}{\partial z_n}\right)$, то по формуле Тейлора будем иметь

$$\varphi_j|_{S_0} = 2\operatorname{Re}\langle a\zeta + b\zeta^2, \ \nabla\varphi_j\rangle + \operatorname{Re}\zeta^2 K_j(a) + \frac{|\zeta|^2}{2} H_j(a, \bar a) + o(|\zeta|^2), \tag{3}$$

где, как и в п. 25,

$$K_j(a) = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z_\mu\,\partial z_\nu} a_\mu a_\nu, \quad H_j(a, \bar a) = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z_\mu\,\partial \bar z_\nu} a_\mu \bar a_\nu,$$

$\langle a, b\rangle = (a, \bar{b})$ и все производные берутся в точке $z = 0$. По условию (2) векторы $\nabla\varphi_1$ и $\nabla\varphi_2$ не коллинеарны, следовательно, можно выбрать векторы a и b так, чтобы было

$$\langle a, \nabla\varphi_1\rangle = 1, \langle a, \nabla\varphi_2\rangle = -1, 2\langle b, \nabla\varphi_j\rangle = -K_j(a) + \frac{1}{2}H_j(a, \bar{a}) + 1, \quad (4)$$
$$j = 1, 2.$$

Тогда формулы (3) примут вид

$$\varphi_1|_{S_0} = 2\xi + \xi^2 - \eta^2 + \xi^2 H_1(a, \bar{a}) + o(|\zeta|^2),$$
$$\varphi_2|_{S_0} = -2\xi + \xi^2 - \eta^2 + \xi^2 H_2(a, \bar{a}) + o(|\zeta|^2)$$

(мы положили $\zeta = \xi + i\eta$), откуда следует, что при $|\zeta| < \rho$, где ρ достаточно мало, вся поверхность S_0, кроме точки $\zeta = 0$, лежит в области $\min(\varphi_1, \varphi_2) < 0$. В самом деле, при достаточно малых $|\zeta|$ и $\xi \neq 0$ у нас либо $\varphi_1|_{S_0}$, либо $\varphi_2|_{S_0}$ отрицательна, а при $\xi = 0$, но $\eta \neq 0$ отрицательны обе $\varphi_j|_{S_0}$.

Теперь, оставив прежние a и b и пользуясь тем, что ни один из $\nabla\varphi_j \neq 0$, мы выберем вектор $\omega \in \mathbb{C}^n$ так, чтобы было

$$\langle \omega, \nabla\varphi_j\rangle = -1, \qquad j = 1, 2, \quad (5)$$

и рассмотрим семейство аналитических поверхностей

$$S_t = \{z \in \mathbb{C}^n: z = a\zeta + b\zeta^2 + \omega t\},$$

где t — положительный параметр. Имеем, очевидно,

$$\varphi_j|_{S_t} = \varphi_j|_{S_0} + 2t\,\mathrm{Re}\langle \omega, \nabla\varphi_j|_{S_0}\rangle + o(t),$$

откуда в силу условия (5) и непрерывности $\nabla\varphi_j$ следует, что при $0 < t < \tau$, где τ достаточно мало, куски S_t, для которых $|\zeta| < \rho$ (число ρ мы можем в случае надобности уменьшить), компактно принадлежат области $\min(\varphi_1, \varphi_2) < 0$.

Семейство S_t, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, удовлетворяет, очевидно, условиям принципа непрерывности из п. 23. Так как по условию доказываемой теоремы существует функция f, голоморфная в той части окрестности точки $z = 0$, где $\min(\varphi_1, \varphi_2) < 0$, и не продолжаемая в эту точку, то мы пришли к противоречию с этим принципом. Значит, мы доказали, что во всех точках Γ ранг матрицы (2) не превосходит 1.

Но этот ранг ни в одной точке Γ не может равняться 0, ибо тогда в этой точке все производные $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial z_\nu} = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, следовательно, и все $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial\bar{z}_\nu} = 0$, т. е. не выполняется условие (1).

Таким образом, во всех точках Γ

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} \end{pmatrix} = 1. \tag{6}$$

б) Теперь мы покажем, что Γ — аналитическая поверхность. Из (6) видно, что существует комплексная функция λ такая, что для всех $z \in \Gamma$

$$\nabla\varphi_2 = \lambda(z)\nabla\varphi_1. \tag{7}$$

Заметим, что $\operatorname{Im}\lambda(z) \neq 0$ для всех $z \in \Gamma$, ибо если бы $\lambda(z^0)$ было действительным числом, то из (7) следовало бы равенство $\overline{\nabla\varphi_2} = \lambda(z^0)\overline{\nabla\varphi_1}$, где черта — знак комплексного сопряжения, и тогда ранг матрицы (1) в точке z^0 был бы меньше 2, вопреки условию.

Рассмотрим произвольный вектор $dz = (dz_1, \ldots, dz_n)$, лежащий в касательной плоскости к поверхности Γ в точке z. Он должен принадлежать касательным плоскостям к каждой из гиперповерхностей Σ_j, следовательно,

$$2\operatorname{Re}\langle\nabla\varphi_1, dz\rangle = 0,$$
$$2\operatorname{Re}\langle\nabla\varphi_2, dz\rangle = 0.$$

Отсюда в силу соотношения (7), где $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, получаем равенства

$$\langle\nabla\varphi_j, dz\rangle = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{8}$$

из которых и следует аналитичность Γ. В самом деле, из условия (1) видно, что систему $\varphi_j = 0$, $j = 1, 2$, можно разрешить относительно одного из переменных, скажем $z_n = g(z)$. Но из (8) видно, что дифференциал функции g выражается лишь через dz_ν и не содержит $d\bar{z}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n-1$), а это и означает аналитичность g ▶

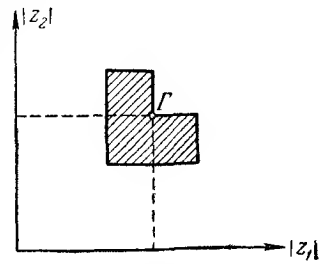


Рис. 121.

Примеры.

1. Пусть $\varphi_1 = |z_1| - 1$, $\varphi_2 = |z_2| - 1$ в $\mathbb{C}^2$. Поверхности $\Sigma_j = \{|z_j| = 1\}$, $j = 1, 2$, пересекаются по тору $\Gamma = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$. Так как это не аналитическая поверхность, то из теоремы Кнезера следует, что всякая функция f, голоморфная в той части окрестности Γ, где либо $|z_1| < 1$, либо $|z_2| < 1$ (заштрихована на диаграмме Хартогса, рис. 121), непременно голоморфно продолжается на Γ.

2. По той же причине область $\{|z_1|<1,\ |z_2|<2\}\cup\{|z_1|<2,\ |z_2|<1\}$ не может быть областью голоморфности — этот результат мы получили в п. 7 при помощи логарифмической выпуклости.

Из теоремы о вложенном ребре просто следует теорема об аналитичности множества особых точек, которая отличается от доказанной в п. 45 тем, что в ней заранее предполагается гладкость этого множества, но условие не слишком большой массивности формулируется лишь в терминах размерности.

Теорема 2. *Если функция f голоморфна в некоторой $2n$-мерной окрестности $(2n-2)$-мерной поверхности Γ класса C^2 и не продолжается голоморфно на Γ, то Γ — аналитическая поверхность.*

◀ Пусть $z^0\in\Gamma$ — произвольная точка. Так как $\Gamma\subset C^2$ и является $(2n-2)$-мерной поверхностью, то в окрестности z^0 она задается двумя действительными уравнениями $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, где $\varphi_j\in C^2$, и ранг матрицы (1) в этой окрестности равен 2. Так как f заведомо голоморфна в той части окрестности Γ, где $\min(\varphi_1,\varphi_2)<0$, и не продолжается на Γ, то Γ — аналитическая поверхность ▶

Небольшой модификацией рассуждений можно доказать аналог теоремы о вложенном ребре, в котором вместо голоморфной участвует мероморфная функция. Из этой теоремы сразу получится вариант теоремы об аналитичности множества существенно особых точек.

ЗАДАЧИ

1. Мероморфной кривой в области $D\subset\mathbb{C}$ назовем отображение $f\colon D\to\bar{\mathbb{C}}^n$, компонентами которого являются мероморфные в D функции. Нулем f называется точка $\zeta_0\in D$, в которой все $f_\nu(\zeta_0)=0$; младший из порядков нулей f_ν $(\nu=1,\ldots,n)$ в этой точке называется порядком нуля f. Полюсом кривой f называется точка $\zeta_0\in D$, в которой хотя бы одна $f_\nu(\zeta_0)=\infty$; порядком полюса f называется старший из порядков полюсов f_ν в этой точке. Доказать для мероморфных кривых следующий аналог принципа аргумента:

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{(f',f)}{(f,f)}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D\int\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\frac{(f',f)}{(f,f)}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta$$

(здесь предполагается, что ∂D — гладкая кривая, f голоморфно продолжается на ∂D и там $f\neq 0$; N и P — число нулей и полюсов f в D с учетом их порядков; $(z,w)=\sum z_\nu\bar w_\nu$ обозначает скалярное произведение). При этом второе слагаемое справа — неотрицательная величина и обращается в 0 в том и только том случае, когда кривая f лежит на аналитической прямой, проходящей через $0\in\mathbb{C}^n$.

2. (А. П. Южаков). Доказать, что для любого цикла σ, не задевающего множество особенностей подинтегральной функции,

$$\int_{\sigma} \frac{f(z, w)}{az^k + bz^l}\, dz\, dw = 0,$$

где f — целая функция в $\mathbb{C}^2$, k и l — взаимно простые целые положительные числа, a и $b \in \mathbb{C}$.

3. Пусть M — аналитическое множество, относительно замкнутое в области $D \subset \mathbb{C}^n$ (это значит, что $M = D \cap \overline{M}$); тогда множество $D \setminus M$ связно.

4. Связное аналитическое множество линейно связно.

5. Аналитическое множество неприводимо тогда и только тогда, когда множество его правильных точек связно.

6. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $M \subset U$ — относительно замкнутое аналитическое множество. Тогда либо M дискретно, либо содержит точки, сколь угодно близкие к ∂U; в частности, всякое компактное аналитическое множество дискретно.

7. Пусть M — аналитическое множество в $\mathbb{C}^n$ и L — аналитическая плоскость (комплексной) размерности k. Если a является изолированной точкой множества $M \cap L$, то размерность M в точке a не превосходит $n - k$.

8. Доказать, что неприводимое аналитическое множество M: $z_3^3 = z_1^2 + z_2^2$ в $\mathbb{C}^3$ не является аналитическим многообразием; точнее, не существует голоморфного взаимно однозначного отображения f: $B \to M \cap U$, где B — единичный шар в $\mathbb{C}^2$ и U — окрестность 0 в $\mathbb{C}^3$.

9. Одномерное аналитическое множество в $\mathbb{C}^n$, неприводимое в 0, с точностью до линейной замены координат локально задается системой уравнений

$$z_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\nu)} z_1^{k/m}, \quad \nu = 2, \ldots, n,$$

где m — некоторое целое положительное число.

10. Если одномерное аналитическое множество $M \subset \mathbb{C}^2$ является топологическим многообразием, то M — аналитическое многообразие в $\mathbb{C}^2$.

11. Пусть D — область голоморфности и M — относительно замкнутое аналитическое множество в D; тогда для любого компакта $K \subset M$ его оболочка относительно $H(D)$ принадлежит M.

12. Пусть K — компакт на замкнутом одномерном аналитическом множестве $M \subset \mathbb{C}^n$. Тогда 1) множество K рационально выпукло, 2) если аналитическое множество $M \setminus K$ неприводимо, то K полиномиально выпукло. Привести пример полиномиально выпуклого компакта $K \subset M$ такого, что множество $M \setminus K$ несвязно.

13. Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — окрестность точки a и функция $f \in H(U)$ такова, что $f(a) = 0$ и $f('a, z_n) \not\equiv 0$. Тогда для каждой $g \in H(U)$ существует окрестность $V \ni a$ и функция $h \in H(V)$ такая, что $g - fh$ — полином по z_n степени ниже k, где k — порядок нуля $f('a, z_n)$ при $z_n = a_n$. (Подготовительная теорема в форме Шпета — Картана.)

14. Функции $f_1, \ldots, f_n$ голоморфны в точке $a \in \mathbb{C}^n$, и якобиан $\dfrac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$ в окрестности a.

Доказать, что:

1) существуют голоморфные в a функции $g_1, \ldots, g_n$ такие, что $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n \equiv 0$, и

2) существует голоморфная в точке $f(a)$ функция $F \not\equiv 0$ такая, что $F(f_1, \ldots, f_n) \equiv 0$.

15. Пусть D — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$ и функции $f_\nu \in H(D)$, $\nu = 1, \ldots, N$, не имеют в D общих нулей; тогда найдутся функции $g_\nu \in H(D)$ такие, что $f_1 g_1 + \ldots + f_N g_N \equiv 1$.

16. Пусть M — аналитическое множество в области $D \subset \mathbb{C}^n$, где $n \geqslant 2$, и в каждой точке $a \in M$ комплексная размерность M не превосходит $n-2$. Тогда любую $f \in H(D \setminus M)$ можно единственным образом продолжить до функции из $H(D)$.

17. Если область $D \subset \mathbb{C}^n$ является голоморфным расширением области D' (в частности, $D' = D \setminus K$, где $K \Subset D$), то всякий голоморфизм D' продолжается до голоморфизма области D.

18. Пусть $\Sigma = \{\varphi(z) = 0\}$ — гиперповерхность класса C^2 в окрестности U начала координат в $\mathbb{C}^n$ и

$$\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} a_\nu \bar{a}_\mu \equiv 0$$

на Σ для любого вектора $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда найдется непрерывная функция $h(z, t)$, голоморфная по z при каждом t, $0 < t < 1$, в окрестности нуля $V \subset U$, такая, что

$$\Sigma \cap V = \bigcup_t \{h(z, t) = 0\}.$$

ГЛАВА VI

ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим основные факты, связанные с голоморфными гомеоморфизмами пространственных областей. Заметим сразу, что система Коши—Римана, которая выражает условия голоморфности системы n функций n комплексных переменных ($2n^2$ действительных уравнений с $2n$ действительными функциями), при $n>1$ переопределена. Это порождает существенные отличия пространственной теории от плоской. В частности, в пространстве не имеет места аналог теоремы Римана о существовании конформного отображения одной заданной области на другую: даже такие простейшие области, как шар и бикруг, в $\mathbb{C}^2$ оказываются неотобразимыми друг на друга!

Мы рассмотрим два подхода к теории отображений — алгебраический, связанный с изучением групп автоморфизмов отображаемых областей, и аналитический, связанный с так называемой кернфункцией.

§ 16. Автоморфизмы простейших областей

Под *изоморфизмом* двух областей D, $D^*\subset\mathbb{C}^n$ мы будем понимать гомеоморфное отображение $f=(f_1, \ldots, f_n)$ области D на D^*, осуществляемое системой n голоморфных в D функций $f_\nu=f_\nu(z)$. Такие отображения называются еще *биголоморфными* или *голоморфизмами* (голоморфными гомеоморфизмами). Изоморфизм области D на себя называется *автоморфизмом*.

Автоморфизмы области D, очевидно, образуют группу, если под групповой операцией понимать композицию (последовательное выполнение) $\psi\circ\varphi$ автоморфизмов. Как и в п. 36 ч. I, доказывается, что любой изоморфизм f_0: $D\to D^*$ устанавливает изоморфизм групп автоморфизмов отображаемых областей. Таким образом получается необходимое условие существования биголоморфного отображения одной области на другую — изоморфность их групп автоморфизмов.

На плоскости существует лишь три типа не изоморфных друг другу односвязных областей: замкнутая плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, открытая плоскость $\mathbb{C}$ и области, изоморфные единичному кругу $\{|z|<1\}$. В пространстве ситуация значительно сложнее.

Мы рассмотрим здесь лишь простейшие факты, связанные с этими вопросами.

48. Общие теоремы. Начнем с простых теорем об отображениях пространственных областей. Первые две из них представляют своего рода теоремы единственности — они утверждают, что в некоторых предположениях отображения однозначно определяются своими линейными частями. Для формулировки первой теоремы нам понадобится одно определение.

Рассмотрим семейство отображений

$$f^{(\alpha)} = (f_1^{(\alpha)}, \ldots, f_n^{(\alpha)}) \tag{1}$$

окрестности точки $z = 0$, где α пробегает некоторое множество индексов A, а функции $f_\nu^{(\alpha)}$ допускают разложение в кратный степенной ряд

$$f_\nu^{(\alpha)}(z) = \sum_{|k| \geqslant 0} c_{k,\nu}^{(\alpha)} z^k. \tag{2}$$

Семейство (1) называется *слабо ограниченным*, если существуют константы $C_{k,\nu} \geqslant 0$ такие, что

$$|c_{k,\nu}^{(\alpha)}| \leqslant C_{k,\nu} \tag{3}$$

для всех $k = (k_1, \ldots, k_n)$ с неотрицательными целыми координатами, всех $\nu = 1, \ldots, n$ и всех $\alpha \in A$.

Теорема 1 (А. Картан). *Пусть голоморфное отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ некоторой окрестности $U = \{|z_\nu| < r_\nu\}$ имеет линейную часть, совпадающую с тождественным отображением, т. е.*

$$f_\nu(z) = z_\nu + \sum_{|k| \geqslant 2} c_{k,\nu} z^k. \tag{4}$$

Если семейство итераций этого отображения $f^{(\mu)}(z) = f \circ f^{(\mu-1)}(z)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, f^{(0)}(z) \equiv z)$ слабо ограничено, то $f(z) \equiv z$.

◀ Пусть утверждение неверно. Тогда разложения (4) можно записать в виде

$$f_\nu(z) = z_\nu + \sum_{|k| = \varkappa} c_{k,\nu} z^k + \ldots,$$

где число $\varkappa \geqslant 2$ выбрано так, что все $c_{k,\nu}$, для которых $1 < |k| < \varkappa$, равны 0, а хотя бы один $c_{k,\nu}$, для которого $|k| = \varkappa$, отличен от нуля; многоточие обозначает члены разложения с $|k| > \varkappa$. Итерируя, получим

$$f_\nu^{(2)}(z) = f_\nu(f) = f_\nu(z) + \sum_{|k| = \varkappa} c_{k,\nu} f_1^{k_1} \ldots f_n^{k_n} + \ldots =$$

$$= z_\nu + 2 \sum_{|k| = \varkappa} c_{k,\nu} z^k + \ldots$$

и, вообще,

$$f_\nu^{(\mu)}(z) = z_\nu + \mu \sum_{|k|=\varkappa} c_{k,\nu} z^k + \dots .$$

Так как по условию семейство $\{f^{(\mu)}\}$ слабо ограничено, то для всех $\mu = 1, 2, \dots$, всех k, $|k| = \varkappa$, и всех $\nu = 1, \dots, n$ имеем

$$\mu |c_{k,\nu}| \leqslant C_{k,\nu},$$

где правая часть не зависит от μ. Отсюда следует, что все такие $c_{k,\nu} = 0$, в противоречии с нашим выбором $\varkappa$ ▶

Следствие. *Пусть семейство* Γ *голоморфных в* $U = \{|z_\nu| < r_\nu\}$ *отображений* f *с компонентами*

$$f_\nu(z) = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu,\nu} z_\mu + \sum_{|k|\geqslant 2} c_{k,\nu} z^k$$

слабо ограничено и образует группу (относительно композиции). Тогда каждое $f \in \Gamma$ *однозначно определено своей линейной частью* $L(f) = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu\nu} z_\mu = Cz$, *где* $C = (c_{\mu\nu})$ *— матрица, а* $z = (z_1, \dots, z_n)$ *— вектор.*

◀ Пусть f, $g \in \Gamma$ и имеют одинаковую линейную часть; тогда $\varphi = f \circ g^{-1} \in \Gamma$ и $L(\varphi) = L(f) \circ L^{-1}(g) \equiv z$ — тождественное преобразование. Итерации $\varphi^{(\mu)} \in \Gamma$ и, следовательно, слабо ограничены. Поэтому по теореме 1 имеем $\varphi(z) \equiv z$, и, значит, $f \equiv g$ ▶

Теорема 2. *Пусть ограниченная область* D *содержит точку* $z = 0$ *и линейная часть голоморфного отображения* $f : D \to D$ *в этой точке совпадает с тождественным отображением. Тогда* $f(z) \equiv z$ *в* D.

◀ Так как D ограничена, она принадлежит некоторому поликругу $U = \{|z_\nu| < M\}$, а так как f и все его итерации $f^{(\mu)}$ отображают D в D, то и все $|f_\nu^{(\mu)}(z)| < M$ всюду в D. Пусть поликруг $V = \{|z_\nu| < r_\nu\} \Subset D$, тогда в нем имеют место разложения

$$f_\nu^{(\mu)}(z) = z_\nu + \sum_{|k|\geqslant 2} c_{k,\nu}^{(\mu)} z^k,$$

причем в силу неравенств Коши $|c_{k,\nu}^{(\mu)}| \leqslant \dfrac{M}{r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n}}$. Отсюда видно, что семейство итераций $f^{(\mu)}$ слабо ограничено в V, и по теореме 1 там $f_\nu(z) \equiv z_\nu$. По теореме единственности эти тождества справедливы и всюду в D ▶

Будем еще называть семейство отображений $\{f^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, компоненты которых в окрестности точки $z = 0$ допускают разложения (2), (*сильно*) *ограниченным* в этой точке, если

существуют постоянная $M>0$ и вектор $r=(r_1, \ldots, r_n)$ с положительными координатами такие, что

$$|c_{k,\nu}^{(\alpha)}| \leqslant \frac{M}{r^k} \tag{5}$$

для всех $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $k_\mu \geqslant 0$, всех $\nu=1, \ldots, n$ и всех $\alpha \in A$. Через

$$J_\alpha(z)=\frac{\partial(f_1^{(\alpha)}, \ldots, f_n^{(\alpha)})}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$$

мы обозначим величину якобиана отображения $f^{(\alpha)}$ в точке z.

Лемма 1. *Пусть семейство голоморфизмов* $\{f^{(\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, *окрестности* U *точки* $z=0$ *ограничено в этой точке,* $f^{(\alpha)}(0)=0$ *и* $|J_\alpha(0)| \geqslant \sigma > 0$ *для всех* $\alpha \in A$. *Тогда пересечение образов* $f^{(\alpha)}(U)$, $\alpha \in A$, *содержит некоторый шар* $\{|w|<\rho\}$.

◀ Положим $z=(x_1, \ldots, x_{2n})$, $f^{(\alpha)}=(u_1, \ldots, u_{2n})$ и рассмотрим $f^{(\alpha)}$ как действительное отображение

$$u_\nu=\sum_{\mu=1}^{2n} \gamma_{\mu\nu} x_\nu + \varphi_\nu(x) \qquad (\nu=1, \ldots, 2n), \tag{6}$$

где ряды для φ_ν содержат лишь члены выше первого порядка (индекс α мы временно опускаем). Выражение

$$\sum_{\nu=1}^{2n} v_\nu^2 \equiv \sum_{\nu=1}^{2n} \left(\sum_{\mu=1}^{2n} \gamma_{\mu\nu} x_\mu \right)^2$$

является положительно определенной квадратичной формой, причем в силу условия $|J_\alpha(0)| \geqslant \sigma > 0$ существует такая не зависящая от α постоянная $K_1>0$, что [1])

$$\sum_{\nu=1}^{2n} v_\nu^2 \geqslant K_1^2 \sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu^2.$$

С другой стороны, в силу ограниченности $\{f^{(\alpha)}\}$ в точке $z=0$, в достаточно малом шаре $\{|x|<R\} \subset U$ имеем [2])

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \varphi_\nu^2(x) \leqslant K_2^2 \left(\sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu^2 \right)^2,$$

---

[1]) Напомним, что $\dfrac{\partial(u_1, \ldots, u_{2n})}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n})} = \left| \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \right|^2$.

[2]) Пусть $\varphi_\nu(x) = \sum_{|k| \geqslant 2} \gamma_{k,\nu} x^k$, тогда $|\varphi_\nu(x)| \leqslant |x|^2 \left\{ \sum_{|k|=2} |\gamma_{k,\nu}| + |x| \sum_{|k|=3} |\gamma_{k,\nu}| + \ldots \right\}$; остается воспользоваться оценками (5), которые справедливы и для $|\gamma_{k,\nu}|$.

где K_2 — некоторая положительная константа, также не зависящая от α. Пользуясь разложением (6), находим

$$\left(\sum_{\nu=1}^{2n} u_\nu^2\right)^{1/2} \geqslant K_1\left(\sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu^2\right)^{1/2} - K_2\left(\sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu^2\right)$$

или, в комплексных обозначениях

$$|f^{(\alpha)}(z)| \geqslant (K_1 - K_2|z|)|z|.$$

Возьмем теперь шар $B=\{|z|<r\}$, где $r \leqslant \min\left(R, \frac{K_1}{2K_2}\right)$; на его границе ∂B имеем

$$|f^{(\alpha)}(z)| \geqslant \frac{K_1}{2} r = \rho,$$

следовательно, при любом $\alpha \in A$ образ $f^{(\alpha)}(\partial D)$ лежит вне шара $\{|w|<\rho\}$. Так как $f^{(\alpha)}$ — голоморфизм и $f^{(\alpha)}(0)=0$, то отсюда следует, что $f^{(\alpha)}(B) \supset \{|w|<\rho\}$ при любом $\alpha \in A$ ▶

Следующая теорема имеет вспомогательный характер:

Теорема 3. *Пусть последовательность голоморфных отображений $f^{(\mu)}$, $\mu=1, 2, \ldots$, области D на каждом компакте $K \subset D$ сходится равномерно к отображению f. Тогда, если якобиан J предельного отображения f в некоторой точке $z^0 \in D$ отличен от нуля, то найдутся числа μ_0 и ρ такие, что для всех $\mu \geqslant \mu_0$ образ $f^{(\mu)}(D)$ содержит шар $\{|w-w^0|<\rho\}$, где $w^0=f(z^0)$.*

◀ Без ограничения общности принимаем $z^0=w^0=0$. Семейство $f^{(\mu)}$, очевидно, ограничено в точке $z=0$, и по теореме Вейерштрасса $\lim\limits_{\mu\to\infty} J_\mu(z)=J(z)$. Отсюда следует, что в некоторой окрестности U точки $z=0$ отображения $f^{(\mu)}$ при $\mu \geqslant \mu_1$ гомеоморфны и $|J_\mu(0)| \geqslant \sigma > 0$. Поэтому функции $g^{(\mu)}=f^{(\mu)}-f^{(\mu)}(0)$, $\mu \geqslant \mu_1$, удовлетворяют условиям леммы, т. е. $f^{(\mu)}(D)$ при $\mu \geqslant \mu_1$ содержат шары $\{|w-f^{(\mu)}(0)|<2\rho\}$. Так как $f^{(\mu)}(0) \to 0$, то найдется $\mu_0 \geqslant \mu_1$ такое, что при $\mu \geqslant \mu_0$ образы $f^{(\mu)}(D)$ содержат шар $\{|w|<\rho\}$ ▶

Следующая теорема, принадлежащая А. Картану и К. Каратеодори, выражает достаточное условие для того, чтобы голоморфное отображение f некоторой области D в себя, обладающее неподвижной точкой $z^0 \in D$ (т. е. такой, что $f(z^0)=z^0$), было автоморфизмом этой области. Для ее доказательства нам понадобится

Лемма 2. *Пусть область D содержит точку $z=0$ и голоморфное отображение f: $D \to D$ таково, что $f(0)=0$, $|J(0)|=1$, а итерации $f^{(\mu)}$, $\mu=0, \pm 1, \ldots$, ограничены в этой точке. Тогда*

существует последовательность $\nu_s \geqslant 1$ *такая, что* $f^{(\nu_s)}$ *при* $s \to \infty$ *равномерно сходится к тождественному преобразованию в некоторой окрестности точки* $z = 0$.

◀ Совокупность итераций $f^{(\mu)}$, где $\mu = 0, \pm 1, \ldots$, образует, очевидно, группу (под $f^{(0)}$ понимается тождественное преобразование, $f^{(-1)}$ обозначает преобразование обратное к f в окрестности точки $z = 0$, которое существует, ибо $J(0) \neq 0$). По следствию теоремы 1 отображения $f^{(\mu)}$ однозначно определяются своими линейными частями $L(f^{(\mu)})$, поэтому достаточно найти такую подпоследовательность ν_s, для которой $L(f^{(\nu_s)}) \to E$, где E — тождественное отображение.

Заметим, что по определению итераций $L(f^{(\mu)}) = A^{\mu}$, где A — матрица $L(f)$, а A^{μ} — ее μ-я степень. Так как последовательность $L(f^{(\mu)})$ по условию ограничена, то можно выбрать подпоследовательность μ_s $(0 \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \ldots)$, такую, что $\lim\limits_{s \to \infty} A^{\mu_s} = B$ существует (т. е. существует предел каждого элемента $a_{\alpha\beta}^{(\mu_s)}$ матрицы A^{μ_s}, равный соответствующему элементу $b_{\alpha\beta}$ матрицы B; $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$). Так как определители матриц A^{μ} по модулю равны 1, то матрица B обратима и существует $\lim\limits_{s \to \infty} A^{-\mu_s} = B^{-1}$. Но тогда $A^{\mu_{s+1}} A^{-\mu_s} = A^{\mu_{s+1} - \mu_s} \to E$ при $s \to \infty$, т. е. последовательность $\mu_{s+1} - \mu_s = \nu_s$ и есть искомая ▶

Теорема 4. *Пусть* D *— ограниченная область и* $f\colon D \to D$ *— голоморфное преобразование с неподвижной точкой* $z^0 \in D$. *Если*

$$|J(z^0)| = \left| \frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (z_1, \ldots, z_n)} \right|_{z = z^0} = 1, \tag{7}$$

то f *— автоморфизм.*

◀ Без ограничения общности считаем, что $z^0 = 0$. Покажем сначала, что f — взаимно однозначное отображение. Пусть $f(a) = f(b)$, где $a, b \in D$; тогда и $f^{(\mu)}(a) = f^{(\mu)}(b)$, где $f^{(\mu)}$ — итерации отображения f $(\mu = 0, 1, \ldots)$. Так как $f^{(\mu)}$ ограничены в нуле для всех целых μ (в силу ограниченности D), а $f(0) = 0$ и $|J(0)| = 1$, то по лемме существует последовательность μ_s такая, что $f^{(\mu_s)}$ сходится к тождественному преобразованию E в некоторой окрестности точки $z = 0$. Но $f^{(\mu_s)}$ ограничена в каждой точке $z \in D$, следовательно, из нее по теореме Монтеля [1]) можно извлечь подпоследовательность, равномерно схо-

[1]) См. п. 37 ч. I; доказательство этой теоремы полностью переносится на пространственный случай.

дящуюся на любом $K \Subset D$. Пусть для простоты $\{f^{(\mu_s)}\}$ — эта подпоследовательность; по теореме единственности она сходится к E на любом $K \Subset D$. Поэтому мы имеем $f^{(\mu_s)}(a) \to a$ и $f^{(\mu_s)}(b) \to b$, а так как у нас $f^{(\mu_s)}(a) = f^{(\mu_s)}(b)$, то $a = b$.

Остается показать, что $f(D) = D$. Последовательность $f^{(\mu_s)}$ удовлетворяет условиям теоремы 3, причем якобиан предельного отображения всюду в D отличен от нуля. Пусть $z \in D$ — произвольная точка; так как $f^{(\mu_s)}(z) \to z$, то по теореме 3 найдутся s_0 и ρ такие, что $f^{(\mu_s)}(D)$ при $s \geqslant s_0$ содержит шар радиуса ρ с центром z. Но $f^{(\mu_s)}(D) \subset f(D)$, следовательно, $z \in f(D)$ ▶

Теорему 4 можно рассматривать как некоторый пространственный аналог леммы Шварца. В самом деле, ее можно сформулировать так: если $f\colon D \to D$ — голоморфное отображение с неподвижной точкой z^0, то $|J(z^0)| \leqslant 1$, причем равенство возможно лишь в том случае, когда f — автоморфизм [1]).

Приведем в заключение другую форму пространственного аналога леммы Шварца:

Теорема 5. *Пусть f, $f(0) = 0$, — голоморфное отображение единичного шара $B = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$, непрерывное в $\overline{B}$. Тогда в любой точке $z \in B$*

$$|f(z)| \leqslant |z| \max_{\zeta \in \partial B} |f(\zeta)|. \tag{8}$$

◀ Рассмотрим сначала комплексную функцию $\varphi\colon B \to \mathbb{C}$, $\varphi(0) = 0$, голоморфную в B и непрерывную в $\overline{B}$. Обозначим

$$M(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)|$$

и положим $\Phi(t;\ z) = \varphi(tz) = \varphi(tz_1, \ldots, tz_n)$, где t — комплексное число, а также

$$M(r;\ z) = \max_{|t|=r} |\Phi(t;\ z)|;$$

очевидно,

$$M(r) = \max_{|\zeta|=1} M(r;\ \zeta), \qquad 0 \leqslant r < 1. \tag{9}$$

Так как $\Phi(0;\ z) = 0$ для любой $z \in \overline{B}$, то к функции $\Phi(t;\ z)$ одного переменного t можно применить обычную лемму Шварца,

---

[1]) Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что случай $|J(z^0)| > 1$ невозможен, ибо тогда якобиан итераций $f^{(\mu)}$ в точке z^0 будет неограниченно возрастать, а это по теореме Монтеля противоречит ограниченности семейства итераций.

по которой для любых t, $|t|\leqslant 1$, и $z\in\bar{B}$ имеем $|\Phi(t;\ z)|\leqslant |t|\max\limits_{|\tau|=1}|\Phi(\tau;\ z)|$, откуда

$$M(r;\ z)\leqslant rM(1;\ z),\qquad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

По формуле (9) отсюда получаем сначала $M(r;\ \zeta)\leqslant rM(1)$ для всех $\zeta\in\partial B$, а затем

$$M(r)\leqslant rM(1),\qquad 0\leqslant r\leqslant 1. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим отображение $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)\colon B\to\mathbb{C}^n$, удовлетворяющее условиям теоремы, фиксируем произвольную точку $a\in\mathbb{C}^n$ и применим неравенство (10) к функции

$$\varphi_a(z)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu f_\nu(z).$$

Мы получим, пользуясь еще неравенством Коши—Буняковского:

$$\max_{|z|=r}|\varphi_a(z)|\leqslant r\max_{\zeta\in\partial B}\left|\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu f_\nu(z)\right|\leqslant r|a|\max_{\zeta\in\partial B}|f(\zeta)|. \tag{11}$$

Пусть z^0 — одна из точек сферы $\{|z|=r\}$, в которой достигается $\max|f(z)|$ на этой сфере. Выберем в качестве a вектор с координатами $a_\nu=\overline{f_\nu(z^0)}$. Тогда будет $|a|=|f(z^0)|$, $\varphi_a(z^0)=|f(z^0)|^2$; из (11) мы получим

$$|f(z^0)|\leqslant r\max_{\zeta\in\partial B}|f(\zeta)|.$$

Остается заметить, что в силу нашего выбора z^0 для любой точки z, $|z|=r$, будет $|f(z)|\leqslant|f(z^0)|$ ▶

Следствие. *Для любого голоморфного отображения* $f\colon B\to B$, $f(0)=0$, *в любой точке* $z\in B$

$$|f(z)|\leqslant|z|. \tag{12}$$

◀ Фиксируем произвольное ρ, $0<\rho<1$, и рассмотрим отображение $g(z)=f(\rho z)$. Оно непрерывно в $\bar{B}$, т. е. удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, причем $\max\limits_{\zeta\in\partial B}|g(\zeta)|\leqslant 1$. Поэтому $|g(z)|\leqslant|z|$ для любого $z\in B$, или, что то же самое, для любого $z\in B$ и любого ρ, $0<\rho<1$,

$$|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{\rho}.$$

Устремляя ρ к 1, получим (12) ▶

49. Автоморфизмы пространства. В п 36 ч. 1 было доказано, что любой голоморфный гомеоморфизм комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является отображением на $\mathbb{C}$, т. е. автоморфизмом, и непре-

менно представляет собой линейное преобразование $z \to az + b$. В пространственном случае оба этих утверждения оказываются неверными.

В самом деле, пример нелинейного автоморфизма $\mathbb{C}^2$ строится совсем просто. Рассмотрим, скажем, отображение

$$w_1 = z_1 + \varphi(z_2), \qquad w_2 = z_2, \tag{1}$$

где φ — произвольная нелинейная целая функция одного комплексного переменного (например, полином). Оно голоморфно в $\mathbb{C}^2$, взаимно однозначно (ибо из равенства $w' = w''$ немедленно вытекает, что $z_2' = z_2''$, а затем, с учетом этого, — что $z_1' = z_1''$) и отображает $\mathbb{C}^2$ на $\mathbb{C}^2$ (ибо произвольное значение $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ принимается в точке $z_1 = w_1 - \varphi(w_2)$, $z_2 = w_2$).

Интересный пример (нелинейного) голоморфизма $\mathbb{C}^2$ на правильную часть $\mathbb{C}^2$ был построен П. Фату в 1922 г. Мы предлагаем несколько упрощенный вариант этого примера. Возьмем линейное отображение A: $(z_1, z_2) \to \left(-\frac{z_1}{2}, \frac{z_2}{2}\right)$ и рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi(z) = 4\varphi(A^2 z) - 3\varphi^2(Az), \tag{2}$$

где $z = (z_1, z_2)$ и $A^2(z) = A \circ A(z) = \left(\frac{z_1}{4}, \frac{z_2}{4}\right)$.

Покажем прежде всего, что (2) имеет голоморфное решение вида

$$\varphi(z) = z_1 + z_2 + \sum_{|k| \geqslant 2} a_k z^k \equiv z_1 + z_2 + \psi(z). \tag{3}$$

Для этого заметим, что ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi(z) - 4\psi(A^2 z) = -3\left(\frac{z_2 - z_1}{2} + \psi(Az)\right)^2, \tag{4}$$

а при исследовании последнего воспользуемся методом мажорантных рядов. Мы будем писать $\sum a_k z^k \ll \sum b_k z^k$, если $|a_k| \leqslant |b_k|$ для всех k (и говорить тогда, что второй ряд *мажорирует* первый), и обозначим $\|\sum a_k z^k\| = \sum |a_k| z^k$. Имеем

$$\|\psi(z) - 4\psi(A^2 z)\| = \left\| \sum_{|k|=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4^{|k|-1}}\right) a_k z^k \right\| \gg \frac{3}{4} \|\psi(z)\|$$

и

$$\left\| -3\left(\frac{z_2 - z_1}{2} + \psi(Az)\right)^2 \right\| \ll 3\left(\frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{1}{4}\|\psi(z)\|\right)^2,$$

следовательно,

$$\|\psi(z)\| \ll \left(z_1 + z_2 + \frac{1}{2}\|\psi(z)\|\right)^2. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь вместо (5) уравнение

$$\Psi(t) = \left(t + \frac{1}{2}\Psi(t)\right)^2;$$

оно имеет решение $\Psi = 2\left(1 - t - \sqrt{1-2t}\right) = \sum_{\mu=2}^{\infty} b_\mu t^\mu$, где $b_\mu > 0$ и ряд сходится в окрестности $t = 0$. Нетрудно видеть, что $\psi(z) \ll \Psi(z_1 + z_2)$ [1]), поэтому ряд для ψ, а значит и для φ, сходится в окрестности точки $z = 0$. Но из уравнения (2) видно, что если φ голоморфна в бикруге $\{|z_1| < r,\ |z_2| < r\}$, то она аналитически продолжается в бикруг $\{|z_1| < 2r,\ |z_2| < 2r\}$, а отсюда следует, что φ — целая функция.

Покажем, что искомое отображение $\mathbb{C}^2$ можно взять в виде $f = (f_1, f_2)$, где

$$f_1(z) = \varphi(z), \qquad f_2(z) = \varphi(Az). \tag{6}$$

Пусть $J(z) = \dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z_1, z_2)}$ — якобиан этого отображения; сравним его с якобианом отображения

$$g(z) = f(Az) = \left\{f_2(z),\ \frac{1}{4}f_1(z) + \frac{3}{4}f_2^2(z)\right\} \tag{7}$$

(мы воспользовались уравнением (2)). Так как при композиции отображений их якобианы перемножаются, то из (7)

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z_1, z_2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2}f_2 \end{vmatrix} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z_1, z_2)} = -\frac{1}{4}J(z),$$

а из того, что $g(z) = f(Az)$, получаем

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z_1, z_2)} = J(Az)\frac{\partial(A_1, A_2)}{\partial(z_1, z_2)} = -\frac{1}{4}J(Az).$$

Мы получили, что $J(Az) = J(z)$, откуда находим

$$J(A^n z) = J(z),$$

где A^n — n-я итерация отображения A. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} A^n z = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^2$, то $J(z) = J(0) = \text{const}$. Но в окрестности начала,

[1]) Для доказательства можно воспользоваться индукцией по $|k| = \mu$, заметив, что (5) оценивает коэффициент разложения $\|\psi(z)\| = \sum_{\mu=2}^{\infty} \alpha_k z^k$ с фиксированным $|k|$ через коэффициенты с меньшими значениями $|k|$.

как видно из (2), $f_1(z)=z_1+z_2+\ldots$, $f_2(z)=-\frac{z_1}{2}+\frac{z_2}{2}+\ldots$; поэтому $J(0)=1$ и, следовательно, $J(z)\equiv 1$.

Отсюда нетрудно заключить, что f — гомеоморфизм. В самом деле, пусть, от противного, $f(a)=f(b)$, где $a\neq b$ — точки $\mathbb{C}^2$. Тогда имеем $\varphi(a)=\varphi(b)$, $\varphi(Aa)=\varphi(Ab)$; но с учетом (2) отсюда следует, что и $\varphi(A^2a)=\varphi(A^2b)$, а это вместе с последним соотношением дает $f(Aa)=f(Ab)$. Итак, $f(a)=f(b)\Rightarrow f(Aa)=f(Ab)$, и итерированием мы получим

$$f(A^na)=f(A^nb).$$

Но отображение f локально гомеоморфно, ибо $J(z)\neq 0$, а A^na и A^nb при достаточно больших n сколь угодно близки к началу, и мы пришли к противоречию.

Остается показать, что f принимает не все значения из $\mathbb{C}^2$. Прежде всего, ясно, что f не принимает значения (1, 1). Действительно, если бы в некоторой точке z было $\varphi(z)=1$, $\varphi(Az)=1$, то из (2) мы получили бы, что в этой точке и $\varphi(A^2z)=1$. Таким образом, из $f(z)=(1, 1)$ следует, что и $f(Az)=(1, 1)$. Итерированием найдем, что и $f(A^kz)=(1, 1)$ для любого $k=1, 2, \ldots$, откуда в пределе следует равенство $f(0, 0)=(1, 1)$. Но у нас $f(0, 0)=(0, 0)$, и противоречие доказывает утверждение.

Более того, f не принимает ни одного значения из множества $E=\left\{(a_1, a_2)\colon |a_1|\geqslant\frac{5}{3},\ |a_2|\geqslant|a_1|\right\}$. В самом деле, пусть в некоторой точке z имеем $\varphi(z)=a_1$, $\varphi(Az)=a_2$. Из (2) тогда следует, что

$$\varphi(A^2z)=\frac{\varphi(z)+3\varphi^2(Az)}{4}=\frac{a_1+3a_2^2}{4}$$

и, далее, что итерации $f(Az)$, $f(A^2z)$, $\ldots$, $f(A^{k-1}z)$ соответственно равны (a_2, a_3), (a_3, a_4), $\ldots$, (a_k, a_{k+1}), где

$$a_{k+1}=\frac{a_{k-1}+3a_k^2}{4}\qquad(k=2, 3, \ldots).$$

Из этих соотношений следуют неравенства

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\geqslant\frac{3}{4}|a_k|-\frac{1}{4\left|\dfrac{a_k}{a_{k-1}}\right|},$$

из которых для любой точки $a=(a_1, a_2)\in E$ сначала при $k=2$ получаем

$$\left|\frac{a_3}{a_2}\right|\geqslant\frac{3}{4}|a_2|-\frac{1}{4\left|\frac{a_2}{a_1}\right|}\geqslant\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3}-\frac{1}{4}=1,$$

затем при $k=3$

$$\left|\frac{a_4}{a_3}\right|\geqslant\frac{3}{4}|a_3|-\frac{1}{4\left|\frac{a_3}{a_2}\right|}\geqslant 1$$

и вообще $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\geqslant 1$ для всех $k=2, 3, \ldots$ Таким образом, итерации $f(A^kz)$ не могут сходиться к точке (0, 0) при $k\to\infty$, и, значит, точка a не может приниматься отображением f.

Множество E, очевидно, имеет полную размерность, и, значит, пример Фату показывает, что *для пары целых функций* (с отличным от нуля якобианом, т. е. функционально независимых) *не имеет места ни аналог теоремы Пикара, ни даже теоремы Сохоцкого.*

В пространстве, как и на плоскости, можно рассматривать *линейные преобразования*

$$w_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}a_\mu^{(\nu)}z_\mu+b_\nu\qquad(\nu=1, \ldots, n),$$

которые можно записывать в виде

$$w=Az+b, \tag{8}$$

где $b=(b_1, \ldots, b_n)$ — вектор, а

$$A=\begin{pmatrix}a_1^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_1^{(n)} & \ldots & a_n^{(n)}\end{pmatrix}$$

— квадратная матрица. Линейное преобразование (8) называется *невырожденным*, если определитель $\det A\neq 0$. Совокупность невырожденных линейных преобразований в $\mathbb{C}^n$, очевидно, составляет *группу автоморфизмов* этого пространства. Однако в пространственном случае, в отличие от плоского, она является лишь подгруппой группы всех голоморфных автоморфизмов (см. пример в начале пункта).

Добавление вектора b геометрически означает сдвиг, а преобразование

$$w=Az, \tag{9}$$

которое на плоскости сводится к растяжению с поворотом, в пространстве имеет несколько более сложный геометрический

характер. Напомним основные свойства таких преобразований [1]).

Пространственным аналогом поворота является *унитарное преобразование*, т. е. преобразование (9), матрица A которого удовлетворяет условиям

$$A_{\mu\nu} = \sum_{j=1}^{n} a_{\mu}^{(j)} \overline{a_{\nu}^{(j)}} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ 1, & \mu = \nu \end{cases} \tag{10}$$

($\mu, \nu = 1, \ldots, n$). Так как из (9) мы имеем

$$|w|^2 = \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{w}_j = \sum_j \left(\sum_{\mu} a_{\mu}^{(j)} z_{\mu} \right) \left(\sum_{\nu} \bar{a}_{\nu}^{(j)} \bar{z}_{\nu} \right) = \sum_{\mu, \nu} A_{\mu\nu} z_{\mu} \bar{z}_{\nu},$$

то (9) в том и только том случае является унитарным, когда оно сохраняет длины векторов (т. е. переводит сферы $\{|z| = R\}$ в себя). Доказывается, что в $\mathbb{C}^n$ существует ортогональный и нормированный базис, в котором унитарное преобразование сводится к повороту в каждой координатной плоскости:

$$z_{\nu} \to e^{i\theta_{\nu}} z_{\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Пространственным аналогом растяжения является *положительно определенное* преобразование. Так называется линейное преобразование (9), для которого

$$(Az, z) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu}^{(\nu)} z_{\mu} \bar{z}_{\nu} \geqslant 0, \qquad a_{\mu}^{(\nu)} = \overline{a_{\nu}^{(\mu)}}, \tag{11}$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и всех $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. Такое преобразование переводит сферы $\{|z| = R\}$ в эллипсоиды, причем в $\mathbb{C}^n$ существует ортогональный и нормированный базис, в котором оно сводится к растяжению в каждой координатной плоскости: $z_{\nu} \to \rho_{\nu} \cdot z_{\nu}$ ($\rho_{\nu} \geqslant 0$, $\nu = 1, \ldots, n$).

Напомним, наконец, что *любое невырожденное линейное преобразование* (9) *можно представить в виде композиции невырожденного положительно определенного и унитарного преобразований* (или, что то же самое, любую матрицу A, $\det A \neq 0$, — в виде произведения положительно определенной матрицы H, для которой $\det H = \det A$, и унитарной матрицы U: $A = HU$). Это представление аналогично разложению плоского преобразования $z \to az$ на растяжение и поворот (или, что то же самое, представлению числа a в полярной форме: $a = \rho e^{i\theta}$).

Невырожденные преобразования (9) образуют группу, которая, очевидно, зависит от n^2 комплексных, т. е. от $2n^2$ действительных, параметров. Унитарные преобразования составляют ее подгруппу, которая зависит от n^2 действительных

[1]) См. И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

параметров (в самом деле, условия (10) содержат $n(n-1)+n=n^2$ действительных равенств). Такую же подгруппу составляют и невырожденные положительно определенные преобразования.

В заключение несколько слов об автоморфизмах компактифицированных комплексных пространств. Как известно, полную группу автоморфизмов замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ составляют невырожденные дробно-линейные преобразования $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$. Для пространства теории функций $\overline{\mathbb{C}}^n$ их аналогом служат преобразования

$$z_\nu \to \frac{a_\nu z_\nu + b_\nu}{c_\nu z_\nu + d_\nu} \qquad (a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu \neq 0,\ \nu = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

а для комплексного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ — невырожденные проективные преобразования

$$z_\nu \to \frac{\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^{(\nu)} z_\mu + b_\nu}{\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^{(n+1)} z_\mu + b_{n+1}} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

(условия невырождения мы не выписываем; условие пропорциональности всех знаменателей формул (13) — мы их берем даже одинаковыми, включая множитель пропорциональности в числители, — необходимо для того, чтобы обратное отображение не содержало квадратичных членов).

50. Автоморфизмы некоторых областей. Начнем с изучения групп автоморфизмов простейших областей в $\mathbb{C}^n$ — шара и поликруга. Мы убедимся в том, что для них и в пространственном случае все автоморфизмы являются дробно-линейными преобразованиями. Таким образом, пространство $\mathbb{C}^n$ при $n>1$ существенно отличается от этих областей — его нельзя рассматривать как шар или поликруг бесконечного радиуса.

а) Ш а р $B=\{z \in \mathbb{C}^n\colon |z|<1\}$. Сначала рассмотрим семейство дробно-линейных (проективных) автоморфизмов. Зададим точку $a=(a_1, \ldots, a_n)$, переходящую при таком автоморфизме в начало, тогда формулы (13) предыдущего пункта (в несколько иных обозначениях) можно переписать так:

$$w_\nu = \frac{\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^{(\nu)} (z_\mu - a_\mu)}{\sum_{\mu=1}^{n} \beta_\mu z_\mu + \gamma} \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Уравнение прообраза сферы $\{|w|=1\}$ при этом отображении имеет вид

$$\sum_{\mu,\,\nu=1}^{n}(A_{\mu\nu}-\beta_\mu\bar\beta_\nu)z_\mu\bar z_\nu-2\operatorname{Re}\sum_{\mu=1}^{n}\Big(\bar\gamma\beta_\mu+\sum_{\nu=1}^{n}A_{\mu\nu}\bar a_\nu\Big)z_\mu=$$

$$=|\gamma|^2-\sum_{\mu,\,\nu=1}^{n}A_{\mu\nu}a_\mu\bar a_\nu, \qquad (2)$$

где $A_{\mu\nu}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_\mu^{(k)}\overline{\alpha_\nu^{(k)}}$. Мы должны рассмотреть такие отображения (1), для которых (2) является уравнением сферы $\{|z|=1\}$. Условиями этого служат

$$A_{\mu\nu}=\beta_\mu\bar\beta_\nu\ (\mu\neq\nu;\ \mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n),$$
$$A_{\mu\mu}-|\beta_\mu|^2=|\gamma|^2-\sum_{i,\,j}A_{ij}a_i\bar a_j\quad(\mu=1,\ \ldots,\ n), \qquad (3)$$
$$\bar\gamma\beta_\mu+\sum_{\nu=1}^{n}A_{\mu\nu}\bar a_\nu=0\quad(\mu=1,\ \ldots,\ n).$$

Подсчитаем число независимых параметров, определяющих рассматриваемые отображения (1). Числитель и знаменатель каждого из уравнений (1) можно разделить на одно и то же число (например, положить в них $\gamma=1$). Поэтому отображение (1) зависит от n^2+2n комплексных, т. е. от $2n^2+4n$ действительных, параметров. Условия (3) содержат $n(n-1)+n+2n=n^2+2n$ действительных равенств (первое и третье из этих условий содержат комплексные, а второе — действительные равенства). Поэтому группа автоморфизмов шара вида (1) зависит от n^2+2n действительных параметров.

Особо отметим подгруппу этой группы, которая состоит из отображений, оставляющих неподвижными центр шара $z=0$. Здесь все $a_\nu=0$, и из уравнений (3) при $\gamma=1$ мы получим, что все $\beta_\mu=0$, а $A_{\mu\nu}$ равны 0 при $\mu\neq\nu$ и равны 1 при $\mu=\nu$. Мы видим, что эта подгруппа состоит из унитарных преобразований

$$w_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu^{(\nu)}z_\mu\qquad(\nu=1,\ \ldots,\ n), \qquad (4)$$

для которых $\sum_k\alpha_\mu^{(k)}\overline{\alpha_\nu^{(k)}}=\delta_{\mu\nu}$. Уравнения (4) содержат $2n^2$ действительных параметров, а условия унитарности накладывают n^2 связей, поэтому рассматриваемая подгруппа зависит от n^2 действительных параметров.

Пример. Выпишем для автоморфизмов единичного шара в $\mathbb{C}^2$ формулы, в которых участвуют лишь независимые пара-

метры. Если по-прежнему обозначить $a=(a_1, a_2)$ точку, переходящую в центр шара, и через $(z, a)=z_1\bar{a}_1+z_2\bar{a}_2$ — скалярное произведение, то при $a\neq 0$ эти формулы будут иметь вид

$$w_1=\frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}}\,\frac{(z, a)-|a|^2+\lambda\sqrt{1-|a|^2}\,(a_2z_1-a_1z_2)}{|a|\,[1-(z, a)]},$$
$$w_2=\frac{e^{i\theta_2}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}}\,\frac{\bar{\lambda}\,[(z, a)-|a|^2]-\sqrt{1-|a|^2}\,(a_2z_1-a_1z_2)}{|a|\,[1-(z, a)]}, \tag{5}$$

где λ — произвольный комплексный, а θ_1, θ_2 — действительные параметры[1]). Группа автоморфизмов (5) зависит от восьми действительных параметров: четырех координат точки a, двух — точки λ и двух значений θ_ν (в соответствии со сделанным выше подсчетом: $n^2+2n=8$ при $n=2$).

Преобразование (5) представляется как композиция двух отображений: дробно-линейного автоморфизма

$$\omega_1=\frac{(z, a)-|a|^2}{|a|\,[1-(z, a)]}, \qquad \omega_2=\sqrt{1-|a|^2}\,\frac{a_2z_1-a_1z_2}{|a|\,[1-(z, a)]}, \tag{6}$$

переводящего точку $z=a$ в центр шара, и унитарного преобразования

$$w_1=\frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}}(\omega_1+\lambda\omega_2), \qquad w_2=\frac{e^{i\theta_2}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}}(\bar{\lambda}\omega_1-\omega_2), \tag{7}$$

сохраняющего центр. Преобразования (7) составляют подгруппу, зависящую от четырех действительных параметров.

Теорема 1. *Любой автоморфизм f: $B\to B$ единичного шара из $\mathbb{C}^n$ является дробно-линейным отображением вида* (1).

◀ Пусть $f(0)=a$; построим дробно-линейный автоморфизм L: $B\to B$ вида (1), переводящий точку a в 0; тогда композиция $F=L\circ f$ будет автоморфизмом шара, сохраняющим его центр. Если он дробно-линеен, то $f=L^{-1}\circ F$ — также; поэтому достаточно доказать теорему для автоморфизмов, сохраняющих центр.

Пусть f: $B\to B$, $f(0)=0$, — такой автоморфизм. К нему и к его обратному f^{-1} можно применить лемму Шварца из п. 48 (см. следствие на стр. 540), и мы получим, что для всех $z\in B$ одновременно $|f(z)|\leqslant|z|$ и $|z|\leqslant|f(z)|$. Поэтому всюду в B мы имеем $|f(z)|\equiv|z|$. Отсюда выведем сейчас, что f является линейным унитарным преобразованием вида (4).

---

[1]) То, что (5) при любом $a\in B^2\setminus\{0\}$ и любом $\lambda\in\mathbb{C}$ осуществляют автоморфизм B^2, проверяется простой выкладкой.

Пусть компоненты f в окрестности начала представляются рядами

$$f_\nu(z) = \sum_{|k| \geqslant 0} a_k^{(\nu)} z^k \qquad (\nu = 1, \ldots, n); \tag{8}$$

в силу их абсолютной сходимости

$$\Phi = |f|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)\,\overline{f_\nu(z)} = \sum_{k,\,l} A_{kl} z^k \bar{z}^l,$$

где

$$A_{kl} = \sum_{\nu=1}^{n} a_k^{(\nu)} \overline{a_l^{(\nu)}}, \tag{9}$$

а $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — векторы с целыми неотрицательными координатами. Полагая $z_\nu = r_\nu e^{it_\nu}$ и $r = (r_1, \ldots, r_n)$, мы будем иметь

$$\Phi = \sum_{k,\,l} A_{kl} r^{k+l} e^{i\,[(k_1-l_1)\,t_1+\ldots+(k_n-l_n)\,t_n]}.$$

Введем новый векторный индекс $m = k - l$ и перегруппируем последний ряд, записав его в виде

$$\Phi = \sum_{|m|=-\infty}^{\infty} B_m(r)\, e^{i\,(m_1 t_1 + \cdots + m_n t_n)}, \tag{10}$$

где

$$B_m(r) = \sum_{l} A_{l+m,\,l} r^{2l+m} \tag{11}$$

и суммирование распространяется на все l, для которых $l_\nu \geqslant 0$ и $l_\nu + m_\nu \geqslant 0$. Мы можем рассматривать (10) как кратный ряд Фурье, а так как его сумма $\Phi = |z|^2$ не зависит от t, то по теореме единственности разложения в ряд Фурье все $B_m = 0$ при $m \neq 0$, а

$$B_0(r) = \sum_{|l| \geqslant 0} A_{l,\,l} r^{2l} = r_1^2 + \ldots + r_n^2. \tag{12}$$

Но рассматривая (11) и (12) как степенные ряды относительно действительного переменного $r = (r_1, \ldots, r_n)$, мы получим в силу единственности разложения в такие ряды, во-первых, что $A_{k,\,l} = 0$ при $k \neq l$ и, во-вторых, что $A_{l,\,l} = 0$ при $l = 0$ и $|l| > 1$. Теперь из (9) видно, что $a_k^{(\nu)} = 0$ при $k = 0$ и $|k| > 1$, т. е. что f — линейное, а значит, унитарное преобразование ▶

Непосредственным следствием доказанного и сделанных выше подсчетов является

Теорема 2. *Группа всех автоморфизмов шара $B \subset \mathbb{C}^n$ зависит от $n^2 + 2n$ действительных параметров, а подгруппа*

автоморфизмов, сохраняющих центр шара, — от n^2 действительных параметров.

б) Поликруг $U=\{z\in\mathbb{C}^n\colon |z_\nu|<1\}$. Подгруппу автоморфизмов этого поликруга, зависящую от $3n$ действительных параметров, составляют, очевидно, дробно-линейные преобразования

$$w_\nu = e^{i\theta_\nu}\frac{z_\nu - a_\nu}{1-\bar{a}_\nu z_\nu} \qquad (\nu=1,\ \ldots,\ n), \tag{13}$$

где a_ν, $|a_\nu|<1$, — комплексные, а θ_ν — действительные числа. При $n>1$ к этим преобразованиям можно добавить еще те, которые получаются из них дополнительной перестановкой переменных $w_\nu \to w_\mu$, где $\mu=\mu(\nu)$ — взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя.

Теорема 3. *Любой автоморфизм поликруга $U\subset\mathbb{C}^n$ имеет вид* (13) *или получается из* (13) *перестановкой переменных $w_\nu \to w_\mu$. Таким образом, полная группа всех автоморфизмов поликруга расслаивается на $n!$ классов, зависящих от $3n$ действительных параметров*[1]).

◀ Пусть f — автоморфизм U. Мы можем считать, что $f(0)=0$, так как f можно заменить преобразованием $L\circ f$, где L — дробно-линейный автоморфизм U вида (13), переводящий $f(0)$ в 0. При фиксированном $\zeta\in\partial U$ рассмотрим функцию $f_\nu(t\zeta)$ комплексного переменного t, $|t|<1$; по лемме Шварца (п. 35 ч. I) мы получаем, что $|f_\nu(t\zeta)|\leqslant|t|$, $1\leqslant\nu\leqslant n$. Так как любую точку $z\in U$ можно представить в виде $z=\max\limits_\mu|z_\mu|\cdot\zeta$, где $\zeta\in\partial U$, то имеет место неравенство

$$\max_\nu|f_\nu(z)|\leqslant\max_\nu|z_\nu|,$$

которое обобщает неравенство Шварца. Так как f^{-1} — тоже автоморфизм U, то мы получаем, что в U

$$\max_\nu|f_\nu(z)|=\max_\nu|z_\nu|. \tag{14}$$

Пусть $l^{(\nu)}$ — плоскость вида $\sum a_\mu z_\mu=0$, на которой $|z_\nu|=\max\limits_\mu|z_\mu|$. Применяя лемму Шварца на этой плоскости к функциям f_μ, мы получаем из равенства (14), что хотя бы одна из них совпадает на $l^{(\nu)}$ с функцией $e^{i\theta}z_\nu$ для некоторого $\theta\in\mathbb{R}$. Так как число индексов μ конечное, а плоскостей $l^{(\nu)}$ — континуум, то по теореме единственности мы получаем,

[1]) Среди этих классов лишь один будет группой — тот, который содержит тождественное отображение, т. е. класс (13).

с точностью до перестановки переменных, что $f_\nu(z) = \alpha_\nu z_\nu$, где $\alpha_\nu \in \mathbb{C}$, $|\alpha_\nu| = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ ▶

Эта теорема и замечание, сделанное в самом начале параграфа, приводят к такому заключению:

Следствие. *В $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ поликруг и шар голоморфно не эквивалентны друг другу.*

§ 17. Инвариантная метрика

В этом последнем параграфе мы рассмотрим основные вопросы, связанные с так называемой кернфункцией, которая была введена С. Бергманом и оказалась весьма полезной в ряде задач теории функций.

51. Кернфункция. Рассмотрим произвольную область $D \subset \mathbb{C}^n$ и обозначим через $L_h^2 = L_h^2(D)$ совокупность всех функций $f \in H(D)$, для которых конечна *норма*

$$\|f\| = \|f\|_D = \left\{ \int\limits_D |f|^2 dV \right\}^{1/2}, \tag{1}$$

где dV — элемент объема в $\mathbb{C}^n$ и интеграл понимается как несобственный.

Совокупность $L_h^2(D)$ образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_D f\bar{g}\, dV. \tag{2}$$

Из неравенства Буняковского — Шварца $|(f, g)|^2 \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ следует, что это произведение конечно для всех $f, g \in L_h^2$. Из этого же неравенства обычным образом получается неравенство треугольника: для всех $f, g \in L_h^2$

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \tag{3}$$

причем знак равенства здесь достигается лишь в том случае, когда либо $f = 0$, либо $g = \alpha f$, где $\alpha \geqslant 0$.

Отметим еще локальную оценку $|f|$ через норму этой функции в L_h^2: если поликруг $U(z^0, r) \Subset D$, то для любой $f \in L_h^2(D)$

$$|f(z^0)| \leqslant \frac{1}{\pi^{n/2} r_1 \ldots r_n} \|f\|_U. \tag{4}$$

Для доказательства подставим в $\|f\|_U^2$ тейлоровское разложение f с центром z^0 и проинтегрируем почленно, вводя

в каждой плоскости z_ν полярные координаты $\left(z_\nu - z_\nu^0 = \rho_\nu e^{i\theta_\nu}\right)$:

$$\|f\|_U^2 = \int\limits_U \sum_{|j|\geqslant 0} c_j (z-z^0)^j \sum_{|k|\geqslant 0} \bar{c}_k (\bar{z}-\bar{z}^0)^k \, dV =$$

$$= \sum_{|j|,\,|k|\geqslant 0} c_j \bar{c}_k \prod_{\nu=1}^{n} \int_0^{2\pi} e^{i(j_\nu - k_\nu)\theta_\nu} \, d\theta_\nu \int_0^{r_\nu} \rho_\nu^{j_\nu + k_\nu + 1} \, d\rho_\nu =$$

$$= (2\pi)^n \sum_{|k|\geqslant 0} |c_k|^2 \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu^{2k_\nu+2}}{2k_\nu+2};$$

так как члены полученного ряда неотрицательны, то

$$\|f\|_U^2 \geqslant \pi^n |c_0|^2 \prod_{\nu=1}^{n} r_\nu^2 = \pi^n |f(z^0)|^2 r_1^2 \ldots r_n^2.$$

Фиксируем точку $z^0 \in D$ и поставим следующую вариационную задачу:

Среди всех функций $f \in L_h^2(D)$, нормированных условием $f(z^0) = 1$, найти ту, которая реализует минимум $\|f\|$.

Мы обозначим

$$B_{z^0} = B_{z^0}(D) = \{f \in L_h^2(D):\ f(z^0) = 1\}.$$

Теорема 1. *Если класс $B_{z^0}(D)$ непуст, то в нем существует единственная функция f_0, решающая поставленную задачу.*

◀ а) Существование. Пусть

$$A = \inf_{f \in B_{z^0}} \|f\|_D^2$$

(по условию эта величина конечна) и f_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ — минимизирующая последовательность, т. е. такая последовательность $f_\mu \in B_{z^0}$, что $\lim\limits_{\mu\to\infty} \|f_\mu\|^2 = A$. Так как $\{\|f_\mu\|\}$ ограничена, то в силу оценки (4) семейство функций локально равномерно ограничено в каждой точке $z \in D$. По теореме Монтеля (см. п. 37 ч. I; доказательство этой теоремы без труда переносится на функции нескольких переменных) отсюда следует, что это семейство компактно, т. е. из него можно выделить последовательность f_{μ_k}, сходящуюся равномерно в каждой $G \Subset D$ к функции f_0. Очевидно, $f_0 \in B_{z^0}$ и

$$\|f_0\|_G^2 = \lim_{k\to\infty} \|f_{\mu_k}\|_G^2 \leqslant \lim_{k\to\infty} \|f_{\mu_k}\|_D^2 \leqslant A,$$

а следовательно, и $\|f_0\|_D^2 \leqslant A$. Так как $f_0 \in B_{z^0}$, то отсюда следует, что $\|f_0\|^2 = A$.

б) Единственность. Пусть есть еще функция $g_0 \in B_{z^0}$, для которой $\|g_0\|^2 = A$. Тогда так как $\frac{f_0+g_0}{2} \in B_{z^0}$, то

$$\sqrt{A} \leqslant \left\| \frac{f_0+g_0}{2} \right\| \leqslant \frac{\|f_0\|}{2} + \frac{\|g_0\|}{2} = \sqrt{A},$$

— мы воспользовались неравенством треугольника. Так как в этом неравенстве имеет место знак равенства и $f_0 \not\equiv 0$, то $g_0 = \alpha f_0$, где $\alpha \geqslant 0$. Поэтому

$$\sqrt{A} = \left\| \frac{f_0+g_0}{2} \right\| = \frac{1+\alpha}{2}\|f_0\| = \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{A},$$

значит, $\alpha = 1$ и $g_0 = f_0$ ▶

Мы будем называть f_0 из теоремы 1 *экстремальной функцией* и обозначим

$$K(z^0) = \frac{1}{\|f_0\|_D^2}. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь в области D произвольную полную ортонормальную систему функций $\varphi_\mu \in L_h^2(D)$, $\mu = 1, 2, \ldots$ Под ортонормальностью понимается свойство $(\varphi_\mu, \varphi_\nu) = \delta_{\mu\nu}$, где $\delta_{\mu\nu} = 1$ при $\mu = \nu$ и $\delta_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$, а полнота означает, что любая функция $f \in L_h^2(D)$ представляется рядом

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varphi_\mu(z), \tag{6}$$

где $a_\mu = (f, \varphi_\mu)$, сходящимся к f в среднем, т. е. в смысле нормы (1). Заметим, что в нашем случае из оценки (4) вытекает и равномерная сходимость ряда (6) в каждой $G \Subset D$. Напомним еще, что условие полноты ортонормальной системы выражается *равенством Парсеваля*:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |a_\mu|^2 = \|f\|_D^2, \tag{7}$$

где $a_\mu = (f, \varphi_\mu)$.

Обычным для анализа образом доказывается, что в каждой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$ полные ортонормальные системы из $L_h^2(D)$ существуют, в неограниченных областях такие системы могут не существовать (например, их не существует в $\mathbb{C}^n$). Поэтому в дальнейшем области, где существуют такие системы, мы будем называть *областями ограниченного вида.*

Лемма. *Для любой ортонормальной системы* $\varphi_\mu \in L_h^2(D)$ *ряд* $\sum_{\mu=1}^{\infty} |\varphi_\mu(z^0)|^2$ *сходится в любой точке* $z^0 \in D$.

◀ Пусть $U(z^0, r) \Subset D$ и m — любое натуральное число; пользуясь ортонормальностью и неравенством (4), находим

$$\sum_{\mu=1}^{m} |\varphi_\mu(z^0)|^2 = \int_D \left| \sum_{\mu=1}^{m} \overline{\varphi_\mu(z^0)}\, \varphi_\mu(z) \right|^2 dV \geqslant \int_U \left| \sum_{\mu=1}^{m} \overline{\varphi_\mu(z^0)}\, \varphi_\mu(z) \right|^2 dV \geqslant$$

$$\geqslant \pi^n r_1^2 \dots r_n^2 \left(\sum_{\mu=1}^{m} |\varphi_\mu(z^0)|^2 \right)^2,$$

откуда

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |\varphi_\mu(z^0)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^n r_1^2 \dots r_n^2} \quad \blacktriangleright$$

Теорема 2. *В любой полной ортонормальной системе* $\varphi_\mu \in L_h^2(D)$ *экстремальная функция* f_0 *представляется рядом*

$$f_0(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\overline{\varphi_\mu(z^0)}}{K(z^0)} \varphi_\mu(z). \tag{8}$$

◀ Обозначим $\varphi_\mu(z^0) = \varphi_\mu^0$ и $\sum_{\mu=1}^{\infty} |\varphi_\mu^0|^2 = \sigma$ (по лемме этот ряд сходится). Пусть f — произвольная функция из $B_{z^0}(D)$ и $f(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varphi_\mu(z)$ — ее разложение. Определим числа α_μ равенствами

$$a_\mu = \frac{\bar{\varphi}_\mu^0 + \alpha_\mu}{\sigma} \qquad (\mu = 1, 2, \dots)$$

и заметим, что условие $f(z^0) = \frac{1}{\sigma} \sum_{\mu=1}^{\infty} (\bar{\varphi}_\mu^0 + \alpha_\mu) \varphi_\mu^0 = 1$ влечет за собой соотношение $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varphi_\mu^0 = 0$. С учетом этого соотношения равенство Парсеваля (7) примет вид

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} (\bar{\varphi}_\mu^0 + \alpha_\mu)(\varphi_\mu^0 + \bar{\alpha}_\mu) = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} |\alpha_\mu|^2.$$

Отсюда видно, что минимально возможное значение $\|f\|^2$ в классе B_{z^0}, равное $\frac{1}{\sigma}$, получится в том и только том случае, когда все $\alpha_\mu = 0$. Таким образом, при $f = f_0$ мы имеем

$$f_0(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\overline{\varphi_\mu^0}}{\sigma} \varphi_\mu(z),$$

где $\frac{1}{\sigma} = \|f_0\|^2 = \frac{1}{K(z^0)}$; это совпадает с (8) ▶

Определение. Функция

$$K_D(z, z^0) = f_0(z)\, K(z^0) = \frac{f_0(z)}{\|f_0\|^2}, \tag{9}$$

где f_0 — экстремальная функция, называется *кернфункцией* области D относительно точки $z^0 \in D$.

Следствие. *В любой области $D \subset \mathbb{C}^n$ ограниченного вида кернфункция $K(z, z^0)$ относительно любой точки $z^0 \in D$ существует.*

Из теоремы 2 видно, что в любой полной ортонормальной системе $\varphi_\mu \in L_h^2(D)$ кернфункция представляется разложением

$$K(z, \zeta) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(z)\, \overline{\varphi_\mu(\zeta)} \tag{10}$$

(мы положили $z^0 = \zeta$). Так как это разложение (при фиксированной $\zeta \in D$) сходится равномерно в любой $G \Subset D$ и $\varphi_\mu(z) \in H(D)$, то по теореме Вейерштрасса *кернфункция голоморфна в D относительно своей первой координаты z*. Из соотношения

$$K(z, \zeta) = \overline{K(\zeta, z)}, \tag{11}$$

которое вытекает из (10), видно также, что она *антиголоморфна в D относительно второй координаты ζ*.

Кернфункция обладает интересным воспроизводящим свойством: для любой $f \in L_h^2(D)$ и любой точки $z \in D$

$$f(z) = \int_D f(\zeta)\, K(z, \zeta)\, dV. \tag{12}$$

Для доказательства достаточно подставить в правую часть разложения f и K по произвольной полной ортонормальной системе $\varphi_\mu \in L_h^2(D)$ и, пользуясь равномерной и абсолютной [1])

---

[1]) Абсолютная сходимость рядов по системам φ_μ следует из неравенства Коши — Буняковского $\sum |a_\mu \varphi_\mu| \leqslant \sqrt{\sum |a_\mu|^2}\, \sqrt{\sum |\varphi_\mu|^2}$, равенства (7) и леммы на стр. 554.

сходимостью разложений в любой $G \Subset D$, проинтегрировать почленно; учитывая еще ортонормальность системы, мы получим

$$\int_D f(\zeta) K(z, \zeta)\, dV = \sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} a_\mu \varphi_\nu(z) \int_D \varphi_\mu(\zeta) \overline{\varphi_\nu(\zeta)}\, dV = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varphi_\mu(z) = f(z).$$

Формула (10) позволяет явно вычислять кернфункцию простейших областей. Приведем несколько примеров.

а) Поликруг $U = \{|z_\nu| < r_\nu\}$. Полной ортонормальной системой здесь будет система нормированных мономов

$$\varphi_k = \lambda_k z^k = \lambda_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \qquad k_\nu \geqslant 0, \tag{13}$$

где коэффициенты $\lambda_k > 0$ выбираются из условия

$$(\varphi_k, \varphi_k) = \lambda_k^2 \int_U z^k \bar{z}^k\, dV = 1.$$

Вводя в каждой плоскости z_ν полярные координаты $(z_\nu = \rho e^{i\theta_\nu})$, находим из этого условия

$$1 = (2\pi)^n \lambda_k^2 \prod_{\nu=1}^{n} \int_0^{r_\nu} \rho_\nu^{2k_\nu+1}\, d\rho_\nu = \pi^n \lambda_k^2 \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu^{2(k_\nu+1)}}{k_\nu + 1},$$

или

$$\lambda_k^2 = \frac{1}{\pi^n} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{k_\nu + 1}{r_\nu^{2\,2k_\nu}}.$$

Полнота системы (13) следует из того, что рядом по этой системе является ряд Тейлора, а им представляется любая функция $f \in H(U)$; ортонормальность ее очевидна. По формуле (10) имеем, следовательно,

$$K(z, \zeta) = \sum_{|k| \geqslant 0} \lambda_k^2 z^k \bar{\zeta}^k = \frac{1}{\pi^n r_1^2 \dots r_n^2} \sum_{|k| \geqslant 0} \prod_{\nu=1}^{n} (k_\nu + 1) \left(\frac{z_\nu \bar{\zeta}_\nu}{r_\nu^2}\right)^{k_\nu}.$$

Положим $x_\nu = \dfrac{z_\nu \bar{\zeta}_\nu}{r_\nu^2}$ и $r^2 = r_1^2 \dots r_n^2$, тогда

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\pi^n r^2} \sum_{|k| \geqslant 1} \prod_{\nu=1}^{n} k_\nu x_\nu^{k_\nu - 1} = \frac{1}{\pi^n r^2} \sum_{|k| \geqslant 1} \frac{\partial}{\partial x_1} x_1^{k_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} x_n^{k_n}.$$

Так как у нас $z, \zeta \in U$, то $|x_\nu|<1$, и можно переставить порядок суммирования и дифференцирования; мы получим

$$K(z,\zeta)=\frac{1}{\pi^n r^2}\frac{\partial^n}{\partial x_1\dots\partial x_n}\sum_{|k|\geqslant 1} x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}=$$

$$=\frac{1}{\pi^n r^2}\frac{\partial^n}{\partial x_1\dots\partial x_n}\frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_n)}=\frac{1}{\pi^n r^2}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu)^2}.$$

Подставляя значения x_ν и r^2, находим окончательно

$$K_U(z,\zeta)=\frac{1}{\pi^n}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{r_\nu^2}{\left(r_\nu^2-z_\nu\bar{\zeta}_\nu\right)^2}. \tag{14}$$

б) Ш а р $B=\{|z|<R\}$. Полной ортонормальной системой здесь опять будет система мономов (13), но условия нормировки дадут

$$\lambda_k^2=\frac{(|k|+n)!}{k!\,\pi^n R^{2(|k|+n)}}$$

(для вычисления интеграла по B надо ввести полярные координаты в $\mathbb{R}^{2n}$). По формуле (10) получим

$$K(z,\zeta)=\frac{1}{\pi^n R^{2n}}\sum_{|k|\geqslant 0}\frac{(|k|+n)!}{k!\,R^{2|k|}}z^k\bar{\zeta}^k=$$

$$=\frac{1}{\pi^n R^{2n}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(\mu+1)\dots(\mu+n)}{R^{2\mu}}\sum_{|k|=\mu}\frac{\mu!}{k!}z^k\bar{\zeta}^k.$$

Теперь заметим, что внутренняя сумма

$$\sum_{|k|=\mu}\frac{\mu!}{k_1!\dots k_n!}(z_1\bar{\zeta}_1)^{k_1}\dots(z_n\bar{\zeta}_n)^{k_n}=\left(\sum_{\nu=1}^{n}z_\nu\bar{\zeta}_\nu\right)^\mu$$

и что

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+1)\dots(\mu+n)\,x^\mu=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{1}{1-x}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

для всех x, $|x|<1$. Так как у нас $z, \zeta\in B$, то $\frac{1}{R^2}\sum_{\nu=1}^{n}z_\nu\bar{\zeta}_\nu=x$ по модулю меньше 1 и, следовательно,

$$K_B(z,\zeta)=\frac{1}{\pi^n R^{2n}}\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}=\frac{n!R^2}{\pi^n\left(R^2-\sum_{\nu=1}^{n}z_\nu\bar{\zeta}_\nu\right)^{n+1}}. \tag{15}$$

Замечание. Формула (14) показывает, что кернфункция поликруга U, который является произведением кругов $\{|z_\nu|<r_\nu\}$, равна произведению кернфункций этих кругов: $K(z_\nu, \zeta_\nu)=\frac{r_\nu^2}{\pi(r_\nu^2-z_\nu\bar{\xi}_\nu)^2}$. Можно доказать, что и вообще кернфункция произведения областей $D_1\subset\mathbb{C}^n(z)$ и $D_2\subset\mathbb{C}^m(w)$ равна произведению кернфункций этих областей:

$$K_{D_1\times D_2}(z, w; \zeta, \omega)=K_{D_1}(z, \zeta)K_{D_2}(w, \omega)$$

(см. Б. А. Фукс[1]), стр. 91).

Особо выделяется кернфункция

$$K(z)=K(z, z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}|\varphi_\mu(z)|^2, \tag{16}$$

которая, как следует из (9), положительна в каждой точке области ограниченного вида, ибо она является обратной величиной минимума $\|f\|^2$ в классе всех функций $f\in L_h^2(D)$, для которых $f(z)=1$.

Очевидно, можно не накладывать условия $f(z)=1$, и тогда будет

$$\frac{1}{K(z)}=\inf_{f\in L_h^2}\frac{\|f\|^2}{|f(z)|^2}.$$

Поэтому для любой $f\in L_h^2$ мы имеем

$$|f(z)|^2\leqslant K(z)\|f\|^2, \tag{17}$$

а так как нижняя грань достигается, то существует функция $f_0\in L_h^2$, для которой

$$|f_0(z)|^2=K(z)\|f_0\|^2; \tag{18}$$

эта функция также называется *экстремальной*.

Теорема 3. *В любой области ограниченного вида функция $K(z)$ является плюрисубгармонической.*

◀ Так как $\varphi_\mu\in H(D)$, то $|\varphi_\mu|^2$ плюрисубгармоничны в D (см. задачу 24 к гл. III). Но по доказанному выше ряд (16) сходится равномерно в любой $G\Subset D$, следовательно, его сумма также плюрисубгармонична ▶

В следующем пункте мы убедимся в том, что она и строго плюрисубгармонична. По теореме 2 п. 25 из этого вытекает, что если для некоторого $t>0$ множество $D_t=\{z\in D: K(z)<t\}$

[1]) Б. А. Фукс, Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1963.

компактно принадлежит D, то каждая связная компонента этого множества является областью голоморфности. Отсюда, как и в п. 25, выводится

Теорема 4. *Если D — область ограниченного вида и для каждого $t>0$ множество $\{z \in D: K(z)<t\} \Subset D$, то D является областью голоморфности.*

Заметим, что в силу субгармоничности функция K не может достигать максимума во внутренней точке области. Условие теоремы 4 состоит в том, что кернфункция $K(z)$ равномерно стремится к бесконечности при приближении к границе области D; теорема утверждает, что это условие достаточно для того, чтобы D была областью голоморфности.

Отметим, наконец, что, как видно из формулы (15), для шара функция

$$K_B(z) = \frac{n!\,R^2}{\pi^n (R^2 - |z|^2)^{n+1}} \tag{19}$$

растет при приближении к любой точке границы с одинаковой скоростью $\frac{1}{d^{n+1}}$, где d — расстояние до границы. Из формулы (14) мы видим, что для поликруга, напротив, функция

$$K_U(z) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu^2}{(r_\nu^2 - |z_\nu|^2)^2} \tag{20}$$

растет по-разному при приближении к различным точкам ∂U. Быстрее всего $\left(\text{со скоростью } \frac{1}{d^{2n}}\right)$ она растет при приближении к остову, который является границей Шилова поликруга.

52. Метрика Бергмана. При помощи кернфункции можно ввести риманову метрику, инвариантную относительно голоморфных гомеоморфизмов (голоморфизмов). Выясним сначала, как меняется при таких отображениях сама кернфункция. Пусть

$$w = f(z),\ f = (f_1, \ldots, f_n) \tag{1}$$

— голоморфизм области $D \subset \mathbb{C}^n$ на область D^*. По доказанному в п. 44 якобиан этого отображения

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (z_1, \ldots, z_n)} = f'(z) = \frac{dw}{dz} \tag{2}$$

(мы будем для сокращения письма пользоваться этими обозначениями) нигде в D не обращается в нуль, а якобиан обратного отображения $z = f^{-1}(w)$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (w_1, \ldots, w_n)}$$

равен обратной величине $\frac{dw}{dz}$. Напомним еще, что при замене переменных $z \to w$ действительный якобиан (отношение элементов объема)

$$\frac{dV^*}{dV} = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2. \tag{3}$$

Теорема 1. *При голоморфизме f области D ограниченного вида на D^* ядерные функции этих областей в соответствующих точках $w = f(z)$ и $\omega = f(\zeta)$ связаны соотношением*

$$K_{D^*}(w, \omega) = K_D(z, \zeta)\frac{dz}{dw}\overline{\left(\frac{d\zeta}{d\omega}\right)}. \tag{4}$$

◀ Пусть $\varphi_\mu \in L_h^2(D)$ — произвольная полная ортонормальная система, тогда

$$\psi_\mu(w) = \varphi_\mu \circ f^{-1}(w)\frac{dz}{dw}$$

будет такой же системой для области D^*. В самом деле,

$$\int\limits_{D^*} |\psi_\mu|^2 dV^* = \int\limits_{D^*} |\varphi_\mu \circ f^{-1}| \cdot \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 dV^* = \int\limits_D |\varphi_\mu|^2 dV < \infty,$$

следовательно, $\psi_\mu \in L_h^2(D^*)$; система ортонормальна, ибо

$$(\psi_\mu, \psi_\nu) = \int\limits_{D^*} \varphi_\mu \circ f^{-1}\frac{dz}{dw}\overline{\varphi_\nu \circ f^{-1}}\,\overline{\frac{dz}{dw}}\,dV^* = \int\limits_D \varphi_\mu \bar{\varphi}_\nu\, dV,$$

и полна, ибо каждая $\psi \in L_h^2(D^*)$ представляется в виде $\varphi \circ f^{-1}\frac{dz}{dw}$, где $\varphi = \psi \circ f\frac{dw}{dz} \in L_h^2(D)$, а умножая разложение $\varphi = \sum a_\mu \varphi_\mu$ на $\frac{dz}{dw}$, мы получим $\psi = \sum a_\mu \psi_\mu$. Поэтому по формуле (10) предыдущего пункта мы получаем

$$K_{D^*}(w, \omega) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \psi_\mu(w)\overline{\psi_\mu(\omega)} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(z)\frac{dz}{dw}\overline{\varphi_\mu(\zeta)\frac{d\zeta}{d\omega}} =$$

$$= K_D(z, \zeta)\frac{dz}{dw}\overline{\left(\frac{d\zeta}{d\omega}\right)} \blacktriangleright$$

Из формулы (4), в частности, следует, что

$$K_{D^*}(w) = K_D(z)|f'(z)|^2, \tag{5}$$

где $K(z) = K(z, z) > 0$ — обратная величина $\inf \frac{\|\varphi\|^2}{|\varphi(z)|^2}$ по всем функциям $\varphi \in L_h^2(D)$ (см. предыдущий пункт). Отсюда

$$\ln K^*(w) = \ln K(z) + \ln f'(z) + \ln \overline{f'(z)},$$

где $K^*(w)=K_{D^*}(w)$, и дифференцирование с учетом голоморфности f' дает

$$\frac{\partial^2 \ln K^*}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\frac{\partial z_\alpha}{\partial w_\mu}\frac{\partial \bar{z}_\beta}{\partial \bar{w}_\nu}. \tag{6}$$

Формула (6) показывает, что величины

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \tag{7}$$

при голоморфизмах меняются по тензорному закону изменения дифференциальных форм бистепени (1, 1) (см. п. 10).

Определение. Дифференциальная форма

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\,dz_\alpha\,d\bar{z}_\beta, \tag{8}$$

где коэффициенты вычисляются через кернфункцию области D по формулам (7), называется *формой Бергмана* для этой области[1]). Эта форма инвариантна относительно голоморфизмов области D.

Теорема 2. *В любой области $D\subset\mathbb{C}^n$ ограниченного вида форма Бергмана* (8) *является эрмитовой и положительно определенной.*

◀ Эрмитовость формы выражается равенствами $g_{\alpha\beta}=\bar{g}_{\beta\alpha}$, которые вытекают непосредственно из (7), если учесть, что $K(z)>0$.

Положительная определенность означает, что для любого вектора $\omega\in\mathbb{C}^n$, $\omega\neq 0$, в любой точке $z\in D$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\omega_\alpha\bar{\omega}_\beta>0. \tag{9}$$

Для доказательства этого неравенства мы фиксируем $\omega\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$, $z\in D$, рассмотрим множество

$$\mathscr{E}=\left\{\varphi\in L_h^2(D):\ \varphi(z)=0,\ \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_\alpha}\omega_\alpha=1\right\}$$

и покажем, что

$$\min_{\varphi\in\mathscr{E}}\|\varphi\|^2=\frac{1}{K\sum\limits_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\omega_\alpha\bar{\omega}_\beta}, \tag{10}$$

где K и $g_{\alpha\beta}$ вычисляются в точке z.

[1]) В выражении формы Бергмана мы рассматриваем не внешние, а обычные произведения дифференциалов.

Выберем в D какую-либо полную ортонормальную систему $\{\varphi_\mu\}$, и пусть $\varphi = \sum a_\mu \varphi_\mu$. Тогда вариационная задача (10) сведется к отысканию $\min \sum |a_\mu|^2$ при условиях

$$\sum a_\mu \varphi_\mu = 0, \quad \sum a_\mu \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\alpha} \omega_\alpha = 1 \tag{11}$$

(значения φ_μ и их производных берутся в точке z; пределы суммирования по μ мы опускаем). Задача имеет единственное решение (это доказывается, как теорема 1 из предыдущего пункта), и для его отыскания мы воспользуемся методом множителей Лагранжа. Возьмем вспомогательную функцию

$$\Phi(a) = \sum a_\mu \bar{a}_\mu - \lambda_1 \sum a_\mu \varphi_\mu - \lambda_2 \sum a_\mu \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\alpha} \omega_\alpha$$

и заметим, что условия ее экстремума имеют вид [1])

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_\mu} = \bar{a}_\mu - \lambda_1 \varphi_\mu - \lambda_2 \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\alpha} \omega_\alpha = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Отсюда следует с учетом (11), что для экстремальных значений a_μ

$$\sum a_\mu \bar{a}_\mu = \lambda_1 \sum a_\mu \varphi_\mu + \lambda_2 \sum a_\mu \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\alpha} \omega_\alpha = \lambda_2.$$

Чтобы найти λ_2, мы подставим значение a_μ из (12) в условия (11):

$$\lambda_1 \sum \varphi_\mu \bar{\varphi}_\mu + \lambda_2 \sum \sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\alpha} \bar{\varphi}_\mu \omega_\alpha = 0,$$

$$\lambda_1 \sum \sum_\beta \varphi_\mu \frac{\partial \bar{\varphi}_\mu}{\partial \bar{z}_\beta} \bar{\omega}_\beta + \lambda_2 \sum \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \bar{\varphi}_\mu}{\partial \bar{z}_\beta} \omega_\alpha \bar{\omega}_\beta = 1.$$

Коэффициенты этой системы выражаются через $K = \sum \varphi_\mu \bar{\varphi}_\mu$ и ее производные; решая ее, мы найдем

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sum\limits_{\alpha,\beta} \left(\dfrac{\partial^2 K}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} - \dfrac{1}{K} \dfrac{\partial K}{\partial z_\alpha} \dfrac{\partial K}{\partial \bar{z}_\beta} \right) \omega_\alpha \bar{\omega}_\beta}.$$

[1]) Для доказательства нужно подставить $a_\mu = \alpha_\mu + i\beta_\mu$, разделить действительные и мнимые части условий (11) и приравнять производные по α_μ и β_μ соответствующей вспомогательной функции; (12) выражают комплексную запись этого.

Остается заметить, что

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_\alpha\,\partial\bar z_\beta}=\frac{1}{K}\frac{\partial^2 K}{\partial z_\alpha\,\partial\bar z_\beta}-\frac{1}{K^2}\frac{\partial K}{\partial z_\alpha}\frac{\partial K}{\partial\bar z_\beta},$$

и поэтому λ_2 совпадает с правой частью (10) ▶

Замечание. Положительная определенность формы Бергмана, выражаемая неравенством (9), означает (строгую) плюрисубгармоничность функции $\ln K$ (см. п. 25). Этот результат сильнее теоремы 3 предыдущего пункта, ибо из плюрисубгармоничности логарифма функции следует плюрисубгармоничность самой функции, а обратное неверно.

На основании теоремы 2 в каждой области $D\subset\mathbb{C}^n$ ограниченного вида можно ввести риманову метрику

$$ds^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\,dz_\alpha\,d\bar z_\beta, \tag{13}$$

по доказанному выше инвариантную относительно голоморфизмов. Эта метрика называется *метрикой Бергмана.*

Примеры. Для поликруга $U=\{|z_\nu|<r_\nu\}$ по формуле (14) предыдущего пункта метрика Бергмана определяется формулой

$$ds^2=2\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{r_\alpha^2}{\left(r_\alpha^2-|z_\alpha|^2\right)^2}\,dz_\alpha\,d\bar z_\alpha, \tag{14}$$

где $dz_\alpha\,d\bar z_\alpha=dx_\alpha^2+dy_\alpha^2=|dz_\alpha|^2$. При $n=1$ в круге $\{|z|<r\}$ получаем так называемую *гиперболическую метрику*

$$ds^2=\frac{2r^2}{(r^2-|z|^2)^2}\,|dz|^2.$$

Эта метрика инвариантна относительно конформных отображений и, в частности, не меняет своего вида при конформных автоморфизмах круга, т. е. дробно-линейных преобразованиях $w=e^{i\theta}\dfrac{r^2(z-a)}{r^2-\bar a z}$: имеем

$$\frac{|dz|}{r^2-|z|^2}=\frac{|dw|}{r^2-|w|^2}.$$

Геометрия, определяемая этой метрикой, является геометрией Лобачевского; движениями в ней служат дробно-линейные автоморфизмы круга (они не меняют расстояний).

Для шара $B=\{|z|<R\}$ по формуле (15) предыдущего пункта

$$ds^2=(n+1)\left\{\frac{|dz|^2}{R^2-|z|^2}+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\bar z_\alpha z_\beta\,dz_\alpha\,d\bar z_\beta}{(R^2-|z|^2)^2}\right\}, \tag{15}$$

где $|dz|^2=\sum_{\alpha=1}^{n}|dz_\alpha|^2$. Из сравнения (14) и (15) можно еще раз сделать вывод о невозможности биголоморфного отображения шара на поликруг.

53. Поведение кернфункции на границе. В этом заключительном пункте мы приведем результаты Л. Хёрмандера, относящиеся к поведению кернфункции области голоморфности на границе области. В их основе лежит утверждение о локальном характере зависимости от области граничного поведения ее кернфункции, которое выводится из теоремы существования Хёрмандера (п. 39).

Теорема 1. *Пусть $D\subset\mathbb{C}^n$ — ограниченная область голоморфности с границей ∂D класса C^2. Пусть еще точка $\zeta\in\partial D$ обладает окрестностью U такой, что в $D'=D\cap U$ существует голоморфная функция g, которая имеет пик в точке ζ в следующем смысле*: 1) $|g(z)|\leqslant 1$ *в* D', *а* $\sup\limits_{z\in D''}|g(z)|<1$, *где* $D''=\{z\in D'\colon \rho(z,\zeta)>\delta\}$ *и* $\delta>0$ *достаточно мало*; 2) $\lim\limits_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D'}}|g(z)|=1$. *Тогда кернфункции K_D и $K_{D'}$ областей D и D' имеют в точке ζ одинаковое граничное поведение, т. е.*

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D'}}\frac{K_D(z)}{K_{D'}(z)}=1. \tag{1}$$

◀ Возьмем функцию $\chi\in C^\infty(U)$, равную единице в $\{\rho(z,\zeta)<\delta\}$, нулю в окрестности ∂U и такую, что $0\leqslant\chi\leqslant 1$ всюду в U; будем считать, что χ определена всюду в $\mathbb{C}^n$ и равна нулю вне U. Для любой функции $f\in L_h^2(D')$ и любого натурального p можно найти функцию $\varphi\in L^2(D)$ так, чтобы

$$h=\chi f g^p-\varphi \tag{2}$$

была голоморфной в D (мы считаем, что $\chi f g^p$ определена всюду в D условием, что она равна нулю там, где $\chi=0$).

В самом деле, условие голоморфности h в D равносильно условию, что там

$$\bar\partial\varphi=f g^p\bar\partial\chi, \tag{3}$$

а так как форма в правой части, очевидно, замкнута, а D — область голоморфности, то по теореме 2 Хёрмандера п. 39 существует решение φ с оценкой

$$\|\varphi\|_D^2=\int\limits_D|\varphi|^2\,dV\leqslant C\int\limits_{D''}|f g^p|^2 dV, \tag{4}$$

где C — постоянная, зависящая только от выбора функции χ (мы учли, что $\bar{\partial}\chi = 0$ в $D \setminus D''$).

При любом заданном $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать p столь большим, чтобы в D'' было

$$|g|^{2p} < \frac{\varepsilon^2}{2(C+1)}, \tag{5}$$

и тогда будем иметь

$$\int\limits_{D'} |h - fg^p|^2\, dV = \int\limits_{D'} |(\chi - 1) fg^p - \varphi|^2\, dV \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{D'} \{|\varphi|^2 + (1-\chi)^2 |fg^p|^2\}\, dV \leqslant$$

$$\leqslant 2(C+1) \int\limits_{D''} |fg^p|^2\, dV \leqslant \varepsilon^2 \int\limits_{D''} |f|^2\, dV$$

(мы учли (4) и то, что $\chi = 1$ в $D' \setminus D''$). Так как $h - fg^p \in L_h^2(D')$, то в силу неравенства (17) из п. 51 отсюда следует, что для любой $z \in D'$

$$|h(z) - f(z) g^p(z)|^2 \leqslant K_{D'}(z)\, \varepsilon^2 \int\limits_{D'} |f|^2\, dV,$$

и поэтому

$$|h(z)| \geqslant |f(z)| \cdot |g(z)|^p - \varepsilon \left\{ K_{D'}(z) \int\limits_{D'} |f|^2\, dV \right\}^{1/2}.$$

Выбирая в качестве f экстремальную функцию, для которой

$$|f(z)|^2 = K_{D'}(z) \int\limits_{D'} |f|^2\, dV$$

(см. п. 51), получим, в частности, для соответствующей h

$$|h(z)|^2 \geqslant K_{D'}(z) \{|g(z)|^p - \varepsilon\}^2 \int\limits_{D'} |f|^2\, dV. \tag{6}$$

С другой стороны, по неравенству треугольника, а также (2), 4) и (5) мы имеем

$$\left\{ \int\limits_{D} |h|^2\, dV \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \int\limits_{D'} |f|^2\, dV \right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{ C \int\limits_{D''} |fg^p|^2\, dV \right\}^{1/2} \leqslant (1+\varepsilon) \left\{ \int\limits_{D'} |f|^2\, dV \right\}^{1/2}$$

(мы учли, что $\chi = 0$ вне D'), откуда, пользуясь оценкой (6) и экстремальным свойством кернфункции, находим для любой $z \in D'$

$$K_D(z) \geqslant \frac{|h(z)|^2}{\int\limits_D |h|^2\, dV} \geqslant K_{D'}(z)\left(\frac{|g(z)|^p - \varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Так как кернфункция не возрастает при расширении области, то $K_D(z) \leqslant K_{D'}(z)$, и утверждение теоремы следует из того, что $|g(z)| \to 1$ при $z \to \zeta$ ▶

Доказанная теорема позволяет получать локальные оценки кернфункции при помощи замены области элементарными областями. Для наших целей в качестве элементарной области удобно взять эллипсоид

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C}^n: \quad \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu |z_\nu|^2 < \alpha_0 \right\}, \tag{7}$$

где $\alpha_\nu > 0$, $\nu = 0, \ldots, n$. Биголоморфное отображение f: $z_\nu \to \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}\, z_\nu$ преобразует E в шар $B = \{|z| < R\}$; пользуясь выражением (19) п. 51 для кернфункции шара и законом ее изменения при биголоморфных отображениях (см. (5) п. 52), получаем

$$K_E(z) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{\alpha_0 \ldots \alpha_n}{\left(\alpha_0 - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu |z_\nu|^2\right)^{n+1}}. \tag{8}$$

Придадим этому результату иную форму. Именно, рассмотрим вместо (7) область

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C}^n: \quad \operatorname{Im} z_n > \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} z_\mu \bar{z}_\nu \right\}, \tag{9}$$

где билинейная форма эрмитова и положительно определена; через $A = (a_{\mu\nu})$ мы обозначим матрицу этой формы и через $'A$ — эту же матрицу с вычеркнутыми n-й строкой и n-м столбцом. Унитарным преобразованием переменных $'z$ (которое не меняет кернфункции) мы можем привести матрицу $'A$ к диаго-

нальному виду, поэтому с самого начала можно считать, что

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_{n-1} & a_{n-1,\,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_\nu > 0$, $\nu = 1, \dots, n-1$.

Если теперь сделать еще преобразование $z_\mu + \frac{a_{n\mu}}{\lambda_\mu} z_n \to z_\mu$ ($\mu = 1, \dots, n-1$), $z_n \to z_n$, с определителем 1 и поэтому также не изменяющее кернфункцию, то в новых переменных матрица A рассматриваемой билинейной формы будет иметь диагональный вид, причем элемент в последней ее строке $\lambda_n > 0$ (мы учитываем, что $a_{\mu n} = \overline{a_{n\mu}}$).

В новых переменных G записывается неравенством $\operatorname{Im} z_n > \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu |z_\nu|^2$, которое в силу просто проверяемого тождества

$$\operatorname{Im} z_n - \lambda_n |z_n|^2 = \frac{1}{4\lambda_n} - \lambda_n \left| z_n - \frac{i}{2\lambda_n} \right|^2$$

можно переписать в виде $\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu |z_\nu|^2 + \lambda_n \left| z_n - \frac{i}{2\lambda_n} \right|^2 < \frac{1}{4\lambda_n}$. Мы видим, что G представляет собой эллипсоид, и по формуле (8) можем написать

$$K_G(z) = \frac{n!}{4\pi^n} \frac{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\left\{ \frac{1}{4\lambda_n} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu |z_\nu|^2 - \lambda_n \left| z_n - \frac{i}{2\lambda_n} \right|^2 \right\}^{n+1}} =$$

$$= \frac{n!}{4\pi^n} \frac{\det (\lambda A)}{\left(\operatorname{Im} z_n - \sum_{1}^{n} \lambda_\nu |z_\nu|^2 \right)^{n+1}}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим окончательно

$$K_G(z) = \frac{n!}{4\pi^n} \frac{\det (\lambda A)}{\left(\operatorname{Im} z_n - \sum\limits_{\mu,\,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} z_\mu \bar{z}_\nu \right)^{n+1}}. \tag{10}$$

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Теорема 2 (Хёрмандер). *Пусть* $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) < 0\}$ — *ограниченная область голоморфности и в окрестности точки*

$\zeta \in \partial D$ функция $\varphi \in C^2$ и строго плюрисубгармонична. Тогда

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} |z-\zeta|^{n+1} K_D(z) = \frac{n!}{4\pi^n} \varkappa(\zeta), \tag{11}$$

где $\varkappa(\zeta)$ — произведение собственных значений сужения формы Леви

$$H_\zeta(\omega) = \sum_{\mu,\, \nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}\Big|_\zeta \omega_\mu \bar{\omega}_\nu \tag{12}$$

на аналитическую касательную плоскость $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial z_\mu}\Big|_\zeta \omega_\mu = 0$ к ∂D в точке ζ.

◀ Без ограничения общности считаем $\zeta = 0$ и что $\operatorname{grad} \varphi$ является единичным вектором внешней нормали к ∂D в окрестности этой точки. Ось $\operatorname{Im} z_n$ направим по внутренней нормали, чтобы было $\operatorname{Im} z_n + \varphi(z) = O(|z|^2)$ при $z \to 0$. Тогда по формуле Тейлора в окрестности 0 область D запишется неравенством

$$\operatorname{Im} z_n > \sum_{\mu,\, \nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}\Big|_0 z_\mu \bar{z}_\nu + \operatorname{Re} K(z) + o(|z|^2),$$

где $K(z) = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial z_\nu}\Big|_0 z_\mu z_\nu$. Не меняя ничего в теореме, можно заменить еще z_n на $z_n - iK(z)$, т.е. предположить, что в последней формуле $K(z) = 0$. Мы обозначим $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}\Big|_0 = a_{\mu\nu}$, так что $\sum a_{\mu\nu} z_\mu \bar{z}_\nu$ будет эрмитовой и положительно определенной. Вблизи точки 0 область D описывается неравенством

$$\operatorname{Im} z_n > \sum_{\mu,\, \nu=1}^{n} a_{\mu\nu} z_\mu \bar{z}_\nu + o(|z|^2).$$

Теперь мы фиксируем λ и рассмотрим область

$$G_\lambda = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \colon \operatorname{Im} z_n > \sum_{\mu,\, \nu=1}^{n} a_{\mu\nu} z_\mu \bar{z}_\nu + \lambda |z|^2 \right\}.$$

Если $\lambda > -\lambda_0$, где λ_0 — наименьшее из собственных значений матрицы $A = (a_{\mu\nu})$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n$, то G_λ представляет собой эллипсоид, и по (10) ее кернфункция

$$K_{G_\lambda}(z) = \frac{n!}{4\pi^n} \frac{\det('A_\lambda)}{\left(\operatorname{Im} z_n - \sum (a_{\mu\nu} + \lambda \delta_{\mu\nu}) z_\mu \bar{z}_\nu\right)^{n+1}}, \tag{13}$$

где $\delta_{\mu\nu} = 1$ при $\mu = \nu$ и 0 при $\mu \neq \nu$, $'A_\lambda = (a_{\mu\nu} + \lambda \delta_{\mu\nu})$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n-1$. Фиксируем еще окрестность U точки 0 и обо-

значим $G'_\lambda = G_\lambda \cap U$; по теореме 1 кернфункции K_{G_λ} и $K_{G'_\lambda}$ эквивалентны при $z \to 0$.

Так как D строго псевдовыпукла в точке 0, то $\sum a_{\mu\nu} z_\mu \bar{z}_\nu \geqslant \geqslant \sigma |z|^2$, где $\sigma > 0$ — постоянная. Выбирая λ: $0 < \lambda < \sigma$ и достаточно малую окрестность U, мы добьемся того, что $G'_\lambda \subset D$, и в силу монотонности кернфункции будем иметь $K_D(z) \leqslant K_{G'_\lambda}(z)$. Согласно сказанному выше область G'_λ можно заменить G_λ, и по (13) будем иметь

$$\overline{\lim}\,(\operatorname{Im} z_n)^{n+1} K_D(z) \leqslant \frac{n!\det('A_\lambda)}{4\pi^n}\,\overline{\lim}\,\frac{1}{\left(1 - \dfrac{\sum (a_{\mu\nu} + \lambda\delta_{\mu\nu}) z_\mu \bar{z}_\nu}{\operatorname{Im} z_n}\right)^{n+1}}.$$

Будем считать, что $z \to 0$ по лучу $\operatorname{Im} z_n = |z|$; тогда последнее неравенство примет вид

$$\overline{\lim}\,|z|^{n+1} K_D(z) \leqslant \frac{n!}{4\pi^n} \det('A_\lambda). \tag{14}$$

Теперь мы рассмотрим эллипсоид $G_{-\lambda}$, где $0 < \lambda < \lambda_0$; достаточно близкие к 0 точки D принадлежат ему, поэтому при достаточно малой окрестности U точки 0 область $D' = D \cap U \subset \subset G_{-\lambda}$. Пользуясь опять монотонностью кернфункции и теоремой 1 (в качестве функции g, фигурирующей в ее условиях, можно взять e^{iz_n}), мы получим вместо (14)

$$\underline{\lim}\,|z|^{n+1} K_D(z) \geqslant \frac{n!}{4\pi^n} \det('A_{-\lambda}), \tag{15}$$

где опять предполагается, что $z \to 0$ по внутренней нормали к ∂D. Но λ в (14) и (15) можно брать сколь угодно малым; поэтому, переходя в этих формулах к пределу при $\lambda \to 0$, мы получим, что существует

$$\lim |z|^{n+1} K_D(z) = \frac{n!}{4\pi^n} \det('A). \tag{16}$$

Здесь определитель равен произведению $n-1$ собственных значений формы, которая получается из (12) подстановкой $\omega_n = 0$, и в силу нашего выбора координатных осей совпадает с сужением (12) на касательную плоскость к ∂D в точке $\zeta = 0$.

Остается заметить, что рассматриваемый нами предел достигается равномерно по ζ, поэтому он существует при любом способе стремления точки $z \in D$ к граничной точке ζ ▶

ЗАДАЧИ

1. Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ и $K \Subset D$. Тогда любое голоморфное отображение $f\colon D \to K$ имеет одну и только одну неподвижную точку.

2. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $f\colon U \to \mathbb{C}^m$ — голоморфное отображение. Если $a \in U$ — изолированная точка прообразов $b = f(a)$, то $m \geqslant n$, причем $m > n$ в том и только том случае, если существует голоморфная в точке b функция $g \not\equiv 0$ такая, что $g \circ f \equiv 0$ в окрестности a.

3. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $f\colon U \to \mathbb{C}^m$ — голоморфное отображение. Если любая $a \in U$ является изолированной точкой множества прообразов $f(a)$ и множество $f(U)$ открыто в $\mathbb{C}^m$, то $m = n$. Обратно, если $m = n$ и любая точка $a \in U$ является изолированной среди прообразов $f(a)$, то множество $f(U)$ открыто.

4. Доказать, что любой голоморфизм f области D на D^*, гомеоморфный в $\overline{D}$, преобразует границу Шилова S области D в границу Шилова S^* области D^*.

5. Если φ_1 и φ_2 — голоморфные отображения области D в себя и $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ — автоморфизм D, то φ_1 и φ_2 — тоже автоморфизмы.

6. Если последовательность голоморфизмов $f^{(\nu)}\colon D \to D^\nu$ сходится на компактных подмножествах области D, то предельное отображение f либо тоже голоморфизм, либо вырождено в том смысле, что якобиан $\dfrac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$ в D.

7. Если последовательность автоморфизмов φ_ν ограниченной области D сходится на компактных подмножествах D к отображению φ и если множество $\varphi(D) \cap D$ непусто, то φ — автоморфизм D; отсюда следует, что если φ вырождено, то $\varphi(D) \subset \partial D$.

8. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ и K — компакт в D. Тогда множество всех автоморфизмов φ области D таких, что $\varphi(a) \in K$, где a — некоторая фиксированная точка D, является компактом в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах D.

9. Пусть $\|\ \|$ — произвольная норма в $\mathbb{C}^n$ такая, что $\|\lambda z\| = |\lambda|\,\|z\|$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, и f — голоморфное отображение единичного (в этой норме) шара в себя, причем $f(0) = 0$. Доказать, что в этом шаре $\|f(z)\| \leqslant \|z\|$.

10. Пусть f — голоморфное отображение единичного шара $B \subset \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$ такое, что $f(0) = 0$. Тогда для любого числа $p > 1$ имеет место следующее обобщение неравенства Шварца:

$$\sum_\nu |f_\nu(z)|^p \leqslant |z|^2 \sup_B \sum_\nu |f_\nu|^p, \qquad z \in B.$$

11. Группа Γ автоморфизмов φ области $D \subset \mathbb{C}^n$ называется дискретной, если множество образов $\varphi(z)$ фиксированной точки $z \in D$ при всевозможных $\varphi \in \Gamma$ не имеет в D предельных точек. Доказать, что для любой дискретной группы Γ автоморфизмов D ряд $\sum_{\varphi \in \Gamma} |\varphi'|^2$, где φ' — якобиан отображения φ, сходится равномерно на любом компакте из D.

12. Пусть Γ — дискретная группа автоморфизмов области $D \subset \mathbb{C}^n$ и D/Γ — множество классов эквивалентности по отношению: $z' \sim z''$, если существует $\varphi \in \Gamma$ такой, что $\varphi(z') = z''$. Если область D ограничена, а множество D/Γ компактно, то D — область голоморфности.

13. Пусть D — область в $\mathbb{C}^2$, состоящая из единичного бикруга $\{|z| < 1, |w| < 1\}$ и области $\left\{(x+iy, w)\colon 0 < x < 2,\ |y| < \frac{1}{2},\ \left|w - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{3}\right\}$. Доказать, что всякий автоморфизм D, непрерывный в замыкании бикруга, является тождественным; это утверждение справедливо и для оболочки

голоморфности области D. [Указание: воспользоваться задачей 4 и задачей 19 к гл. I.]

14. Область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется жесткой, если у нее нет автоморфизмов, отличных от тождественного. Примером жесткой области $D \subset \mathbb{C}^2$ является бикруг $\{|z|<1,\ |w|<1\}$, из которого вынут меньший бикруг $\left\{\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{3},\ \left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4}\right\}$. [Указание: воспользоваться задачей 17 к гл. V.]

15. Доказать, что группа автоморфизмов области $D \subset \mathbb{C}^2$, которая получается из единичного бикруга выбрасыванием бикруга $\left\{\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{3},\ \left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{3}\right\}$, состоит из двух элементов.

16. Для того чтобы трубчатый конус $T = K \times \mathbb{R}^n(y)$, где K — конус в $\mathbb{R}^n(x)$ с вершиной $x=0$, был голоморфно эквивалентен ограниченной области, необходимо и достаточно, чтобы K не содержал прямых.

17. Для того чтобы трубчатая область голоморфности была голоморфно эквивалентной ограниченной области, необходимо и достаточно, чтобы ее основание не содержало прямых.

18. Отображение f области $D \subset \mathbb{C}^n$ в группу Γ преобразований области $D' \subset \mathbb{C}^m$ в себя называется голоморфным, если для каждой точки $a \in D'$ голоморфны (по z) отображения $(f(z))(a)$: $D \to D'$. Доказать, что всякое голоморфное отображение ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$ в группу ортонормальных преобразований $\mathbb{C}^m$ в себя постоянно. [Указание: воспользоваться тем, что в неравенстве $\left(\int |h|\,dV\right)^2 \leqslant V(D)\int |h|^2\,dV$, где $V(D)$ — объем D, справедливом для всех $h \in L_h^2(D)$, равенство достигается только в случае $h \equiv \text{const}$.]

19 (Везентини). Вычислить кернфункции следующих областей:

а) $D_1 = \left\{z \in \mathbb{C}^4\colon\ x_1 - |z_4|^2 x_2 - x_3^2 > 0,\ x_2 > 0\right\}$;

б) $D_2 = \{z \in \mathbb{C}^5\colon\ x_1 x_3 - x_4^2 > 0,\ x_2 x_3 - x_5^2 > 0,\ x_3 > 0\}$.

(Ответы:

$$K_{D_1}(z) = c_1 x_2 \left[\left(x_1 - |z_4|^2\right) x_2 - x_3^2\right]^{-4};$$

$$K_{D_2}(z) = c_2 x_3^2 \left(x_1 x_3 - x_4^2\right)^{-3} \left(x_2 x_3 - x_5^2\right)^{-3},$$

где c_ν — константы.)